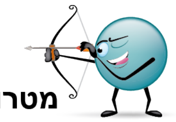
1.3 מספרים בדילוגים



מטרות

- זיהוי חוקיות בסיטואציה מתמטית
- העלאת השערות, ניסוחן ובדיקתן
- שימוש באלגברה ככלי להכללה והצדקה
- שימוש בכלים טכנולוגיים להכללה ולבדיקה

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (*Excel*)

פתיחה

רושמים על הלוח שלושה מספרים בדילוגים של 2, ומבקשים מן התלמידים תיאור מילולי של השלשה.

פתרונות והערות

במהלך הפעילות ימצאו התלמידים תכונות משותפות לסכומים של סדרות חשבוניות, ולמספר אמצעי שלהן. התשובות שנביא מהוות דוגמה בלבד. קרוב לודאי שתלמידים ינסחו את תשובותיהם אחרת. גיוון בתשובות התלמידים תורם ענין לשיעור ומעורר דיון. הפעילות מובילה מן הקל אל הכבד להכללה של הכללות.

שלב א (משימות 1-4)

משימה **1**: מכלילים תכונות של שלשות בדילוג מסוים (2).

משימה **2**: ממשיכים להכליל את התכונות לשלשות בדילוג אחר (5).

משימה **3**: מכלילים תכונות של שלשות בדילוג כלשהו (d) ומצדיקים אותן בדרך אלגברית.

משימה **4**: בודקים מתי ניתן להסתמך על ההצדקה.

שלב ב (משימות 5, 6, 8)

בדומה למהלך של שלב א, אבל באופן יותר מקוצר מכלילים, מצדיקים ומיישמים תכונות של סדרות נוספות בדילוגים שווים אשר מספר האיברים בהן אי זוגי.

שלב ג (משימות 7, 9)

בודקים נכונות ומצדיקים תכונות בסדרה כלשהי בדילוגים שווים, בת מספר אי-זוגי של מספרים.

1. א. למשל, הסכום מתחלק ב 3, הסכום הוא פי 3 מהמספר האמצעי.

ב. אפשר לייצג סידרה כזו ואת סכומה בעזרת המספר האמצעי כמשתנה כך: $(a - 2) + a + (a + 2) = 3a$
ניתן מיד לראות כי כאשר a שלם, הסכום מתחלק ב 3, והוא פי 3 מהאיבר האמצעי.

ג. דן צודק. אפשר לייצג את האיבר הראשון כ $2a$ (a שלם), הסכום במקרה זה הוא:

$$2a + (2a + 2) + (2a + 4) = 6a + 6$$

זהו סכום השווה ל $6(a + 1)$ והוא מתחלק ב 6.

2. התכונות העיקריות מתקיימות. ההוכחות דומות למקרה עם דילוג של 2.

3. א ג. $(a - d) + a + (a + d) = 3a$

לכן הסכום מתחלק ב 3

כמו כן נוכל להסיק כי הסכום הוא 3 פעמים המספר האמצעי.

$$\frac{(a-d)+a+(a+d)}{3} = \frac{3a}{3} = a$$

לכן הממוצע החשבוני הוא המספר האמצעי.

ד. $\frac{(a-d)+(a+d)}{2} = \frac{2a}{2} = a$

4. א. מספרים עוקבים הם סדרות בדילוג של 1. זהו מקרה פרטי של טענה שהוכחה עבור מקרה כללי, ולכן אפשר להסיק את אותן המסקנות לגבי מספרים אלה ללא צורך להוכיחן.

ב. הטענה במקרה הכללי הניחה שהמספרים שלמים. לכן אם רוצים לבדוק את נכונותה לגבי מספרים לא שלמים, יש לבדוק באילו מקרים היתה הסתמכות על הנחה זו.
כך למשל, אם המספרים אינם שלמים אין משמעות למושג "מתחלק ב ...", ולכן אין משמעות לטענה 3 א.
הטענות 3 ב ד נכונות למקרה של מספרים לא שלמים, כי המושגים הקשורים בהן תקפים גם למספרים לא שלמים.

