

2.4 לוח של מספרים



מטרות

- זיהוי חוקיות בסיטואציה מתמטית
- שימוש באלגברה ככלי להצדקה
- שימוש בכלים טכנולוגיים לבדיקה



אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (למשל, Excel)



פתיחה

מבקשים מן התלמידים להשלים את המספרים החסרים ולהסביר את הדרך שבה הם פעלו.

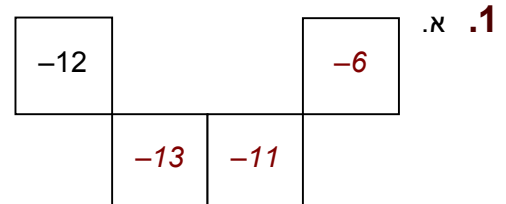
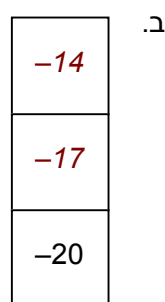
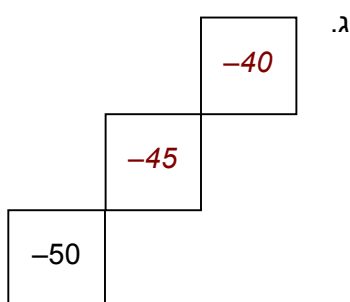


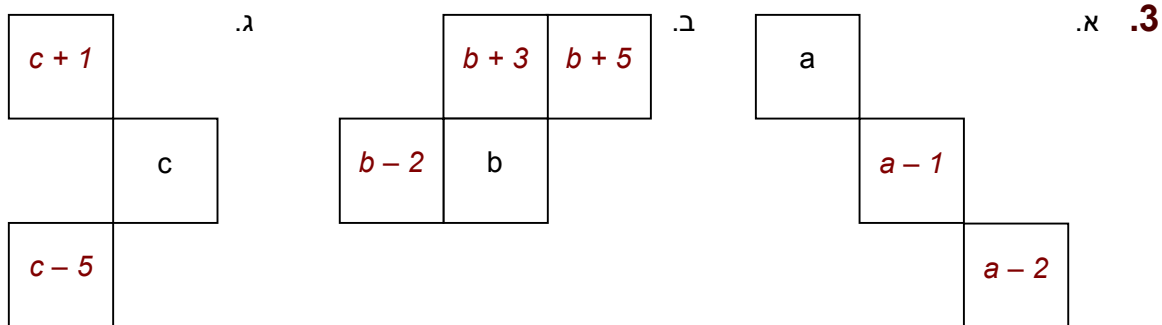
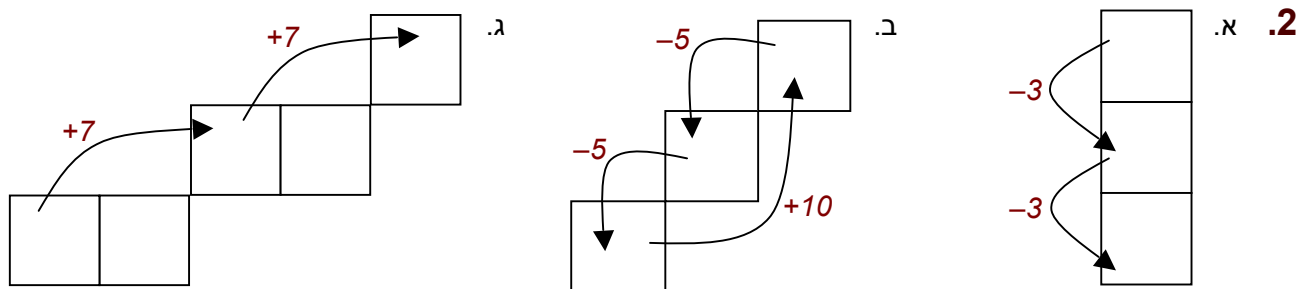
פתרונות
והערות

הפעילות עוסקת בשילוב של חוקיות עם מספרים שליליים.

