

3.5 דמי כיס



- ביסוס וישום תרגום למשוואה או לביטוי אלגברי
- פתרון משוואות על פי שיקולים
- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית
- זיהוי חוקיות בסיטואציה מתמטית
- אוריינות במספרים
- קישור בין ייצוגים שונים מילולי, מספרי, ואלגברי
- שימוש בכלים טכנולוגיים לחקירה ולבדיקה



גיליון אלקטרוני (Excel)



קוראים ביחד את הנתונים שבראשית הפעילות, ומבקשים מהתלמידים השערה ללא חישובים. אחר כך עונים ביחד על שאלה 1, ומגלים שכל הבנות קיבלו סכום שווה.



הפעילות עוסקת בסכומים המחולקים לחלקים לפי חוקיות מסוימת. אפשר לתרגם את החוקיות לביטויים אלגבריים ולהשתמש בהם על מנת לענות לשאלות, על ידי הצבה, או באמצעות פתרון משוואה. החישובים כוללים שברים המייצגים חלקים מן הסכום הכולל. לעיתים נוצרים מצבים בלתי אפשריים כאשר סכום החלקים עולה על הסכום כולו. בחלק מהמשימות בפעילות זו ההדרכה מתייחסת לאי שוויון. אם התלמידים טרם למדו את הנושא אפשר לתת להם לנסות לפתור אותו בדרך של שיקולים, לפתור את המשימה ללא שימוש באי שוויון כמוצע בהדרכה, או לחילופין לדלג על משימה זו. ניתן להעיר כי פישוט כל אגף של אי שוויון בנפרד נותן אי שוויון שקול, אבל פעולות על אגפים היא לעיתים בעייתית.

$$1. \quad 1 + \frac{1}{6} \cdot 24 = 5 \quad 2 + \frac{1}{6} \cdot 18 = 5 \quad 3 + \frac{1}{6} \cdot 12 = 5 \quad 4 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 5 \quad 5 + \frac{1}{6} \cdot 0 = 5$$

2. א.

הסכום לתרומה (ש"ח)	דמי הכיס של יעל (ש"ח)	דמי הכיס של רונית (ש"ח)	הסכום המיועד לדמי כיס ולתרומה (ש"ח)
2	16	18	36
3.5	19	22.5	45
מקרה בלתי אפשרי	10	9	18
1	14	15	30
$\frac{1}{6}x - 4$	$\frac{1}{3}x + 4$	$\frac{1}{2}x$	x

ב. x מייצג את הסכום כולו.

$$\frac{1}{3}x + 4 = 15$$

$$x = 33$$

הסכום כולו הוא 33 ש"ח. דמי הכיס של רונית הם 16.5 ש"ח. נשאר לתרומה 1.50 ש"ח ($33 - 16.5 - 15 =$).

ג. x מייצג את הסכום כולו.

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}x + 4$$

$$x = 24$$

מר כהן חילק לכל אחת מבנותיו 12 ש"ח, ולתרומה לא נשאר. אם רונית מקבלת חצי מהסכום ויעל מקבלת סכום שווה לה אז שתיהן ביחד מקבלות את הסכום כולו. לכן לא נשאר לתרומה.

ד. x מייצג את הסכום כולו.

$$x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 4\right) = 4$$

$$\frac{1}{6}x - 4 = 4$$

$$x = 48$$

הסכום כולו 48 ש"ח. רונית קיבלה מחצית ממנו, כלומר 24 ש"ח ויעל קיבלה 20 ש"ח. ואכן נשאר לתרומה 4 ש"ח ($48 - 24 - 20 =$).

ה. לא ייתכן מצב בו דמי הכיס של יעל יהיו גדולים מדמי הכיס של רונית.

אם נייצג ב x את הסכום הכולל ונרשום אי שוויון מתאים, נקבל:

$$\frac{1}{2}x < \frac{1}{3}x + 4$$

$$x < 24$$

אם נבדוק מספרים ספציפיים המתאימים לפתרון האי שוויון נגלה שאלה מקרים בלתי אפשריים, כי דמי הכיס של שתי הבנות יחד עולים על הסכום כולו. ההסבר לכך הוא: רונית מקבלת חצי מהסכום. ויעל מקבלת יותר ממנה, ולכן היא מקבלת יותר מחצי הסכום, וביחד הן מקבלות יותר מהסכום הכולל.