5. הטענות וההוכחות דומות מאוד לטענות ולהוכחות עבור שלשות. כאשר לגבי חמישיות, הסכום הוא פי 5 מן המספר האמצעי, ולכן מתחלק ב 5.

6. א ב. למשל, 12 , 11 , 10 9 , 8   16 , 13 , 10 , 7 , 4

ג. 73 אינו מתחלק ב 5 לכן אי אפשר ליצור חמישיה כזו.
$2145 : 5 = 429$ לכן חמישיה מתאימה היא למשל 447 , 438 , **429** , 420 , 411

7. כל הטענות נכונות.

הוכחות על פי שיקולים

אם בסדרה יש n מספרים ו n אי זוגי, אז יש לסדרה מספר אמצעי. נסמן אותו ב a.

- כל זוג מספרים שנמצאים במרחק שווה משני צידי a, הם מהצורה a + d ו a – d. לכן בחיבור כל מספרי הסדרה, התוספות מאפסות את ההפחתות ומקבלים את a (המספר האמצעי) מוכפל במספר המחוברים n שבסדרה. לכן הסכום המתקבל הוא $n \cdot a$

  כלומר, הסכום שווה למכפלת המספר האמצעי במספר האיברים.
- ממוצע חשבוני של מספרים מחשבים על ידי חלוקת הסכום במספר האיברים, ולכן הממוצע הזה הוא a ($= \frac{a \cdot n}{n}$).
- כמו כל זוג מספרים שנמצאים במרחק שווה משני צידי a, גם המספר הראשון והאחרון הם מהצורה $a + d$ ו $a - d$

  הממוצע החשבוני של המספר הראשון והאחרון הוא a ($= \frac{(a-d)+(a+d)}{2}$)
- הטענה הזו היא שילוב של הטענות הראשונה והשלישית.

הוכחה בדרך אלגברית

בשלב זה של לימודי האלגברה, הוכחות כאלה מתאימות רק לתלמידים חזקים במיוחד.

את הטענות הראשונה והשנייה אפשר להוכיח על ידי מציאת הסכום.

מספר איברים אי זוגי ניתן לייצג על ידי $2n + 1$ איברים.

$$\underbrace{(a-nd)\ldots(a-2d)+(a-d)}_{\text{מספרים } n} + a + \underbrace{(a+d)+(a+2d)\ldots(a+nd)}_{\text{מספרים } n} = (2n+1)\cdot a$$

- הסכום הוא מכפלת המספר האמצעי במספר האיברים.
- הממוצע החשבוני הוא חלוקת הסכום במספר האיברים, ולכן הממוצע החשבוני הוא a ($= \frac{(2n+1)\cdot a}{2n+1}$).
- את הטענות השלישית אפשר להוכיח על ידי מציאת הממוצע החשבוני בין המספר הראשון והאחרון.

$$\frac{(a-nd)+(a+nd)}{2} = a$$

- הטענה הרביעית היא שילוב של הטענות הראשונה והשלישית.

8. פתרון מספרי

אם רושמים את מספר אבני הלגו בכל שורה לפי סדר מהשורה העליונה לתחתונה, נוצרת סדרה בדילוגים שווים.

המספר הראשון הוא 5 והאחרון 29.

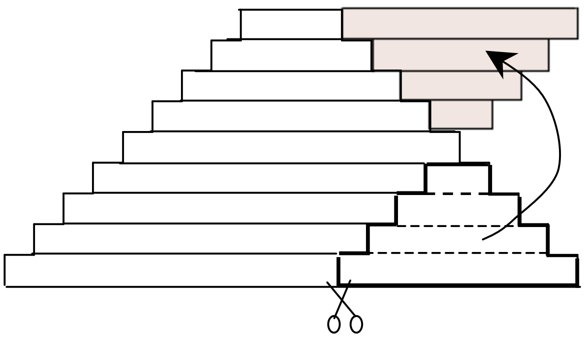
לפי הטענה השלישית של יוני, **המספר האמצעי הוא ממוצע חשבוני של המספר הראשון והאחרון**.

