3.7 מלחמה אלגברית

מטרות

- ביסוס וישום תרגום למשוואה או לאי שוויון
- הצבה בביטויים אלגבריים
- פתרון משוואות ואי שוויונים
- התייחסות לאילוצי בעיה

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (*Excel*)**,** אביזרים למשחק מלחמה אלגברית   קלפי ביטויים וכרטיסי מספרים.

פתיחה

קוראים במליאה את הוראות המשחק. המורה מציגה שני ביטויים אלגבריים ומספר, ומדגימים מהלך אחד משותף. אחר כך משחקים את המשחק בזוגות או בשלשות.

פתרונות והערות

לפעילות שני שלבים. שלב המשחק שבו התלמידים מציבים מספרים בביטויים אלגבריים ובודקים את תוצאות ההצבה, ושלב שני של מהלך פעולה הפוך בו התלמידים מחפשים את המספרים להצבה המתאימים למצב נתון. לצורך זה הם פותרים משוואות ואי שוויונות. אם התלמידים טרם למדו פתרון אי שוויון, אפשר לדלג על המשימות הדורשות מיומנות זו או להסתפק בהדרכה קצרה המדגישה את הדמיון בין התהליך של פתרון משוואה והתהליך של פתרון אי שוויון. יחד עם זאת, חשוב להזהיר מפני חלוקת שני אגפיו של אי שוויון במספר שלילי, ולהציע לתלמידים להביא את האי שוויון למצב בו המקדם של המשתנה הוא חיובי, לפני חלוקת האגפים במקדם זה.

הפעילות מציגה מצבים של משחק והתלמידים צריכים למצוא את התנאים המביאים לאותו מצב. מצב של מלחמה נובע משוויון ביטויים אלגבריים, כלומר ממשוואה. מצב של ניצחון נובע מכך שערך ביטוי אחד עולה על ערך ביטוי שני בהצבה מסוימת, כלומר מאי שוויון.

תחילה על התלמידים להחליט אם ליצור מהביטויים משוואה או אי שוויון. פתרון המשוואה או אי השוויון אינו בהכרח פתרון הבעיה, כי תחום המספרים המתאימים לבעיה (מ –6 עד 6) הוא מוגבל.

הפתרונות הם מסוגים שונים ומגוונים:

- פתרון יחיד למשוואה שנמצא בתחום   פתרון אחד לבעיה
- פתרון יחיד למשוואה שאינו נמצא בתחום   אין פתרון לבעיה
- אינסוף פתרונות למשוואה שחלקם נמצאים בתחום   מספר סופי של פתרונות לבעיה
- אין פתרון למשוואה   אין פתרון לבעיה
- אינסוף פתרונות לאי שוויון שחלקם נמצאים בתחום   מספר סופי של פתרונות לבעיה
- אינסוף פתרונות לאי שוויון שאינם נמצאים בתחום   אין פתרון לבעיה
- אין פתרון לאי שוויון   אין פתרון לבעיה.

2. מצב של מלחמה הוא מצב שבו תוצאות ההצבה בשני הביטויים האלגבריים שוות.

מצב של ניצחון הוא מצב שבו תוצאת ההצבה בביטוי אחד גדול יותר מתוצאת ההצבה בביטוי השני.

מצבים אלה מתקבלים עבור המספרים השלמים בין 6– ל 6 (כולל הקצוות) שהם פתרון המשוואה הנוצרת מהשוואת שני הביטויים, או פתרון אי שוויון מתאים.

בכל סעיף התשובה הסופית נקבעת על ידי בחירת המספרים המקיימים את **שני** התנאים:

המספרים הם פתרון המשוואה או האי שוויון המתאימים

המספרים הם מספרים שלמים בין 6– ל 6 (כולל הקצוות).

בכל סעיף של משימה זו **יש** מספרים מתאימים עבור המצב המבוקש. לפעמים המספרים האלה הם רק חלק מהפתרונות (בגלל התנאי השני)

א. $2x + 17 = 7 - 3x$

$x = -2$

תשובה: המספר שהציבו הוא 2–.