	A	B	C	D
1	הסכום המיועד לדמי כיס ולתרומה (ש"ח)	דמי הכיס של רונת (ש"ח)	דמי הכיס של יעל (ש"ח)	הסכום לתרומה (ש"ח)
2	1	$= (1/2) * A^2$	$= (1/3) * A^2 + 4$	$= A^2 - (B^2 + C^2)$

לאחר גרירת הנוסחאות כלפי מטה, נקבל:

	A	B	C	D
1	הסכום המיועד לדמי כיס ולתרומה (ש"ח)	דמי הכיס של רונת (ש"ח)	דמי הכיס של יעל (ש"ח)	הסכום לתרומה (ש"ח)
2	1	0.50	4.33	-3.83
3	2	1.00	4.67	-3.67
4	3	1.50	5.00	-3.50
5	4	2.00	5.33	-3.33
6	5	2.50	5.67	-3.17
7	6	3.00	6.00	-3.00
8	7	3.50	6.33	-2.83
9	8	4.00	6.67	-2.67
10	9	4.50	7.00	-2.50
11	10	5.00	7.33	-2.33
12	11	5.50	7.67	-2.17
13	12	6.00	8.00	-2.00
14	13	6.50	8.33	-1.83
15	14	7.00	8.67	-1.67
16	15	7.50	9.00	-1.50
17	16	8.00	9.33	-1.33
18	17	8.50	9.67	-1.17
19	18	9.00	10.00	-1.00
20	19	9.50	10.33	-0.83
21	20	10.00	10.67	-0.67
22	21	10.50	11.00	-0.50
23	22	11.00	11.33	-0.33
24	23	11.50	11.67	-0.17
25	24	12.00	12.00	0.00
26	25	12.50	12.33	0.17
27	26	13.00	12.67	0.33
28	27	13.50	13.00	0.50
29	28	14.00	13.33	0.67
30	29	14.50	13.67	0.83
31	30	15.00	14.00	1.00
32	31	15.50	14.33	1.17
33	32	16.00	14.67	1.33
34	33	16.50	15.00	1.50
35	34	17.00	15.33	1.67
36	35	17.50	15.67	1.83
37	36	18.00	16.00	2.00
38	37	18.50	16.33	2.17
39	38	19.00	16.67	2.33
40	39	19.50	17.00	2.50
41	40	20.00	17.33	2.67
42	41	20.50	17.67	2.83
43	42	21.00	18.00	3.00
44	43	21.50	18.33	3.17
45	44	22.00	18.67	3.33
46	45	22.50	19.00	3.50
47	46	23.00	19.33	3.67
48	47	23.50	19.67	3.83
49	48	24.00	20.00	4.00
50	49	24.50	20.33	4.17
51	50	25.00	20.67	4.33

ד. אפשר לראות בטבלה כי בכל פעם שהסכום כולו גדול מ 24 ש"ח ועולה ב 6 שקלים, הסכום לתרומה גדל

בשקל אחד.

ה. א מייצג את הסכום המיועד לדמי כיס.

הסכום לאחר התוספת (ש"ח)	הסכום המקורי (ש"ח)	
$x + 6$	x	סכום כולל
$\frac{1}{2}(x + 6) =$ $\frac{1}{2}x + 3$	$\frac{1}{2}x$	דמי כיס של רונית
$\frac{1}{3}(x + 6) + 4 =$ $\frac{1}{3}x + 6$	$\frac{1}{3}x + 4$	דמי כיס של יעל
$(x + 6) - (\frac{1}{2}x + 3) - (\frac{1}{3}x + 6) = \frac{1}{6}x - 3$	$\frac{1}{6}x - 4$	סכום לתרומה

את הסכום שיישאר לתרומה לאחר התוספת אפשר למצוא גם על ידי הצבת $x + 6$ במקום x בביטוי $\frac{1}{6}x - 4$:

$$\frac{1}{6}(x + 6) - 4 = \frac{1}{6}x + 1 - 4 = \frac{1}{6}x - 3$$

ואכן הסכום שנשאר לתרומה עלה ב 1 ש"ח.