לכן המספר האמצעי הוא 17 ($= \frac{5+29}{2}$).

לפי הטענה הראשונה של יוני **סכום כל המספרים שווה למכפלת המספר האמצעי במספר המספרים.** מספר המספרים הוא מספר הקומות.

לכן סכום כל המספרים הוא **153** ($= 17 \cdot 9$)

פתרון גיאומטרי



אפשר לראות את הטענות של יוני גם במבנה הגיאומטרי.
בהנחה שכל אבני הלגו שווים, אם גוזרים חלק מהפירמידה למטה, ומצמידים אותו למעלה, רואים כי בכל הקומות יש אותו מספר של אבני לגו, והוא שווה למספר האבנים של השורה האמצעית.

כלומר, מספר אבני הלגו בשורה האמצעית, הוא ממוצע חשבוני של מספרי אבני הלגו בכל השורות וגם ממוצע חשבוני של המספרים של השורה הראשונה והאחרונה.

בשפת המגדל: מספר אבני הלגו = מספר הקומות X מספר האבנים בשורה האמצעית

בשפת סדרות: סכום המספרים = מספר המספרים X המספר האמצעי

9. א דוגמה אפשרית

	A	B
1	**סדרה בדילוגים שווים**	**סכומי השלשות**
2	**1**	
3	**4**	
4	**7**	**=A2+A3+A4**

אחרי גרירת הנוסחה כלפי מטה והדגשת התכונות נקבל:

	A	B
1	**סדרה בדילוגים שווים**	**סכומי השלשות**
2	**1**	
3	**4**	
4	**7**	**12**
5	**10**	**21**
6	**13**	**30**
7	**16**	**39**
8	**19**	**48**

ב. כל הסכומים הם כפולות של 3, כי הסכום הוא מכפלת המספר האמצעי במספר האיברים.

ג. כל מספר בעמודה הימנית של הטבלה הוא סכום של שלושה מספרים בעמודה השמאלית   המספר בשורת הסכום והשניים שמעליו. למשל, 12 = 7 + 4 + 1 , וכן 30 = 13 + 10 + 7
אפשר לראות כי 12 הוא פי 3 מ 4 , ו 30 הוא פי 3 מ 10.

אפשר לראות כי המספר האמצעי הוא ממוצע חשבוני של המספר הראשון והאחרון בסדרה: הממוצע החשבוני של 1 ו 7 הוא 4 והממוצע החשבוני של 7 ו 13 הוא 10.

ד. דוגמה אפשרית

	A	B
1	סדרה בדילוגים שווים	סכומי החמישיות
2	2	
3	4	
4	6	
5	8	
6	10	30
7	12	40
8	14	50
9	16	60

ה. תשובות דומות לתשובות בסעיף ג.

10. במהלך הפעילות התלמידים עסקו רק בסדרות בעלות מספר אי זוגי של איברים. במשימה זו, כדאי לאתגר אותם למצוא גם דוגמאות של סכומים של סדרות בעלות מספר **זוגי** של איברים. אפשר להתייחס לממוצע החשבוני של איברי סדרה כזו כאל "המספר האמצעי" למרות שאיננו מספר בסדרה, כי מקומו על ציר המספרים הוא אמצע המספרים.

מכיוון שמספר האיברים הוא גורם של הסכום, נברר תחילה מיהם הגורמים של 60.

גורמים אי זוגיים: 3, 5, 15. כלומר עשויות להיות שלשות, חמישיות וסדרות בנות 15 מספרים שסכומן 60.

גורמים זוגיים: 2, 4, 6, 10, 12, 20, 30. כלומר כדאי לחפש סדרות בעלות מספר כזה של איברים.