ב. $7x > 4x + 15$

$x > 5$

תשובה: המספר שהציבו הוא 6.

ג. $4(x + 5) > 8 + 4x$

פתרון האי שוויון: כל המספרים.

תשובה: המספר שהציבו יכול להיות כל מספר שלם בין 6– ל 6 (כולל הקצוות)

ד. $8 + 3x > 2x + 12$

$x > 4$

תשובה: המספר שהציבו יכול להיות 5 או 6.

ה. $\frac{1}{6}(x-6) = \frac{1}{2}x - (1 + \frac{1}{3}x)$

$\frac{1}{6}x - 1 = \frac{1}{6}x - 1$

פתרון המשוואה: כל המספרים.

תשובה: המספר שהציבו יכול להיות כל מספר שלם בין 6– ל 6 (כולל הקצוות)

3. מצב של מלחמה הוא מצב שבו תוצאות ההצבה בשני הביטויים האלגבריים שוות.

מצב זה מתקבל עבור מספרים המקיימים את **שני** התנאים:

המספרים הם פתרונות של המשוואה הנוצרת מהשוואת שני הביטויים

המספרים הם מספרים שלמים בין 6– ל 6 (כולל הקצוות).

במשימה זו להבדיל מהמשימה הקודמת נוצרים מקרים שבהם **אין** מספרים מתאימים למצב מלחמה. זה קורה כאשר אין פתרון למשוואה, או כאשר פתרון המשוואה אינו בתחום המספרים של המשחק.

א. $2x + 14 = 4 - \frac{1}{2}x$

$x = -4$

תשובה עבור המספר 4– יש מלחמה.

ב. $7 - x = x - 2(x - 4)$

אין פתרון למשוואה.

תשובה: לא ייתכן מצב של מלחמה.

ג. $16(x + 1) = 4(5x - 3)$

$x = 7$

תשובה: 7 אינו בתחום המספרים של המשחק לכן, לא ייתכן מצב של מלחמה.

ד. $4 - \frac{3x}{4} = \frac{1}{2}(8 - 3x) + \frac{3}{4}x$

פתרון המשוואה: כל המספרים.

תשובה: עבור כל מספר של המשחק   כל מספר שלם בין 6– ל 6 (כולל הקצוות) תהיה מלחמה.

ה. $-x = 4 - (5x + 3)$

$x = 0.25$

תשובה: 0.25 אינו בתחום המספרים של המשחק לכן, לא ייתכן מצב של מלחמה

4. מצב שבו שיר ניצחה הוא מצב שבו תוצאת ההצבה בביטוי האלגברי של שיר גדולה מתוצאת ההצבה בביטוי האלגברי של תמי. מצב זה מתקבל עבור המספרים המקיימים את **שני** התנאים:

המספרים הם פתרונות של אי השוויון הנוצר מכתיבת הסימן > בין שני הביטויים.

המספרים הם מספרים שלמים בין 6– ל 6 (כולל הקצוות).

א. $4(x - 3) > x + 3(x - 4)$

אין פתרון לאי שוויון

תשובה: לא ייתכן ששיר ניצחה. הביטויים בשני האגפים שווים, לכן עבור כל מספר שיציבו תהיה מלחמה.

ב. $2x + 12 > 5 - 3x$

$x > -1.4$

תשובה: המספרים שהצבתם תיתן ניצחון לשיר הם: 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 ,1-

ג. $4(6x - 3) > 3(8x + 1)$

אין פתרון לאי שוויון

תשובה: לא ייתכן ששיר ניצחה

ד. $x - 14 > 3x$

$x < -7$

תשובה: כל המספרים הם מחוץ לתחום לכן לא ייתכן ששיר ניצחה

5. אפשר לפתור אי שוויון המתאר מצב ניצחון של שיר. היפוך סימן האי שוויון ייתן מצב שבו תמי מנצחת. אין צורך לפתור שני אי שוויונים. כי מצב אחד משלים את המצב השני ואת מצב המלחמה לכל המצבים האפשריים בתור מסוים של המשחק. יש לקחת בחשבון שהתלמידים לא למדו עדיין לפתור אי שוויון, ולהנחות אותם כפי שנכתב בראשית הפעילות לדאוג שלא יכפלו במספר שלילי.

