6.2 שאלות עגולות

מטרות

- התייחסות למקומות גיאומטריים
- חישובי שטחים והיקפים
- חשיבה פרופורציונית
- הבנת קשרים במרחב
- פיתוח יכולת השערה ובדיקתה

אמצעי עזר

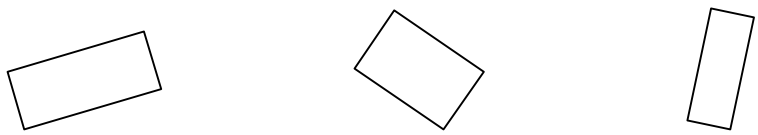
ישומונים: מעוין 1, מעוין 2, מלבן 1, מלבן 2

גלילים שונים שהיקפם לא גדול מאורך מחברת (למשל, פחית שתייה או בקבוק קטן)

סרט מידה

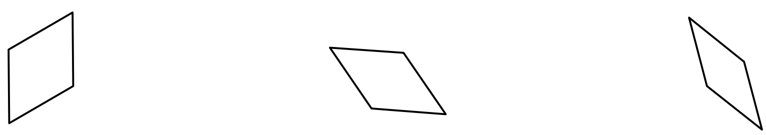
פתיחה

מבקשים מן התלמידים לשרטט על הלוח מלבנים שצלעותיהן הן לאו דווקא אופקיות ואנכיות, אלא בשיפועים שונים.



כדי לפתור את הקושי בשרטוט זוויות ישרות כאלה ניתן להשתמש בדף נייר מלבני.

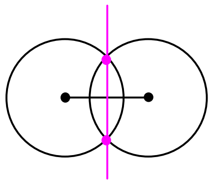
מבקשים מן התלמידים לשרטט על הלוח מעוינים שאלכסוניהם הם לאו דווקא אופקיות ואנכיות.



כדי לפתור את הקושי בשרטוט צלעות שוות, ניתן להשתמש במחוגה, בחוט או בסרגל.

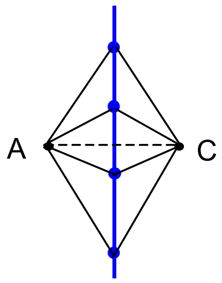
פתרונות והערות

הפעילות עוסקת בהיבטים שונים של מעגל ועיגול   המעגל כמקום גיאומטרי (משימות 1-6), שטח עיגול והיקף מעגל (משימות 7-9), ויחסי שטחים של עיגולים בגדלים שונים. יש בפעילות מספר משימות של השערה ובדיקתה השערה מהו המקום הגיאומטרי על פי אוסף דוגמאות מצוירות (משימות 1-6) וכן השערות הקשורות להשוואת אורכים (משימה 8). יכולת לשער השערה טובה מתבססת על ידע רב והתנסויות קודמות.



כדי להבהיר את המושג מקום גיאומטרי בלי לקרוא לו בשם, מתחילים ממקום גיאומטרי פשוט אנך אמצעי לקטע. כל הנקודות שעליו ורק הן נמצאות במרחק שווה מקצות הקטע. אפשר לקשר גם משימה זו למעגל כי אפשר למצוא את הנקודות על ידי שרטוט שני מעגלים ברדיוס שווה.
מידת ההסברים תהיה כמידת הידע של התלמידים את התכונות של מעוין ומלבן. ידע פורמלי על התכונות הם ירכשו בכיתה מאוחרת יותר, אבל יש להם ידע בלתי פורמלי מבית הספר היסודי, וכן אינטואיציה שניתן להסתמך עליה. יש לתלמידים בדרך כלל קושי בשרטוט צורות, אם הן מונחות על הדף בצורה לא קונבנציונלית, לכן מוצע לפתוח את השיעור בנושא זה. תלמידים שקשה להם לראות את המקומות הגיאומטריים שהם מעגלים, כי אין להם מספיק דוגמאות, יוכלו להיעזר בישומונים. גם במשימה 7 תהיה מידת ההסבר כמידת הידע של התלמידים. חשיבה פרופורציונית היא חשיבה לא קלה, אבל חשובה מאוד. לכן כדאי להפנות אליה ככל האפשר מבחינת היכולת של התלמידים.