לוח המספרים מורכב מסדרות בדילוגים שווים המוצגות בכיוונים אנכיים, אופקיים ובמלכסן. את התשובות ניתן לקבל

על סמך התבוננות משולבת בעמודות שבהן הדילוגים הם של -3 , בשורות שבהן הדילוגים הם של 2 , ובכיוונים ↙ ↘ שבהם הדילוגים הם של -1 ושל -5 בהתאמה. נדרשות השלמות הן של מספרים והן של פעולות חשבון. כמו כן, מועלות השערות ונטענות טענות שונות לגבי המספרים שבלוח. ההצדקות נעשות על ידי שימוש בביטויים אלגבריים.





| | | |
|--------|---------|---------|
| | עמודה 3 | עמודה 4 |
| שורה 5 | -7 | -5 |
| שורה 6 | -10 | -8 |

4. א. סכום המספרים בשני האלכסונים שווה. בדוגמה הסכום הוא -15.

ב. בכל ריבוע בעל ארבע משבצות בלוח, סכום המספרים בשני האלכסונים שווה.

הוכחה בעזרת שיקולים

נברר מה הקשר בין המחוברים בסכום בכיוון ↘ למחוברים בסכום בכיוון ↙.

| | |
|---|---|
| a | c |
| d | b |

c מתקבל על ידי תוספת של דילוג אופקי מ a.

d מתקבל על ידי הפחתת אותו דילוג אופקי מ b. לכן $a + b = c + d$.

הוכחה אלגברית

נייצג את המספר באחת המשבצות באמצעות המשתנה a, ונשלים ביטויים

מתאימים בשאר המשבצות.

$$a + (a - 1) = (a + 2) + (a - 3) = 2a - 1$$

| | |
|-------|-------|
| a | a + 2 |
| a - 3 | a - 1 |

5. א. למשל, המספר 3 נמצא בשורה 1 עמודה 2 וגם בשורה 3 עמודה 5.

ב. למשל, המספר -6 נמצא בשורה 4 עמודה 2 וגם בשורה 6 עמודה 5.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|--|---|---|--|---|---|--|---|--|--|---|--|
| a | | | | | | | | c | | | | |
| | | | | | | e | | | | | | |
| | | | a | | | | | | | | c | |
| | | | | | | | | e | | | | |
| | | b | | | | a | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | e | |
| | | | | | b | | | a | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| d | | | | | | | | b | | | a | |
| | | | | | | | | | | | | |

כל שני מספרים שווים סמוכים נמצאים בקצוות של האלכסון שבכיוון \rightarrow במלבן 4×3 . כדי להגיע מן הקצה העליון אל הקצה התחתון באלכסון זה, יש לדלג 3 משבצות ימינה בשורה ושתי משבצות למטה בעמודה.