א. $4x > 2x + 8$

$x > 4$

תשובה: שיר מנצחת עבור המספרים 5 ו 6. תמי מנצחת עבור המספרים השלמים בין 1– ל 3 (כולל הקצוות). יש מלחמה עבור המספר 4. לכן לתמי סיכוי גדול יותר לנצח.

ב. $3(5 - x) > x + 7$

$x < 2$

תשובה: שיר מנצחת עבור המספרים השלמים בין 6– ל 1 (כולל הקצוות). תמי מנצחת עבור המספרים 3, 4, 5, 6. יש מלחמה עבור המספר 2. לכן לשיר יש סיכוי גדול יותר לנצח.

ג. $x - 1 > 1 - x$

$x > 1$

תשובה: שיר מנצחת עבור המספרים 2 עד 6 (כולל הקצוות). תמי מנצחת עבור המספרים 6– עד 0 (כולל הקצוות). יש מלחמה עבור המספר 1. לכן לתמי יש סיכוי גדול יותר לנצח.

6. התשובות עשויות להיות שונות. המשימה דורשת הבנה מעמיקה של משוואות ואי שוויונים. הפעם על התלמידים למצוא ביטויים אלגבריים שיוצרים משוואה או אי שוויון שיתנו פתרון נתון.

א. המהלך יכול להיות כדלקמן: רישום שני ביטויים אלגבריים כלשהם. הצבת 3– בביטוי האחד ומציאת התוצאה. הצבת 3– בביטוי השני ו"תיקונו" כדי לקבל תוצאה שווה.

למשל הביטויים הם: 2x + 5 ו 3x – 4

הצבת 3– בביטוי הראשון נותנת 1–. הצבת 3– בביטוי השני נותנת 13–. תוספת של 12 "תתקן" את הביטוי השני ותגרום שתוצאת ההצבה שלו תהיה כמו של הביטוי הראשון.

כלומר, הביטויים הם 2x + 5 ו 3x – 4 + 12.

ב. יש שתי אפשרויות שונות ליצור מצבים שבהם שיר תנצח לכל מספר:

שני ביטויים כך שפתרון האי שוויון המתאים הוא כל המספרים. למשל,

תמי	שיר
3x + 3	3x + 7

שני ביטויים כך שפתרון האי שוויון המתאים מכיל את כל המספרים הנמצאים בתחום המשחק (שלמים מ 6– עד 6) למשל,

תמי	שיר
2x	3x + 7

ג. אפשר לקבל מצב של מלחמה לכל מספר שבתחום המשחק על ידי יצירת זהות כלומר, משוואה בה שני האגפים הם ביטויים זהים. אפשר להסוות את הזהות בשני האגפים על ידי הוספת מורכבות לביטויים למשל, סוגריים, שברים וכדומה.

ד. מצב זה יקרה אם המספר להצבה עבור מלחמה יהיה 0. כלומר יש למצוא ביטויים שיוצרים משוואה שפתרונה 0. במקרה זה, לכל אחד מהאי שוויונים בין שני הביטויים יהיו 6 פתרונות בהתחשב באילוצי הבעיה. למשל,

תמי	שיר
2x + 7	3x + 7

7. א ב. רושמים כותרות. ממלאים בעמודה A את המספרים להצבה 6– עד 6 באמצעות גרירה. עבור כל סעיף משאלה 6 ממלאים בזוג עמודות נוסחאות מתאימות לביטויים שנכתבו וגוררים. בודקים את מצבי המלחמה והניצחון של כל שחקן על סמך תוצאות ההצבה המתקבלים בעמודות B ו C..

8. דרך א: **הצבת המספרים בביטויים האלגבריים**

בשורה העליונה רשומים המספרים להצבה. בעמודה השמאלית רשומים הביטויים של המשחק. בתוך הטבלה רשומות תוצאות ההצבה של כל מספר בביטוי המתאים.