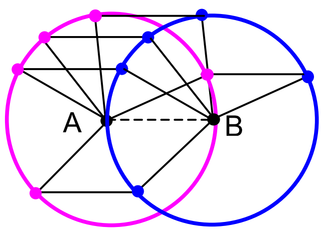
.1 א ב.דוגמאות.



אפשר לשרטט אינסוף מעוינים מתאימים.

ג. שני הקודקודים שאינם נתונים של כל מעוין נמצאים על האנך האמצעי של הקטע AC, במרחק שווה מ AC. אם התלמידים אינם מכירים את המושג "אנך אמצעי", אפשר לומר שהקודקודים נמצאים על קטע המאונך לקטע AC וחוצה אותו.
הסבר: אם התלמידים מכירים את תכונות המעוין מבית הספר היסודי, אפשר להסביר זאת גם כך: האלכסון השני של כל מעוין כזה מאונך לאלכסון AC וחוצה אותו. קיים רק אנך אחד ל AC החוצה אותו, לכן זוגות הקודקודים שאינם נתונים נמצאים על האנך הזה. (אפשר לראות זאת גם על ידי קיפול).

.2 א ב.דוגמאות.

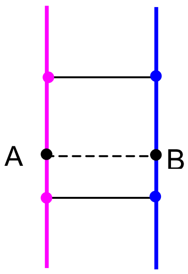


אפשר לשרטט אינסוף מעוינים שונים.

ג. שני הקודקודים שאינם נתונים של כל מעוין נמצאים כל אחד על אחד משני המעגלים שמרכזם בנקודות B ו A בהתאמה, ורדיוסם כאורך הקטע AB.

הסבר: בכל מעוין שנבנה, אורכי שתי הצלעות הסמוכות לצלע AB הנתונה שוות באורכן לצלע הזאת, ולכן הצלעות הן רדיוסים באחד משני המעגלים האלה.

.4 א ב.דוגמאות:

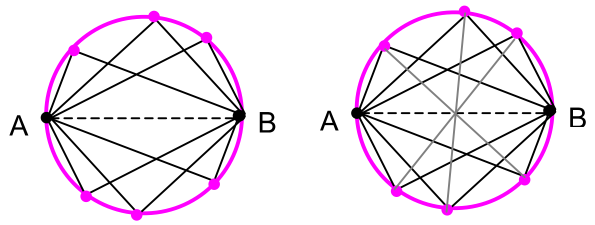


אפשר לשרטט אינסוף מלבנים מתאימים.

ג. שני הקודקודים שאינם נתונים של כל מלבן נמצאים כל אחד על אחד משני האנכים לקטע AB ועוברים דרך קצותיו.
הסבר: דרך כל נקודת קצה של הקטע AB אפשר להעביר רק ישר אחד המאונך לקטע, לכן כל הצלעות הסמוכות לצלע AB במלבנים המתאימים (כולל שני הקודקודים המתאימים בכל מלבן) נמצאים על אחד משני הישרים האלה.

5. א ב. דוגמאות:

אפשר לשרטט אינסוף מלבנים שונים.



ג. הקודקודים C ו D של כל מלבן נמצאים בקצוות של קוטר במעגל אשר הקטע AB הוא קוטרו. אם התלמידים מכירים את תכונות המלבן מבית הספר היסודי, אפשר להסביר זאת על ידי סיבוב האלכסונים השווים וחוצים זה את זה במלבן.

7. א. פיצה באורך 60 ס"מ, ארוכה פי 1.5 מפיצה באורך 40 ס"מ, והרוחב של שתי הפיצות שווה. לכן שטח הפיצה הגדולה גדול פי 1.5 משטח הפיצה הקטנה, והמחיר של הפיצה הגדולה יהיה פי 1.5 ממחיר הפיצה הקטנה כלומר 45 ש"ח ($= 1.5 \cdot 30$).