4. א. דרך I ניסוי וטעיה

נניח שהסכום הכולל הוא 24 ש"ח. המספר נבחר כי שליש וגם רבע ממנו הם מספרים שלמים. במקרה זה דנה קיבלה 8 ש"ח ורועי קיבל 11 ש"ח. רועי קיבל יותר מדנה. ביחד הם קיבלו 19 ש"ח ונשאר לתרומה 5 ש"ח.

דרך II שימוש בביטויים אלגבריים

בדרך זו אפשר למצוא את כל האפשרויות המתאימות

x מייצג את הסכום כולו.

$\frac{1}{3}x$ מייצג את הסכום שדנה קיבלה.

$\frac{1}{4}x + 5$ מייצג את הסכום שרועי קיבל.

$x - (\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 5) =$
מייצג את הסכום שנותר לתרומה
 $\frac{5}{12}x - 5$

כדי למצוא את כל האפשרויות צריך להתקיים:

א. דמי הכיס של רועי יהיו גדולים מדמי הכיס של דנה
ב. התרומה לא תהיה מספר שלילי

$$\frac{5}{12}x - 5 \geq 0$$

$$\frac{5}{12}x \geq 5$$

$$5x \geq 60$$

$$x \geq 12$$

$$\frac{1}{3}x < \frac{1}{4}x + 5$$

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x < 5$$

$$\frac{1}{12}x < 5$$

$$x < 60$$

כלומר, כדי שרועי יקבל יותר מדנה, הסכום כולו צריך להיות בין 12 (כולל 12) ל 60 (לא כולל 60)

ב. נפתור בדרך אלגברית.

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{4}x + 5$$

$$\frac{1}{12}x = 5$$

$$x = 60$$

כלומר, במקרה זה הסכום הכולל יהיה 60 שקלים, וכל אחד משלושת מרכיביו יהיה 20 שקלים. דנה מקבלת שליש מהסכום, ורועי מקבל כמוה שליש מהסכום, לכן לתרומה נשאר גם כן שליש מהסכום.

ג. לתרומה נשארו 6 ש"ח. כפי שראינו בסעיף א, הביטוי האלגברי עבור התרומה הוא $5 - \frac{5}{12}x$.

$$\frac{5}{12}x - 5 = 6$$

$$\frac{5}{12}x = 11$$

$$5x = 132$$

$$x = 26.4$$

הסכום הכולל הוא 26.40. דמי הכיס של דנה הוא 8.80 ש"ח, ודמי הכיס של רועי 6.60 ש"ח.

ד. עידו צודק. אפשר ליצור טבלת Excel ולראות שזה אכן קורה.

הוכחה אלגברית: אם הסכום הכולל הוא כפולה של 12, אפשר לרשום במקומו $12a$ כאשר a מספר טבעי הביטוי האלגברי לתרומה הוא:

$$\frac{5}{12} \cdot 12a - 5 = 5a - 5$$

לכן הסכום המיועד לתרומה הוא מספר שלם.

חשוב שהתלמידים יבינו את ההבדל בין אישור התכונה על סמך דוגמאות בגיליון האלקטרוני לבין אישורה הכללי בדרך אלגברית.

5. לדוגמה:

סכום לתרומה (ש"ח)	דמי כיס של אלעד (ש"ח)	דמי כיס של גאיה(ש"ח)	דמי כיס של שיר (ש"ח)	סכום כולל (ש"ח)
בלתי אפשרי	10	9	8	24
0	12	12	12	36
6	16	18	20	60
3	14	15	16	48
$\frac{1}{4}x - 9$	$\frac{1}{6}x + 6$	$\frac{1}{4}x + 3$	$\frac{1}{3}x$	x

אפשר למצוא את המקרים בהם הסכום המיועד לתרומה אינו שלילי. דבר זה קורה עבור סכומים כוללים של 36 שקלים ומעלה. כל סכום קטן מזה אינו אפשרי כי אז סכום דמי הכיס של שלושת הילדים עולה על הסכום כולו. ניתן לשאול שאלות דומות לאלה שבפעילות. שימוש בגיליון Excel, נותן תמונה טובה יותר של החוקיות, ומאפשר לגלות תופעות מעניינות ולשאול שאלות לגביהן.