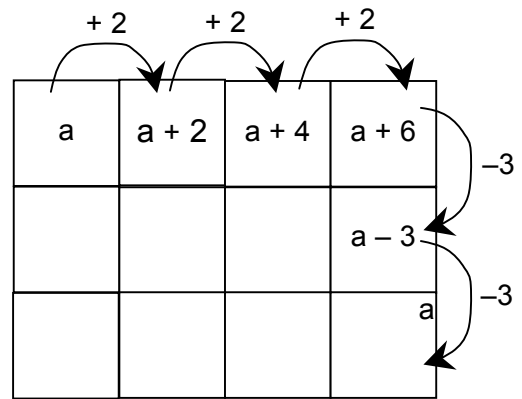
הוכחה בעזרת שיקולים וחישוב

הסדרות בשורה הם בדילוגים של 2

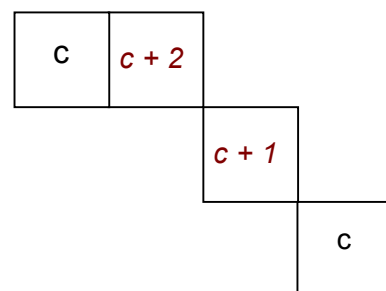
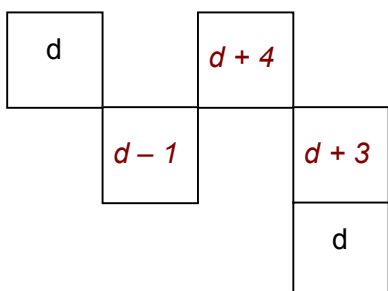
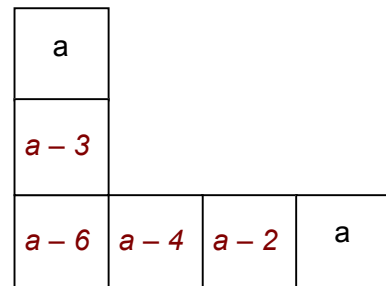
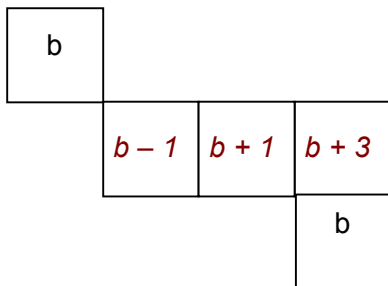
הסדרות בעמודה הם בדילוגים של -3

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$$

הוכחה בעזרת ביטויים אלגבריים



ד. כל המגזרות שבסעיף זה הן חלק מאותו מלבן של 4×3 משבצות.



| | | | | | | | | | |
|---|--|--|---|--|--|---|--|--|---|
| 0 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | 0 | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | 0 | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 0 |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

7. א. בשורה הראשונה, למספר 1 הנמצא במשבצת הראשונה משמאל, נוסף 20 דילוגים של 2 ימינה. נקבל במשבצת ה 21: $41 = (1 + 20 \cdot 2)$
- ב. בעמודה הראשונה, למספר 1 הנמצא במשבצת הראשונה מלמעלה, נדלג 20 דילוגים של 3- כלפי מטה. נקבל במשבצת ה 21: $-59 = (1 + 20 \cdot (-3))$
- ג. לא. בעמודה החמישית יש רק שלושה מספרים חיוביים, והמספרים הולכים וקטנים.
- ד. כן. בשורה החמישית מופיעים מספרים אי זוגיים הולכים וגדלים מ 11- והלאה.
- ה. לא. בשורה השישית יופיעו רק מספרים זוגיים.

8. א.

| | |
|----|----|
| 17 | |
| | 16 |

- ב. 17 נמצא בשורה עם מספרים אי זוגיים. הסדרות של מספרים אי זוגיים (בדילוג של 2) נמצאות בשורות שמספרן אי זוגי. המספר הראשון בסדרה קטן מ 2. לכן 17 יופיע בכל השורות האי זוגיות. למשל, בשורה החמישית המתחילה ב 11-. כדי להגיע מ 11- ל 17 יש לדלג מרחק של 28 ב 14 דילוגים של 2. לכן 17 נמצא בשורה החמישית בעמודה ה 15.



9. ממלאים שורה על ידי גרירת שני המספרים הראשונים ימינה. ממלאים שורה נוספת באותה דרך. מסמנים את שתי השורות וגוררים למטה. קיימת אפשרות לבנות תחילה את שתי העמודות הראשונות על ידי גרירה אנכית, ולאחר מכן להשלים את הלוח על ידי גרירה אופקית של העמודות האלו.



תלמידים בעלי טביעת עין יגלו מהר כי אין להם צורך להציב את המספרים בביטוי, וכי הם יכולים למלא את הלוח על פי דילוגים שווים: ב"צעידה" ימינה כל מספר קטן ב $\frac{1}{4}$ לעומת קודמו. ב"צעידה" כלפי מטה כל מספר גדל ב $\frac{1}{2}$ לעומת קודמו.

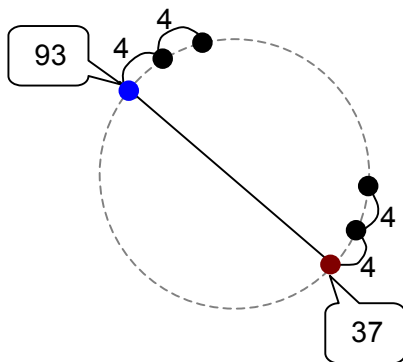
הסבר לחוקיות: "צעידה" לאורך שורה פרושה השארת a קבוע. כש"צועדים" למשבצת הבאה בשורה מגדילים את b ב 1, כלומר מקטינים את התוצאה ב $\frac{1}{4}$. דבר דומה קורה כש"צועדים" לאורך עמודה. b נשאר קבוע, והגדלת a ב 1 גורם להגדלת התוצאה ב $\frac{1}{2}$.