תלמידים שהשיקול המסתמך על פרופורציה אינו מובן להם יכולים לעשות שיקול אחר:

המחיר ליחידת אורך (1 סנטימטר) ברוחב קבוע הוא 0.75 ש"ח ($= 30 : 40$)

לכן המחיר לפיצה באורך 60 ס"מ הוא 45 ש"ח ($= 0.75 \cdot 60$).

ב. הקוטר בן 60 ס"מ של פיצת ענק, ארוך פי 1.5 מהקוטר בן 40 ס"מ של פיצה גדולה, אבל השטח של פיצת ענק **אינו** גדול פי 1.5 משטחה של הפיצה הגדולה. השטח של פיצת ענק הוא $\pi(1.5R)^2$ כלומר $2.25\pi R^2$

ולכן שטחה יהיה גדול פי 2.25 משטח הפיצה הגדולה.

מחיר פיצת ענק 112.25 ש"ח ($= 2.25 \cdot 50$)

תלמידים שהשיקול המסתמך על פרופורציה אינו מובן להם יכולים לעשות שיקול אחר:

המחיר ליחידת שטח (1 סמ"ר) הוא 0.04 ש"ח ($\approx \frac{1}{8\pi} = \frac{50}{\pi \cdot 20^2}$)

לכן המחיר לפיצה שקוטרה 60 ס"מ הוא בערך 113 ש"ח ($\approx 0.04 \cdot \pi \cdot 30^2$)

ג. נסמן את הרוחב המבוקש ב x.

ברשת **סנטי פיצה** המחיר ליחידת שטח הוא $\frac{30}{40x}$

ברשת **פיצה גולה** המחיר ליחידת שטח הוא $\frac{50}{\pi \cdot 20^2}$

כדי שהמחיר יהיה שווה צריך להתקיים:

$$\frac{30}{40x} = \frac{50}{\pi \cdot 20^2}$$

$$x = 6\pi \approx 19$$

תשובה: כדי שהמחיר ליחידת שטח יהיה שווה בשתי הרשתות, רוחב הפיצה ב**סנטי פיצה** צריך להיות כ 19 ס"מ.

8. א. מאחר שבדרך כלל אין לתלמידים התנסות רבה בגופים, ההשערה שלהם לגבי הגלילים תהיה, כנראה, רחוקה מן המציאות. האומדנים האינטואיטיביים מוטעים גם כי הראייה שלנו מסתמכת על תמונה דו ממדית, ולכן מסתמכת על הקוטר של הבסיס שהוא קצר פי 3 בערך מן ההיקף הקשור לאומדן הדרוש.

כדי לאמוד אפשר להסתמך על השיקולים הבאים:

מהסתכלות על הכדורים בקופסה עם כדורי הטניס אפשר להסיק כי הגובה הוא פי 3 מקוטר הקופסה. לכן היקף הבסיס שווה בערך לגובה.

בהשוואה לקופסה עם הכדורים, הקופסה הימנית קצת יותר רחבה, אבל הרבה יותר גבוהה. לכן יש לשער שגובהה גדול יותר מהיקף בסיסה.

שיקולים דומים ניתן לעשות לגבי שאר הקופסאות.

כדי לתת לתלמידים אפשרות להתנסות רבה יותר באומדן, אפשר לעשות תחרות בין התלמידים:

- מראים גוף גלילי.
- מבקשים מן התלמידים שישרטטו במחברת **לפי אומדן** קטע שאורכו, לדעתם כהיקף בסיס הגליל.
- כל תלמיד מודד את אורך הקטע שלו.
- המורה מודד בסרט מידה את היקף הגוף הגלילי.
- בודקים מי שרטט את הקטע שאורכו הוא הקרוב ביותר להיקף האמיתי.
- כל תלמיד מחשב את אחוז הטעות שלו: ההפרש בין אורך הקטע להיקף מחולק בהיקף ומוכפל ב 100.
- חוזרים על התהליך עם גוף גלילי שלבסיסו קוטר שונה.
- מבררים אם יש התקדמות ביכולת ההשערה

יש לשער שבחישוב אחוז הטעות יתקבלו מספרים שליליים. משמעותם הוא שאורך הקטע קצר מההיקף האמיתי.

