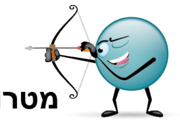
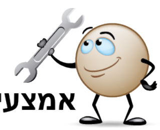
1.2 שלטי ניאון



מטרות

- שימוש באלגברה ככלי להכללה ולהצדקה
- הבנת מחזוריות ומציאת כפולה משותפת
- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית
- ספירה שיטתית והכללה
- זיהוי חוקיות בסיטואציה מתמטית
- קישור בין ייצוגים שונים מילולי, מספרי, גיאומטרי ואלגברי
- שימוש בכלים טכנולוגיים לבדיקה



אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (*Excel*)

פתיחה

מדברים על הסיטואציה ומבררים אם היא מוכרת לתלמידים.

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת בחוקיות ומשלבת שני נושאים מתמטיים שונים.

- הכללה ותרגום לביטויים אלגבריים של חוקיות גיאומטרית.
- הבנת מחזוריות ומציאת כפולה משותפת.

הקשר בין הנושאים נעשה על ידי הסיטואציה המשותפת ועל ידי הביטויים האלגבריים המבטאים את המחזוריות של החוקיות.

כל חלק מן הפעילות שלם בפני עצמו, לכן ניתן לחלק את הפעילות לשני מועדים שונים.

1. א. ניתן לספור את הנורות בדרכים שונות:

$1 + 20 \cdot 2 = 41$

$3 + 19 \cdot 2 = 41$

$20 \cdot 3 - 19 = 41$

ויש דרכי ספירה נוספות.

טעות נפוצה היא לכפול את מספר המשולשים ב 3, בלי לשים לב שיש צלעות משותפות.

ב.

מספר המשולשים	1	2	3	4	5	10	20	100	n
מספר הנורות	***3***	***5***	***7***	***9***	***11***	***21***	***41***	***201***	***2n + 1***

לפי כל שיטת ספירה מתקבל ביטוי אחר למספר הנורות.

הביטויים המתאימים לשיטות הספירה ב 1 א.

$1 + n \cdot 2$

$3 + (n - 1) \cdot 2$

$3n - (n - 1)$

2. ראינו שישנם תלמידים המשלימים את הטבלה שבמשימה זו על ידי התקדמות בשורות ולא בעמודות. תלמידים אלו, כנראה, מעדיפים חיפוש חוקיות מתמטית בין המספרים הרשומים, על פני התרכזות בראייה הגאומטרית של המצולעים ברצף. בכל אחת מן השורות מתקבלת סדרה חשבונית שהפרשה הוא כמספר המצולעים ברצף.

מצולע / מספר המצולעים ברצף	משולש	ריבוע	מחומש	משושה	משובע	מתומן	מצולע בעל 20 צלעות	מצולע בעל k צלעות
1	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***20***	***k***
2	***5***	***7***	***9***	***11***	***13***	***15***	***39***	***1 + 2(k – 1)***
3	***7***	***10***	***13***	***16***	***19***	***22***	***58***	***1 + 3(k – 1)***
4	***9***	***13***	***17***	***21***	***25***	***29***	***77***	***1 + 4(k – 1)***
5	***11***	***16***	***21***	***26***	***31***	***36***	***96***	***1 + 5(k – 1)***
6	***13***	***19***	***25***	***31***	***37***	***43***	***115***	***1 + 6(k – 1)***
7	***15***	***22***	***29***	***36***	***43***	***50***	***134***	***1 + 7(k – 1)***
8	***17***	***25***	***33***	***41***	***49***	***57***	***153***	***1 + 8(k – 1)***
20	***41***	***61***	***81***	***101***	***121***	***141***	***381***	***1 + 20(k – 1)***
n	***1 + n·2***	***1 + n·3***	***1 + n·4***	***1 + n·5***	***1 + n·6***	***1 + n·7***	***1 + n·19***	***1 + n(k – 1)***

3. א. רושמים כותרות. ממלאים בשורה 2 את מספר הצלעות לפי המצולעים. ממלאים בעמודה A את מספר המצולעים ברצף. רושמים בכל עמודה ביטוי מתאים. גוררים את הביטוי כלפי מטה.

	A	B	C	D	E	F	G
1		**משולש**	**ריבוע**	**מחומש**	**משושה**	**משובע**	**מתומן**
2	1	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	2	=1+A3*2	=1+A3*3	=1+A3*4	=1+A3*5	=1+A3*6	=1+A3*7

ב. רושמים כותרות. ממלאים בשורה 2 את מספר הצלעות לפי המצולעים. ממלאים בעמודה A את מספר המצולעים ברצף (מספרים טבעיים עוקבים). רושמים בכל שורה ביטוי מתאים. גוררים ימינה.