b

| $\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------------------------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| -3 | $-\frac{3}{4}$ | -1 | $-1\frac{1}{4}$ | $-1\frac{1}{2}$ | $-1\frac{3}{4}$ | -2 | $-2\frac{1}{4}$ |
| -2 | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ | -1 | $-1\frac{1}{4}$ | $-1\frac{1}{2}$ | $-1\frac{3}{4}$ |
| -1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ | -1 | $-1\frac{1}{4}$ |
| 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ |
| 1 | $1\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ |
| 2 | $1\frac{3}{4}$ | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 3 | $2\frac{1}{4}$ | 2 | $1\frac{3}{4}$ | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ |

a

אפשר למלא טבלה כזו בגיליון Excel על ידי שימוש בנוסחה המכילה סימני \$.
 אם רושמים \$ לפני שם של תא (למשל \$A2) המשתנה נשאר קבוע בגרירה לאורך שורה (תמיד A2), ומשתנה רק בגרירה לאורך עמודה (A3, A4, A5...)
 אם רושמים \$ בין האות למספר בשם התא (למשל B\$2) המשתנה נשאר קבוע בגרירה לאורך עמודה (תמיד B1), ומשתנה רק בגרירה לאורך שורה (B2, C2, D2...)
 אפשר, אם כן, אחרי שממלאים את המספרים להצבה בשורה ראשונה ובעמודה ראשונה, לרשום בתא B2 את הנוסחה $=\frac{1}{2} * \$A2 + \frac{1}{4} * B\1 , לגרור לאורך העמודה, ולגרור את כל העמודה לאורך השורות, והטבלה תתמלא.



קו המחבר שני התלמידים שעומדים זה מול זה חוצה את המעגל.
 התלמידים סופרים בדילוגים של 4.
 המרחק מ 37 ועד 93 הוא 56 ($93 - 37 =$).
 כלומר מספר הדילוגים בחצי מעגל הוא 14 ($56 : 4 =$)
 ומספר התלמידים שבחצי מעגל, חוץ משני התלמידים שעל הקוטר,
 קטן ב 1 ממספר הדילוגים.
 תוכלו לראות זאת בתמונה שלהלן.

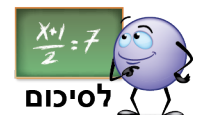


לכן המספר הכולל של התלמידים הוא 28 ($13 + 13 + 2 =$)



מרחיבים את הלוח שבמשימת הפתיחה ימינה בלבד.
 א. מצאו את כל המקומות (שורה/עמודה) שבהם מופיע המספר 20.
 ב. הסבירו כיצד מצאתם.

תשובה: שורה 2 / עמודה 12, שורה 4 / עמודה 15, שורה 6 / עמודה 18.
 20 הוא מספר זוגי לכן נמצא בכל השורות שמספרן זוגי.
 שורה 2 מתחילה ב -2. כדי להגיע מ 2 ל 20 יש לעבור מרחק של 22 ($20 - (-2) =$) ב 11 דילוגים של 2.
 לכן 20 נמצא בשורה השנייה בעמודה ה 12.
 את שאר המקומות שבהם נמצא 20 אפשר למצוא בדרך דומה, או להסתמך על משימה 5 המתייחסת למציאת מספרים שווים בלוח (דילוג של שתי משבצות למטה ושלוש משבצות ימינה).



בדיון המסכם כדאי להעלות את הנקודות הבאות.

- הקשר בין הדילוג בכיוון מסוים לבין הדילוג בכיוון הנגדי
- הקשר בין דילוג ממספר נתון למספר יעד לבין דילוגים לכיוונים שונים המרכיבים את הדילוג הזה.
- קשרים בין מספר מוצא, מספר יעד, גודל הדילוג ומספר הדילוגים. לא רצוי להתייחס לנוסחאות של סדרה חשבונית, אלא לעבוד על פי שיקולים.