יחידה 1: חוקיות וביטויים אלגבריים

1.1 לחיצות ידיים

מטרות

- שימוש באלגברה ככלי להכללה והצדקה
- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית
- זיהוי חוקיות בסיטואציה מתמטית
- קישור בין ייצוגים שונים מילולי, מספרי, גיאומטרי ואלגברי
- שימוש בכלים טכנולוגיים לחקירה ולבדיקה

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (*Excel*)

פתיחה

מתחילים על ידי קריאת השאלה הראשונה והדגמה מוחשית של לחיצות ידים בין ארבעה תלמידים.

פתרונות והערות

אפשר לגשת לשאלות מסוג זה בשתי גישות.

- מציאת סדרה של תוצאות מספריות באופן שיטתי למקרים בודדים לפי הסדר, וחיפוש חוקיות מתמטית על סמך מקרים אלו. גישה זו היא בדרך כלל גישה רקורסיבית כלומר, מוצאים את המספר הבא על פי החוקיות במקרה הקודם.
- חקירת החוקיות של מקרה פרטי הכללה על סמך דוגמה.

בדרך כלל, אופן הצגת השאלה מוליך לכיוון מסוים.

דוגמה לשאלה המהונדסת כדי שתתאים לגישה הראשונה, אפשר למצוא בפעילות 1.2 שלטי ניאון.

בפעילות שלנו השאלות נשאלות באופן שיתאימו לגישה השניה. המקרים שעליהם שואלים אינם של מספרים עוקבים, וכמו כן, מגיעים מהר למקרים עם מספרים גדולים. אחת הסיבות לכך היא שקשה להגיע לביטוי אלגברי על ידי חיפוש החוקיות בין המספרים.

למרות עיצוב השאלות, תלמידים רבים מעדיפים למצוא את מספר לחיצות הידיים על ידי הכללת מספרים עוקבים. תלמידים אלו יחפשו את סדרת מספרי לחיצות הידיים בין 2 אנשים, 3 אנשים, 4 אנשים וכו' וימצאו כי היא: 1, 3, 6, 10, … תלמידים אלו אולי ימצאו את החוקיות של הסדרה על ידי מציאת סדרת ההפרשים (2, 3, 4, …), ואולי ישתמשו בחוקיות זו על מנת להכליל את מספר לחיצות הידיים ל n אנשים כך: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$

אם התלמידים לא למדו למצוא סכום כזה, ספק אם יגיעו לביטוי אלגברי מקובל.

1. א. **פתרון בהכללה של מקרה פרטי**

6 לחיצות ידיים. כל חבר בקבוצה לוחץ יד לכל חבר אחר בקבוצה. כלומר כל אחד מ 4 החברים לוחץ יד ל 3 חברים. בסך הכל 12 לחיצות ידיים. אבל באופן זה נספרה כל לחיצת יד פעמיים, לכן יש לחלק את המכפלה ב 2.

פתרון בגישה רקורסיבית

בין 2 אנשים יש לחיצת יד אחת. כל אדם שמגיע מוסיף מספר לחיצות ידים כמו המספר האנשים שנמצאים בחדר. כלומר, בין 3 אנשים יש 3 (= 2 + 1) לחיצות ידיים. בין 4 אנשים יש 6 (= 3 + 2 +1) לחיצות ידיים.

ב. 28($=\frac{7\cdot 6}{2}$) לחיצות ידיים.

ג. 2415 ($=\frac{70\cdot 69}{2}$) לחיצות ידיים.

ד. ראו הסבר בסעיף א.

ה. $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

ו. במונה של הביטוי האלגברי בסעיף ה (n הוא מספר טבעי), רשומה מכפלה של מספרים עוקבים. אם אחד מהם זוגי, השני אי זוגי, ומכפלתם תמיד זוגית. החלוקה ב 2 של המכפלה תהיה זוגית, אם אחד הגורמים מתחלק ב 4.

לכן, מספר לחיצות הידיים יהיה זוגי אם

- מספר האנשים מתחלק ב 4, כלומר הוא מהצורה 4k (k טבעי)
- מספר האנשים פחות 1 מתחלק ב 4, כלומר מספר האנשים הוא מספר שבחלוקתו ב 4 נוצרת שארית 1 (למשל, 13, 21). זהו מספר מהצורה: $n = 4k + 1$ (k טבעי).

מספר לחיצות הידיים יהיה אי זוגי בכל המקרים האחרים כלומר, אם

- מספר האנשים הוא מספר שבחלוקתו ב 4 יוצר שארית 2. זהו מספר מהצורה $n = 4k + 2$ (k טבעי).
- מספר האנשים הוא מספר שבחלוקתו ל 4 יוצר שארית 3. זהו מספר מהצורה $n = 4k + 3$ (k טבעי).

2. השאלה דומה לשאלה הקודמת, אך במקרה זה כל קשר בין שני אנשים יוצר שני כרטיסי ביקור (ולא כמו קודם לחיצת ידיים אחת). לכן אין צורך בחלוקת המכפלה ל 2.