	A	B	C	D	E	F	G
1		**משולש**	**ריבוע**	**מחומש**	**משושה**	**משובע**	**מתומן**
2	1	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	2	=1+(B2-1)*2					
4	3	=1+(B2-1)*3					
5	4	=1+(B2-1)*4					
6	5	=1+(B2-1)*5					
7	6	=1+(B2-1)*6					
8	7	=1+(B2-1)*7					
9	8	=1+(B2-1)*8					

אפשר למלא את הטבלה בשתי גרירות בלבד על ידי שימוש בביטוי המכיל סימני $.

אם רושמים $ לפני שם של תא(למשל $B2) המשתנה נשאר קבוע בגרירה לאורך שורה (תמיד B), ומשתנה רק בגרירה לאורך עמודה (**B**3, **B**4, **B**5,...)

אם רושמים $ בין האות למספר בשם התא (למשל B$2) המשתנה נשאר קבוע בגרירה לאורך עמודה (תמיד 2), ומשתנה רק בגרירה לאורך שורה (B**2**, C**2**, E**2**,...)

אפשר, אם כן, אחרי שממלאים כותרות, שורת מספרים ראשונה ועמודת מספרים ראשונה לרשום בתא B3 את הביטוי =(B$2–1)*$A3+1 (שהוא תרגום של הביטוי הכללי לשפת Excel), לגרור לאורך העמודה, ולגרור את כל העמודה לאורך השורות, והטבלה תתמלא.

4. הצורה היא כמו זו שבסעיף ב. 

בשנייה ה 45 מוארות רק המנורות הנדלקות כל שנייה חמישית, וכן אלה הנדלקות כל שנייה שלישית.

45 הוא כפולה של 5 וגם של 3 אבל לא של 2 ולא של 4.

5. הצורה היא כמו זו שבסעיף א. 

30 הוא כפולה של 5 של 3 ושל 2 אבל לא של 4, לכן רק המנורות מסוג  אינן מוארות.

6. מספר השניות צריך להיות כפולה של 2 (בגלל המנורות האופקיות בשורה התחתונה), וצריך להיות כפולה של 3 (בגלל המנורות האלכסוניות מסוג ****). בגלל המנורות הכבויות, אסור שהזמן בשניות יהיה כפולה של 4 או של 5.
דוגמאות:
א. בשנייה השישית ב. בשנייה השמונה עשרה ג. בשנייה הארבעים ושתיים

7. אין זמן שבו המנורות נראות כך  כי מצב כזה קורה בשניות שהן כפולה של 4 ושל 3. אבל אז הן בהכרח כפולות של 2, והמנורות האופקיות בשורה התחתונה יהיו גם כן דלוקות.

8. א. **נכון**, כי 4 הוא כפולה של 2.

ב. **לא נכון**, כי 51 הוא כפולה של 3.

ג. **נכון**, כי הכפולה המשותפת המינימלית של שלושה מהמספרים 2, 3, 4 ו 5 היא 12.

ד. **לא נכון**. למשל, מכיוון שהמנורות האופקיות בשורה התחתונה דולקות במשך כל שנייה שנייה.

9. א. דן צדק כי מספרים ראשוניים הגדולים מ 7 אינם כפולה של 2, 3, 4 או 5.
ב. דינה טעתה, כי יש מספרים רבים שאינם ראשוניים ואינם כפולות של 2, 3, 4 או 5. למשל 77, וכן כל מכפלה אחרת של שני ראשוניים או יותר, הגדולים מ 5.

10. דוגמה לטענה נכונה בכל פעם שהמנורות מסוג **/** מוארות, גם המנורות האופקיות בשורה התחתונה מוארות.
דוגמה לטענה שגויה בכל פעם שהמנורות האופקיות בשורה התחתונה מוארות, גם המנורות מסוג **/** מוארות.

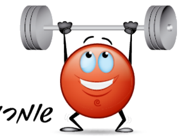
11. א. המספרים מייצגים את השניות, והמשבצות הצבועות את המנורות המוארות במשך שניות אלו. כל שורה מייצגת מנורה מסוג אחר.
ב. למשל, אילו מנורות דלוקות במשך השנייה ה 20.
ג. למשל, בטבלה הבאה אפשר לראות כי 24 מופיע 3 פעמים, כי הוא כפולה של שלושה מספרים מבין המספרים 2, 3, 4, 5. לעומת זאת, הוא 9 הוא כפולה של מספר אחד בלבד מבין מספרים אלו, ולכן הוא מופיע בטבלה פעם אחת בלבד.

כפולות של 2	2	4	6	8	10	12	14	16	17	18	19	20	21	22	23	24
כפולות של 3	3	6	9	12	15	18	21	24								
כפולות של 4	4	8	12	16	20	24										
כפולות של 5	5	10	15	20												

12. השלט יהיה מואר במלואו במשך השנייה ה 60 שהיא הכפולה המשותפת המינימלית של 2, 3, 4 ו 5, וכן בכל השניות שהן כפולות של 60, כלומר כל **דקה** שלמה.

13. א. התשובה הנכונה היא (iii) $5 + 2n$. אם מציבים 0 במקום n מקבלים 5. זוהי השנייה הראשונה שבה הנורות האופקיות היו מוארות. מכאן ואילך המנורות האלה דלקו במשך כל שנייה שנייה.