	מספר להצבה / ביטוי	-1	-2	-3
I	$-\frac{1}{2}x-5$	$-4\frac{1}{2}$	-4	$-3\frac{1}{2}$
II	$-4-x$	-3	-2	-1
III	$\frac{1}{2}x-4$	$-4\frac{1}{2}$	-5	$-5\frac{1}{2}$
IV	$-2x+9$	11	13	15
V	$5-4x$	9	13	17
VI	$2x+5$	3	1	-1

זוגות של תוצאות שוות מראים את המצבים של מלחמה. זוגות הביטויים שיצרו מלחמה הם I ו III (עבור $x=-1$), IV ו V (עבור $x=-2$), II ו VI (עבור $x=-3$).

דרך ב: **פתרון משוואות**

פותרים משוואות הנוצרות על ידי השוואת זוגות של ביטויים. אם התקבל אחד המספרים הנתונים, מצאנו את אחד הזוגות. ממשיכים להשוות זוגות מבין ארבעת הביטויים הנותרים, עד למציאת שלושת זוגות הביטויים המתאימים.

הטענה שברצוננו לאמת היא: אם על צד אחד של קלף רשום מספר זוגי, אז בצידו השני רשום D.

החלק הראשון של הטענה הוא נתון, והחלק השני מסקנה.

לבדיקת טענה זו צריך להפוך שני קלפים:

1. את הקלף עליו רשום 8.

8 הוא מספר זוגי המקיים את הנתון של הטענה, לכן צריך להפוך את הקלף כדי לברר אם המסקנה מתקיימת (כלומר, האם על צידו השני של הקלף רשום D).

2. את הקלף עליו רשום F.

הטענה העומדת לבדיקה שקולה מבחינה לוגית לטענה: אם מצידו האחד של קלף **לא** רשום D, אז מצידו השני **לא** רשום מספר זוגי. הקלף F מקיים את הנתון של הטענה השקולה. צריך להפוך את הקלף כדי לברר אם המסקנה מתקיימת (כלומר, האם מצידו השני רשום מספר אי זוגי).

רבים נוטים לחשוב שצריך להפוך גם את הקלף שעל צידו הגלוי רשום D. אין צורך לעשות זאת, כי גם אם בצידו השני של קלף זה רשום מספר אי זוגי, אין הדבר סותר את הטענה הנתונה.

למסיימים

שחקו את המשחק שבתחילת הפעילות בגרסה הבא:

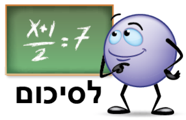
בכל תור מגלים **שלושה** כרטיסי מספרים.

כל משתתף בוחר אחד מבין שלושת המספרים. (משתתפים שונים יכולים לבחור אותו מספר או מספרים שונים.)

כל משתתף מציב את המספר שבחר בביטוי האלגברי שלו.

המשתתף שתוצאת ההצבה שלו היא גדולה ביותר, לוקח את כרטיס המספר. את שני הכרטיסים האחרים מחזירים לתחתית ערמת המספרים.

כל יתר ההוראות כמו בהוראות שבתחילת הפעילות.



לסיכום

- ממיינים את המצבים השונים מבחינת המשחק (מלחמה, ניצחון) ומבחינה אלגברית (משוואה, אי שוויון).
- מסכמים את האפשרויות השונות לפתרון של משוואה ללא אילוצים (פתרון יחיד , כל המספרים , אין פתרון) ואת האפשרויות השונות לפתרון אי שוויון ללא אילוצים (קבוצה אינסופית , כל המספרים , אין פתרון), ומתייחסים להשפעת האילוצים על פתרון הבעיה.
- מתייחסים למצבים שונים היוצרים אותה תשובה לבעיה   למשל, מהו המצב שהכרטיס 6 יוצר?

דוגמאות

מצב מלחמה שבו פתרון המשוואה הוא 6

מצב שאחת מנצחת ופתרון האי שוויון $x > 5$