א. $10\cdot 9 = 90$

$n(n-1)$

ב. מכפלה של מספרים עוקבים היא תמיד זוגית כי אחד המספרים חייב להיות זוגי.

3. הסיטואציה היא ייצוג גיאומטרי של השאלה הראשונה. כל קטע שקול ל"לחיצת יד" בין שתי נקודות. מכל אחת מ 10 הנקודות יוצאים 9 קטעים (קטע לכל נקודה שונה ממנה). המכפלה $9\cdot 10$ מתקבלת על ידי ספירת כל קטע פעמיים, לכן מספר הקטעים הוא 45.

.4 יש מספר דרכים להכליל באמצעות ביטוי אלגברי. מובן שכל הביטויים האלגברים, המתקבלים מדרכים נכונות, שווים. תלמידים שיודעים לפשט ביטויים כאלה יוכלו להיווכח בכך. תלמידים אחרים יוכלו לאשר את שוויון הביטויים על ידי הצבת מספרים שווים בביטויים השונים. להלן שתי דרכי פתרון:

פתרון על סמך מספר הקטעים בין n מסמרים

ממספר הקטעים בין n מסמרים נפחית את מספר הקטעים של המצולע עצמו. באופן זה הביטוי האלגברי הוא:

$\frac{n\cdot(n-1)}{2}-n$.

פתרון בהכללה של מקרה פרטי

מכל אחד מ n הקודקודים יוצאים (n – 3) אלכסונים אלכסון לכל קודקוד, פרט לו עצמו ולשני הקודקודים הסמוכים לו. בסך הכל n(n – 3) אלכסונים. עקב ספירה כפולה של כל אלכסון, לכן הביטוי המתאים הוא

$\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

.5 א. סיטואציה זו שקולה לסיטואציה של כרטיסי הביקור. החישוב המתאים למספר המשחקים בעונה בין 16 קבוצות הוא 240 (= 16 · 15)

ב. **דוגמה לסיפור**

בליגת טניס, כל מתמודד משחק תחילה נגד מתמודד אחר. המפסיד יוצא מן ההתמודדות. בשלב שני, כל אחד מהזוכים מתמודד נגד כל האחרים.

דוגמה לשתי שאלות על הסיפור

- מה תוכלו לומר על מספר המתמודדים בהתחלה?
- כמה משחקים נערכו?

.6 להלן הנוסחאות בשפת *Excel*.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**מספר האנשים**	**מספר לחיצות הידים**		**מספר האנשים**	**מספר כרטיסי הביקור**		**מספר המסמרים**	**מספר הקטעים**
2	A2	=A2*(A2-1)/2		D2	=D2*(D2-1)		G2	=G2*(G2-1)/2

	A	B	C	D	E
1	**מספר הקודקודים**	**מספר האלכסונים**		**מספר הקבוצות**	**מספר המשחקים**
2	A2	=A2*(A2-3)/2		D2	=D2*(D2-1)

בכל טבלה, נמלא את העמודה השמאלית במספרים טבעיים מ 3 ואילך ונגרור את הנוסחאות שבעמודה הימנית, כלפי מטה. יתקבלו הגיליונות שלהלן:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	מספר האנשים	מספר לחיצות הידים		מספר האנשים	מספר כרטיסי הביקור		מספר המסמרים	מספר הקטעים
2	3	3		3	6		3	3
3	4	6		4	12		4	6
4	5	10		5	20		5	10
5	6	15		6	30		6	15
6	7	21		7	42		7	21

	A	B	C	D	E
1	מספר הקודקודים	מספר האלכסונים		מספר הקבוצות	מספר המשחקים
2	3	0		3	6
3	4	2		4	12
4	5	5		5	20
5	6	9		6	30
6	7	14		7	42

אפשר לייעל את העבודה על ידי כתיבת נוסחאות מקוצרות. למשל, בתא E2 ניתן לכתוב את הנוסחה =2*B2 , ובתא H2 ניתן לרשום את הנוסחה =B2

7. משימה זו היא משימה שקולה למשימת לחיצות הידיים (ולשאלת קישוט המסמרים). במקרה זה, הרחובות שקולים לאנשים (לקטעים בקישוט) והרמזורים שקולים ללחיצות הידיים (למסמרים).

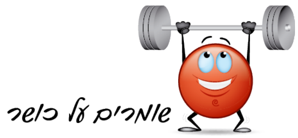
הביטוי האלגברי הוא $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ וממנו נגזר כי ב 3 רחובות 3 רמזורים, ב 5 רחובות 10 רמזורים, וב 20 רחובות 190 ($=\frac{20\cdot 19}{2}$) רמזורים.

8. בטבלה שלהלן יש למלא את העמודה השמאלית במספרים טבעיים מ 3 ואילך, ולגרור את הנוסחה שבעמודה הימנית עד 75.

	A	B
1	מספר הרחובות	מספר הרמזורים
2	A2	=A2*(A2-1)/2

מתקבלת התוצאה הבאה:

73	74	2701
74	75	2775
75	76	2850



א. עבור הביטוי $\frac{n(n-1)}{2}$, **כל מספר שלם שנציב יתן מספר שלם**, כי מכפלת עוקבים היא תמיד זוגית ולכן מתחלקת ב 2.