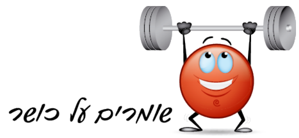
בחינת המקרים מראה כי מ 10 איברים ומעלה אין סדרות של מספרים טבעיים.

סכומים של מספר אי זוגי של מספרים	סכומים של מספר זוגי של מספרים
שלשות: המספר האמצעי 20 (= 3 : 60) 60 = 19 + 20 + 21 60 = 18 + 20 + 22 . . . 60 = 1 + 20 + 39	**זוגות**: "המספר האמצעי" 30 (= 2 : 60) 60 = 29 + 31 60 = 28 + 32 . . . 60 = 1 + 59 **הערה**: הוספנו כאן את הזוגות למרות שמספר האיברים של סדרה בדילוגים שווים הוא לפחות 3.
סך הכל 19 שלשות	סך הכל 29 זוגות
חמישיות: המספר האמצעי 12 (= 5 : 60) 60 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 60 = 8 + 10 + 12 + 14 + 16 60 = 6 + 9 + 12 + 15 + 18 60 = 4 + 8 + 12 + 16 + 20 60 = 2 + 7 + 12 + 17 + 22	**רביעיות**: "המספר האמצעי" 15 (= 4 : 60) 60 = 12 + 14 + 16 + 18 60 = 9 + 13 + 17 + 21 60 = 6 + 12 + 18 + 24 60 = 3 + 11 + 19 + 27
סך הכל 5 חמישיות	סך הכל 4 רביעיות
15 איברים: המספר האמצעי 4 (= 15 : 60) אין	**שישיות**: "המספר האמצעי" 10 (= 6 : 60) 60 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15
הסדרה אינה יכולה להיות של מספרים טבעיים	סך הכל שישיה אחת

בסך הכל מספר הסדרות (כולל הזוגות)הוא 58

אם כוללים את 0 כמספר בסדרה, נוספות עוד חמש סדרות, אחת מכל סוג. בסך הכל 63 סדרות.

אם כוללים את המספרים השליליים, מספר הסדרות הוא אינסופי.



i. כל השלשות הם ביטויים בדילוגים שווים.

ii. א. $6a + 12$ ב. $15d$ ג. $9b – 18$

ד. $12 + 9x$ ה. $9 – 12c$ ו. $6m + 30$

כל הסכומים מתחלקים ב 3. כל הסכומים הם מכפלת האיבר האמצעי ב 3.

iii. א. $2a + 4$ ב. $5d$ ג. $3b – 6$

ד. $4 + 3x$ ה. $3 – 4c$ ו. $2m + 10$

כל הממוצעים החשבוניים שווים לאיבר האמצעי.

דרך א

אפשר לראות כי המספר האחרון בכל שורה מתאר את מספר התלמידים עד אליו, כלומר יש למצוא את המספר האחרון בסדרה:

1   4   9   16 …

שיש בה 21 מספרים. אפשר לזהות שאלו המספרים הריבועיים (אמנם לא הצדקנו את ההכללה הזאת, וראוי לומר זאת לתלמידים המשתמשים בה, אבל אפשר לומר להם גם שהיא נכונה ולאפשר להם להשתמש בה). המספר האחרון בסדרה הוא: $21^2 = 441$. מספר זה מראה גם את מספר הילדים בבית הספר.

דרך ב

כדי למצוא את מספר התלמידים בבית הספר יש לדעת את מספר האיברים בפירמידה. אפשר לזהות כי בכל שורה יש שני איברים יותר מן הקודמת לה. אם נסכם את מספר האיברים בכל השורות נקבל כי סך הכל מספר האיברים בסדרה הוא: $1 + 3 + 5 + 7 + … + 41$

זוהי סדרה בדילוגים של 2 שיש בה 21 מחוברים כמספר השורות (כל מחובר בסכום, מתאר את מספר האיברים בשורה אחת).