ב. בקופסה הימנית הגובה ארוך מן ההיקף, בקופסה השנייה מימין הגובה שווה להיקף, בשלוש הקופסאות האחרות הגובה קצר מן ההיקף.

ג. נסמן את קוטר הבסיס ב d, ואת גובה הקופסה ב h.

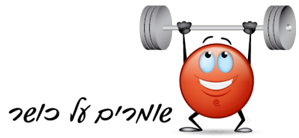
בקופסאות שהיקף הבסיס שווה לגובה צריך להתקיים: $d \cdot \pi = h$, כלומר, אורך הגובה צריך להיות בערך פי 3 מאורך הקוטר.

ד. כדי שהיקף הבסיס יהיה שווה לגובה, מעטפת הגליל צריכה להיות בצורת ריבוע.

9. היקף כדור הארץ הוא כ 40,055.3 ק"מ ($\approx 2 \cdot 6{,}375\pi$) או כ 4,005,530,000 ס"מ.

אורך מהדק משרד הוא בערך 5 ס"מ. מכיוון שעוסקים ביחידות מידה רחוקות זו מזו, יש מקום לדבר על דיוק המדידה.

כדי להקיף את כדור הארץ במהדקים, דרושים כ 801,106,000 מהדקים (= 4,005,530,000 : 5).



1. שטח העיגול הכולל הוא 225π מ"ר ($15^2 \cdot \pi$)

רדיוס המזרקה הוא 5 מ'. שטחה 25π

רדיוס העיגול המורכב מערוגת הפרחים והמזרקה הוא 10 מ'. שטחו 100π.

לכן שטח הערוגה 75π מ"ר ($100\pi - 25\pi =$)

השטח המרוצף הוא 125π מ"ר ($225\pi - 100\pi =$)

שטח המזרקה מהווה $\frac{1}{9}$ ($\frac{25\pi}{225\pi} =$) משטח העיגול

שטח ערוגת הפרחים מהווה $\frac{1}{3}$ ($\frac{75\pi}{225\pi} =$) משטח העיגול

שטח החלק המרוצף מהווה $\frac{5}{9}$ ($\frac{125\pi}{225\pi} =$) משטח העיגול

ואכן, $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = 1$

2. שטח הפארק הוא π קמ"ר ($1^2 \cdot \pi =$)

שטח ערוגת הפרחים הוא $\frac{1}{2}\pi$ קמ"ר

נסמן את רדיוס ערוגת הפרחים ב r.

לכן $r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2}\pi$

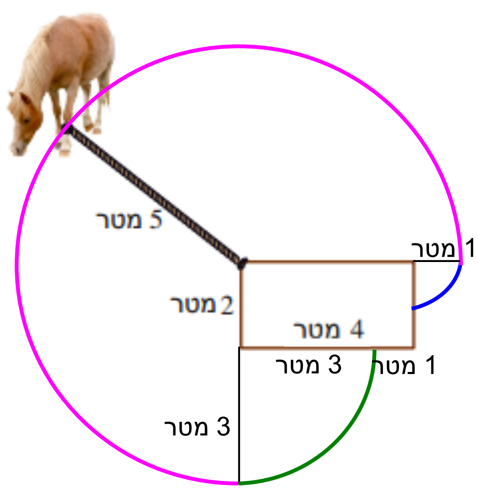
$$r = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$$

תשובה: רדיוס ערוגת הפרחים הוא בערך 700 מטר.

שטח המרעה הוא:

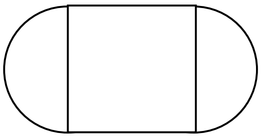
$$\frac{3}{4} \cdot 5^2 \cdot \pi + \frac{1}{4} \cdot 3^2 \cdot \pi + \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{85}{4}\pi \approx 66.75$$

שטח המרעה הוא בערך 66.75 מ"ר



למסיימים

1. נגר רוצה לייצר שולחן אוכל, המורכב מריבוע ושני חצאי עיגול (ראו שרטוט).



שטח הריבוע הוא 4900 סמ"ר.