1. חברו ובדקו לאיזה מספר מתקרבות התוצאות בכל טור.

ב.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} = \frac{121}{243}$$

א.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

בטור הימני התוצאות מתקרבות ל 1 ובטור השמאלי ל $\frac{1}{2}$

2. חברו. בדקו אם גם הפעם התוצאות מתקרבות למספר מסוים.

ב.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{25}{36}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{137}{180}$$

א.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{87}{60}$$

בשני הטורים התוצאות אינן מתקרבות למספר מסוים.



נשתמש ברמז, הרומז ללכת מהסוף להתחלה. זוהי אסטרטגיית פתרון נפוצה במתמטיקה.

דמי הכיס של נאווה	דמי הכיס של רונן	הסכום שהיה להם בסוף
80	0	הסכום שהיה להם בסוף
40	40	שלב אחד לפני הסוף
60	20	שלב שני לפני הסוף
30	50	הסכום שקיבלו מהוריהם



בנו בגיליון Excel טבלה עבור שאלה 5.
בדקו באיזה אופן משתנה הסכום שנשאר לתרומה.
בכמה שקלים יש להעלות את הסכום הכולל כדי שהסכום לתרומה יגדל בשקל אחד.
הוכיחו את טענותיכם בדרך אלגברית.

תשובה:

	A	B	C	D	E
1	הסכום הכולל (ש"ח)	דמי כיס של שיר (ש"ח)	דמי כיס של גאיה (ש"ח)	דמי כיס של אלעד (ש"ח)	הסכום לתרומה (ש"ח)
2	1	$=(1/3)*A2$	$=(1/4)*A2+3$	$=(1/6)*A2+6$	$=A2-(B2+C2+D2)$

לאחר גרירת הנוסחאות כלפי מטה נקבל בהמשך הטבלה למשל, את החלק הבא:

43	42	14.00	13.50	13.00	1.50
44	43	14.33	13.75	13.17	1.75
45	44	14.67	14.00	13.33	2.00
46	45	15.00	14.25	13.50	2.25
47	46	15.33	14.50	13.67	2.50
48	47	15.67	14.75	13.83	2.75
49	48	16.00	15.00	14.00	3.00
50	49	16.33	15.25	14.17	3.25
51	50	16.67	15.50	14.33	3.50
52	51	17.00	15.75	14.50	3.75
53	52	17.33	16.00	14.67	4.00

עם כל עלייה בשקל אחד בסכום הכולל, הסכום שנותר לתרומה עולה ב 25 אגורות.

כדי שהסכום לתרומה יעלה בשקל אחד יש להעלות את הסכום הכולל ב 4 שקלים.

נסמן ב x את הסכום הכולל. הסכום שיישאר לתרומה הוא:

$$x - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 3 + \frac{1}{6}x + 6\right) = \frac{1}{4}x - 9$$

לאחר תוספת של 4 שקלים התרומה תהיה: $\frac{1}{4}(x + 4) - 9 = \left(\frac{1}{4}x - 9\right) + 1$ כלומר עלייה של שקל אחד.



- דנים על המקרים הבלתי אפשריים ומבררים מדוע הם קורים.
- מתייחסים לכך שתופעות של חוקיות קל לראות בטבלה, אבל כדי להוכיח כי החוקיות מתקיימת לכל המקרים אפשר להשתמש באלגברה או בשיקולים כלליים.
- מחפשים תופעות משותפות לשלוש המשפחות, למשל כאשר דמי הכיס היו שווים, הסכום כולו היה הקטן ביותר האפשרי.
- אם פתרו בכיתה את החידה, מתייחסים לכך שלא תמיד הדרך האלגברית היא היעילה ביותר.