דוגמאות למספרים זוגיים שיתנו כתוצאה מספר שלם: 20, 22, 24.

דוגמאות למספרים אי זוגיים שיתנו כתוצאה מספר שלם: 21, 23, 24.

עבור הביטוי $\frac{n(n-2)}{2}$, **כל מספר זוגי שנציב יתן מספר שלם**, כי מכפלת עוקבים זוגיים היא תמיד זוגית ולכן מתחלקת ב 2. **כל מספר אי זוגי שנציב יתן מספר לא שלם**, כי מכפלת עוקבים אי זוגיים היא תמיד אי זוגית ולכן בחלוקתה ב 2, נשארת שארית 1.

דוגמאות למספרים זוגיים שיתנו כתוצאה מספר שלם: 20, 22, 24.

דוגמאות למספרים אי זוגיים שיתנו כתוצאה מספר שלם: אין.

עבור הביטוי $\frac{n(n-3)}{2}$ **כל מספר שלם שנציב יתן מספר שלם** כי אם n שלם, אחד מהגורמים תמיד זוגי והשני אי זוגי. זהו מקרה דומה למקרה הראשון, ואפשר לבחור אותם מספרים.

ב. עבור הביטוי $\frac{n(n-1)}{2}$, כדי שהתוצאה תהיה זוגית אבל לא תתחלק ב 4, n או 1 – n צריך להתחלק ב 4 אבל לא להתחלק ב 8.

דוגמאות למספרים זוגיים מתאימים (במקום n): 20, 28, 36

דוגמאות למספרים אי זוגיים מתאימים (במקום n): 21, 29, 37

עבור הביטוי $\frac{n(n-2)}{2}$, מכפלה של זוגיים עוקבים מתחלקת תמיד ב 8 כי אחד המספרים מתחלק ב 2 והשני מתחלק ב 4. לכן בחלוקה ל 2 של כל מכפלה כזאת מתקבל מספר המתחלק ב 4. מכפלה של אי זוגיים עוקבים היא תמיד אי זוגית ואינה מתחלקת ב 2.

דוגמאות למספרים זוגיים: אין.

דוגמאות למספרים אי זוגיים: אין.

עבור הביטוי $\frac{n(n-3)}{2}$ כדי שהתוצאה תהיה זוגית אבל לא תתחלק ב 4, n או 3 – n צריך להתחלק ב 4 אבל לא להתחלק ב 8 .

דוגמאות למספרים זוגיים שיתנו כתוצאה מספר לא שלם: 20, 28, 36.

דוגמאות למספרים אי זוגיים שיתנו כתוצאה מספר לא שלם: 23, 31, 39

מידות הריבוע	מספר הריבועים
1 x 1	8 · 8 = 64
2 x 2	7 · 7 = 49
3 x 3	6 · 6 = 36
4 x 4	5 · 5 = 25
5 x 5	4 · 4 = 16
6 x 6	3 · 3 = 9
7 x 7	2 · 2 = 4
8 x 8	1 · 1 = 1

סך הכל: 204 (= 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1) ריבועים.

למסיימים

1. החליפו עם חבר את הסיפור שכתבתם בשאלה 5 ב, וענו על השאלות שכתב.

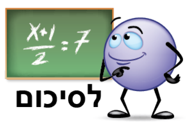
2. בליגת טניס, כל מתמודד משחק תחילה נגד מתמודד אחר. המפסיד יוצא מן ההתמודדות. בשלב שני, כל אחד מהזוכים מתמודד נגד כל הזוכים האחרים. אם מספר המתמודדים בהתחלה הוא n,

   א. רשמו את ההגבלות על n.

   תשובה: n חייב להיות זוגי, כדי שלכל מתמודד יהיה בן זוג.

   ב. כמה משחקים נערכו? בדקו בעזרת דוגמה פרטית.

   תשובה: ביטוי אלגברי למספר המשחקים שנערכו $\frac{n}{2}+\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)}{2}$ למשל, אם היו 6 מתמודדים, היו תחילה 3 משחקים בין 3 זוגות. אחר כך נשארו 3 מתמודדים, ששיחקו בסך הכל 3 משחקים ($\frac{3\cdot 2}{2}=$). לכן היו בסך הכל 6 משחקים. ואכן, על ידי הצבה בביטוי נקבל $\frac{6}{2}+\frac{\frac{6}{2}(\frac{6}{2}-1)}{2}=6$



לסיכום

- בודקים ביחד עם התלמידים את הביטויים שכתבו, ואת הקשרים ביניהם.
- מתייחסים לזוגות של סיטואציות המתוארות בייצוגים שונים (למשל, מילולי וגיאומטרי) ולזוגות של סיטואציות המתוארות באותו ייצוג (למשל, גיאומטרי) ומשווים ביניהן.
- מתייחסים לזוגות של סיטואציות המתוארות על ידי ביטויים אלגברים שאחד הוא כפול מן השני.
- מתייחסים לסיפורים ולשאלות שהתלמידים כתבו. בוחנים את השאלות ועונים עליהן.