א. מהו שטחו של כל לוח השולחן?

תשובה: שטח הריבוע הוא 4900 סמ"ר, לכן אורך צלע הריבוע 70 ס"מ. לכן אורך הרדיוס 35 ס"מ.

שטח שני חצאי העיגול שווה לשטח של עיגול שלם. שטח הלוח מלבד הריבוע הוא 1225π $(=35^2\cdot\pi)$ סמ"ר

שטח לוח השולחן הוא בערך 8,750 סמ"ר $(\approx 4900+1225\pi)$ או בערך 0.88 מ"ר

ב. הנגר רוצה לצפות את לוח השולחן בפורניר בחתיכה אחת. האם לוח פורניר במידות 1.30 מ' x 0.90 מ' יספיק?

תשובה: לוח הפורניר לא יספיק לו. אמנם שטח לוח הפורניר גדול משטח לוח השולחן, אבל הוא לא מספיק ארוך כדי לכסות את השולחן בחתיכה אחת. האורך של לוח הפורניר הוא 1.30 מ', ואילו אורך לוח השולחן הוא 1.40 מ'.

ג. הנגר רוצה לצפות גם את היקף לוח השולחן בפס פורניר גמיש. מהו אורך הפס הדרוש לו?

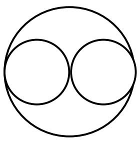
תשובה: אורך הפס הדרוש הוא בערך 360 ס"מ $(\approx 70\pi+2\cdot 70)$, כלומר 3.60 מ'.

2. בפיצריה חדשה שנפתחה מוכרים שני סוגי פיצות:

פיצה אישית בקוטר 20 ס"מ ומחירה 20 ש"ח, ופיצה משפחתית בקוטר 40 ש"ח ומחירה 40 ש"ח

א. איזו פיצה זולה יותר באופן יחסי?

תשובה: פיצה משפחתית זולה יותר באופן יחסי.



המחיר של פיצה משפחתית שווה למחיר של שתי פיצות אישיות, אבל השטח של פיצה משפחתית (שקוטרה פי 2 מקוטר פיצה אישית) גדול משטחן של שתי פיצות אישיות. אפשר לראות זאת בשרטוט.

כדי לדעת פי כמה שטח הפיצה המשפחתית גדול משטח שתי פיצות אישיות, נחשב:

שטח פיצה משפחתית: $20^2\pi=400\pi$

שטח שתי פיצות אישיות: $2\cdot 10^2\pi=200\pi$.

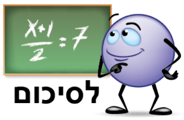
כלומר השטח של פיצה משפחתית גדול פי 2 משטח שתי פיצות אישיות, או פי 4 משטח פיצה אישית.

ב. מסביב לפיצה יוצקים פס קטשופ. איזה פס ארוך יותר, פס לפיצה משפחתית או הפסים שמסביב לשתי פיצות אישיות?

תשובה: שני הפסים שווים באורכם.

היקף פיצה משפחתית: 40π.

היקף שתי פיצות אישיות: $2\cdot 20\pi=40\pi$.



לסיכום

- דנים במושגים השערה ובדיקה. אפשר לבצע את הפעילות המוצעת בפתרון למשימה 8.

  מבררים את חשיבות יכולת ההשערה. למשל, בקניות של מוצרים רבים אומדן התשלום הכולל.

  דנים ביכולת לשער השערה טובה רק אחרי התנסויות.
- דנים בהיבטים השונים של מעגל בגיאומטריה ובמציאות.
- בודקים את אופן הפתרון של משימה 7 ומציגים פתרון בדרך אחרת אם לא הוצע בכיתה.
- מדברים על הסיבה לטעויות אופטיות: ראייה תלת ממדית היא יכולות הנלמדת על ידי המוח על סמך התנסויות.

  מצבים המנוגדים לידע זה נשפטים בכל זאת בהתאם לניסיון שהצטבר.

  מבקשים מן התלמידים להביא לכיתה דוגמאות של אשליות אופטיות מתוך ספרים או מן האינטרנט.