סכום איברי הסדרה הוא מספר האיברים x המספר האמצעי. המספר האמצעי הוא האיבר ה 11 בסדרה, כי לפניו וגם לאחריו יש 10 מספרים. אפשר למצוא על ידי דילוגים או בדרך אחרת שהמחובר האמצעי בסכום הוא 21. גם מספר האיברים הוא 21. לכן מספר התלמידים בבית הספר הוא 441 ($=21^2$)

למסיימים

א. בדקו סכומים שונים של **רביעיות** מספרים בדילוגים שווים. תוכלו לעשות זאת בעזרת *Excel*.

דוגמה אפשרית

	A	B
1	**סדרה בדילוגים שווים**	**סכומי הרביעיות**
2	**1**	
3	**3**	
4	**5**	
5	**7**	**16**
6	**9**	**24**
7	**11**	**32**
8	**13**	**40**
9	**15**	**48**

שימו לב כי "המספר האמצעי" לא נמצא בסדרה והוא נמצא באמצע המרחק בין שני האיברים האמצעיים בסדרה.

למשל "המספר האמצעי" בסדרה 7 5 3 1 הוא 4, ובסדרה 15 13 11 9 הוא 12.

4 **12**

ב. נסו לנסח השערות לגבי התכונות של סכומים אלו בכל **רביעיית** מספרים כזו.

אם הצלחתם, נסו להוכיח את ההשערות שלכם.

תשובה: בסדרה בת מספר איברים זוגי, האיבר האמצעי הוא מספר שאינו קיים. נכנה בשם "המספר האמצעי" את המספר הנמצא באמצע המרחק בין שני האיברים האמצעיים. אפשר לראות כי כל התכונות הקיימות לגבי המספר האמצעי בסדרה בעלת מספר אי זוגי של איברים, מתקיימות גם לגבי "המספר האמצעי " הזה.

למשל, בדוגמה השנייה שבסעיף א:

48 הוא 4 פעמים 12, 12 הוא הממוצע החשבוני של ארבע האיברים וכן הממוצע החשבוני של האיבר הראשון והאחרון

(9 ו 15).

הוכחת התכונות (רק לתלמידים מתקדמים מאוד):

נניח שהאיברים האמצעיים הם a ו b. הדילוג יהיה b – a, כי הדילוג הוא ההפרש בין כל שני איברים סמוכים בסדרה.

סכום הסדרה יהיה: $= [a - (b - a)] + a + b + [b + (b - a)]$

$(a + b) + (a + b) =$

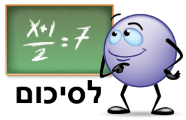
$(a + b) \cdot 2 =$

$\frac{a+b}{2} \cdot 4$

אם נכנה את $\frac{a+b}{2}$ "האיבר האמצעי", אז סכום הסדרה יהיה המכפלה של "האיבר האמצעי" במספר האיברים.

ג. בכל רביעיות המספרים שבדקתם, מצאו את הממוצע החשבוני בין שני המספרים האמצעיים, ואת הממוצע החשבוני בין שני המספרים הקיצוניים. מצאו קשר בין סכום הרביעייה לממוצעים החשבוניים שמצאתם.

תשובה: אפשר לראות בסעיף ב כי סכום האיברים האמצעיים שווה לסכום האיברים הקיצוניים.



לסיכום

- גם אם התלמידים לא עבדו במחשב, המורה שיש לו אפשרות כזו, יכול להדגים להם את התכונות במחשב.
- בודקים ביחד את משימה 10 שהיא משימה המסכמת חלק גדול מן הפעילות. מבררים באיזה אופן התלמידים עבדו כדי למצות את כל האפשרויות.
- אם נשאר זמן, דנים בשאלה 4 שמטרתה לחדד את ההבנה, שאחרי שהוכחנו טענה באופן כללי אפשר להסתמך עליה לגבי מקרים פרטיים המקיימים את הנחות הטענה, ואין צורך להוכיח שוב כל מקרה. הבנה זו של מטרת ההוכחה, לא תמיד קיימת אצל התלמידים.