ב. לא ייתכן שהמנורות שאיחרו להידלק והמנורות המוארות כל שנייה רביעית תהיינה דלוקות במשך אותה שנייה, כי הראשונות מוארות במשך השניות שמספרן אי זוגי, והאחרונות בשניות שמספרן זוגי.



שומרים על כושר

כדאי לשים לב כי אפשר לחשב את התוצאות בכל שורה על סמך התוצאות שבשורה שמעליה.

הביטוי \ המספרים להצבה	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{a}$	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$
$1+\frac{1}{a}$	4	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{3}$
$\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{4}$

חידה

התוצאה השווה צריכה להיות כפולה של 2, של 3, של 4 ושל 5.

ניתן להציב מספרים טבעיים בארבעת הביטויים, כך שמקבלים כתוצאה כל כפולה של 60.

למשל: כדי לקבל תוצאה 1500 $(25\cdot60)$ מציבים בביטויים הנתונים

$a = 750\ (25\cdot30)$ $b = 500\ (25\cdot20)$ $c = 375\ (25\cdot15)$ $d = 300\ (25\cdot12)$

כדי למצוא את התוצאה הקטנה ביותר שהיא מעל 1,000 עלינו למצוא את הכפולה הקטנה ביותר של 60 שהיא מעל מספר זה.

אחת הדרכים למציאת התוצאה המתאימה היא:

$1,000 : 60 = 16.66$. כלומר, כל כפולה של 60 במספר שלם הגדול מ 16 היא מעל 1000.

לכן 1020 $(= 60 \cdot 17)$ הוא הכפולה הקטנה ביותר של 60 שהיא מעל 1,000.

למסיימים

1. כמה משושים ברצף אפשר ליצור מ 156 נורות? הסבירו.

דרך א: נחסר את הנורה הראשונה. בלעדיה לכל משושה דרושות 5 נורות. $\frac{156-1}{5} = 31$

דרך ב: נחסר את 6 הנורות הדרושות למשושה הראשון. לכל משושה נוסף דרושות 5 נורות.

$\frac{156-6}{5} = 30$ למשושה הראשון נוספו 30 משושים, כלומר יש 31 משושים.

2. רצף של אילו צורות ניתן ליצור מ 25 נורות מבלי שישארו נורות עודפות?

תשובה: נחסר את הנורה הראשונה. בלעדיה יש 24 נורות.
המחלקים של 24 הם 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. ללא הנורה הראשונה, מספר הנורות הדרושות לכל מצולע הוא ב 1 פחות ממספר צלעותיו. אין מצולע בן 2 צלעות.
לכן אפשר לבנות רצף של 12 משולשים, 8 ריבועים, 6 מחומשים , 4 משובעים, 3 מתושעים, 2 מצולעים בעלי 13 צלעות ומצולע אחד בעל 25 צלעות בלי שישארו נורות עודפות.

3. הסבירו מדוע אי אפשר ליצור רצף של צורות מ 38 נורות (בלי שישארו נורות עודפות).

תשובה: בלי הנורה הראשונה יש 37 נורות. 37 הוא מספר ראשוני, ולכן אפשר לבנות רק מצולע אחד בעל 38 נורות ולא רצף של כמה מצולעים.

4. תנו דוגמאות נוספות למספרים של נורות שאפשר ליצור מהן רק מצולע אחד. נסו להכליל.

תשובה: לדוגמה: 20 נורות, 62 נורות.
בהכללה, מכל מספר נורות מהצורה $p + 1$ כאשר p מספר ראשוני.

לסיכום

- מתייחסים לשאלה 1. אוספים מן התלמידים ורושמים את הביטויים האלגברים השונים שהתקבלו.
מבררים ביחד אם הביטויים נכונים כלומר, מצדיקים את הדרך שבה התקבלו, מתוך הסיטואציה.
מצדיקים באופן מתמטי, כלומר מראים, על ידי הפעלת ההסכמים והחוקים של פעולות החשבון, כי הביטויים שהתקבלו שווים.

- מתייחסים לשאלה 2. מבררים באיזה אופן הגיעו התלמידים לביטויים שבשורה האחרונה ובעמודה האחרונה בטבלה.
לא כדאי להתעכב על הביטוי שבפינה הימנית התחתונה, אלא עם תלמידים חזקים במיוחד. זהו ביטוי המבטא השתנות בשני משתנים, והוא מתקבל מהכללה של ההכללות שבעמודה האחרונה, או של ההכללות שבשורה האחרונה.. בשני המקרים מתקבלים כמובן ביטויים אלגבריים שווים.

- מתייחסים לשאלות 3-12. מבררים עם התלמידים מהו המושג המתמטי שבבסיס הפעילות. מגיעים למסקנה שהפעילות עוסקת בכפולות משותפות של מספרים.
בודקים את הייצוגים שתלמידים השתמשו להצגת הנתונים בשאלה 8, ואת יעילותן בספוק מידע נוסף.