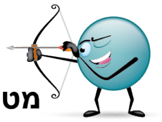
יחידה: 7 חבורות

7.1 עולות בינאריות



מטרות

- הרחבה והעמקה של מושגים מתמטיים מוכרים למשל, משוואה, פעולות חשבון, תכונות פעולות
- בניית ביטויים אלגבריים בעלי יותר ממשתנה אחד
- שימוש באלגברה להכללת ולהצדקת תכונות של פעולות
- היכרות עם תכונות של פעולות: חילופיות ואיבר ניטרלי
- תרגול מיומנויות אלגבריות

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (*Excel*) למורה

פתיחה

מציגים לתלמידים את הבעיה של המחשבון המסתורי מחשבון שיש בו מקשי פעולות לא מוכרות. לפני שמחלקים לתלמידים את הדף, אפשר להיעזר בגיליון *Excel* ובמקרן בכיתה, ולעודד את התלמידים לשער את הפעולה שבפעילות הפתיחה. מכינים מבעוד מועד 3 טורים: השניים הראשונים עם מספרים, והטור הנוסף עבור התוצאה (ראו תמונה).

	A	B	C	D
1			♣ מקש	
2	מספר 1	פעולה	מספר 2	תוצאה
3	1	♣	2	6
4	3	♣	2	10
5	8	♣	4	24

בזמן השיעור מבקשים מן התלמידים לשער את הפעולה. בעקבות כל השערה, רושמים נוסחה מתאימה (במשתנים A ו C) באחת העמודות הבאות. גוררים את הנוסחה, ומשווים את המספרים המתקבלים עם המספרים שבעמודה D.

התלמידים עשויים להציע עבור $a ♣ b$ ביטויים שווים שנראים שונים כמו $2 \cdot (a + b)$, $2a + 2b$, $a + a + b + b$ וכדומה, מומלץ להשוות את הביטויים שהובילו לתוצאות שוות.

פתרונות והערות

בפעילות זו נחשפים התלמידים לפעולות חשבון לא שגרתיות. התלמידים לומדים מהי פעולה בינארית, ומתייחסים אל המושגים **פעולה חילופית** ו**איבר ניטרלי** של פעולה בינארית על קבוצת מספרים. כל המשימות ממשימה 2 ואילך מתבססות על הפעולות שהוגדרו במשימה 1, ולכן מומלץ לדון בתוצאות שהתקבלו במשימה 1 לפני שהתלמידים ניגשים לשאר המשימות. מבקשים הצעות לביטויים עבור הפעולות החדשות ומשווים בין הביטויים השונים שהתקבלו (וכך מוצאים ביטויים שווים). בנוסף, מומלץ לערוך דיון גם אחרי שאלה 4 ולאחר שאלה 7 ולברר אם המושגים שהוגדרו בהן, מובנים לתלמידים.

1. כדאי לתת לתלמידים מספיק זמן לגלות לבד את הפעולות, מאחר ובדיון כיתתי תלמידים אחדים עלולים לחשוף מהר את הפתרון ולמנוע בכך את הגילוי מן האחרים. עם זאת, כדאי לקיים דיון כיתתי לאחר הפעילות, ולבקש מהתלמידים להציע את הפתרונות שלהם. ייתכן מאוד כי לאותה פעולה יוצגו ביטויים שווים שנראים שונים. אפשר לדון בכיתה בשאלה האם הביטויים הם שווים, ומדוע.

א. $a \blacktriangle b = 2 \cdot a + b$

אחד הרמזים לסעיף זה הוא התרגיל האחרון הנתון ($20 \blacktriangle 6 = 46$), כדי לקבל 46 מתבקש לחבר $40 + 6$, והקשר בין 20 ל 40 הוא בולט.

ב. $a \spadesuit b = (a + b) : 2$

יש מספר רמזים לפתרון בתרגילים המוצגים   למשל, התוצאות 2.5 ו 4.5 מרמזות על פעולת חילוק ב 2 של מספר אי זוגי.

ג. $a \bigstar b = a^2 + b$

סעיף זה, מעט יותר קשה מן הסעיפים הקודמים, וכדאי לתת לתלמידים זמן לחשוב עליו. ישנם כמה רמזים שיכולים לסייע להם לגלות את הפעולה: לתרגילים $1 \bigstar 4$ ו $2 \bigstar 4$ יש אותו מספר ראשון (4), מספרים שניים עוקבים (1 ו 2), והתוצאות גם כן מספרים עוקבים (17 ו 18). זה יכול לרמז שאת האיבר השני מחברים לתוצאה. הפעלת הפעולה על 5 ו 0, נותנת כתוצאה 25. מסקנות האפשריות הן שמכפילים את האיבר השמאלי ב 5, או שמכפילים אותו בעצמו. התבוננות בתרגילים הנוספים תפסול את האפשרות הראשונה.

ד. $a \blacklozenge b = (a + b) + (a \cdot b)$

סעיף זה קשה יותר מן הסעיפים הקודמים. אפשר לעודד את התלמידים לנסות פעולות שונות על המספרים (כפל, חיבור, חיסור), ולהשתמש בהם לזיהוי מרכיבים של תוצאת הפעולה. אפשר גם לרמוז לתלמידים שהמספרים עליהן מופעלת הפעולה מופיעים בפעולה פעמיים. בחינת התרגילים במספרים גבוהים עשויה לעזור לגילוי הפעולה.

2. לאחר הגדרת כל הפעולות בתרגיל 1, התלמידים נדרשים להשתמש בהגדרות אלה לביצוע הפעולות או הפעולות ההפוכות.

שימו לב!

יש תרגילים שיש להם יותר מפתרון אחד (מסומנים בכוכבית)

יש תרגילים שבהם יצטרכו התלמידים להשתמש גם במספרים שליליים.

.1 מקש ▲ $a ▲ b = 2 \cdot a + b$ 10 ▲ 3 = 23 11 ▲ 18 = 40 30 ▲ 16 = 76 21 ▲ 58 = 100	**.2 מקש ♠** $a ♠ b = (a + b) : 2$ 15 ♠ 47 = 31 82 ♠ 23 = 52.5 10 ♠ –2 = 4 (*) 1 ♠ 9 = 5 אינסוף פתרונות
.3 מקש ★ $a ★ b = a^2 + b$ 4 ★ 5 = 21 –3 ★ –2 = 7 4 ★ 1 = 17 (*) 3 ★ 3 = 12 –3 ★ 3 = 12	**.4 מקש ♦** $a ♦ b = (a + b) + (a \cdot b)$ 1 ♦ 1 = 3 3 ♦ 10 = 43 2 ♦ 3 = 11 (*) 1 ♦ 2 = 5 אינסוף פתרונות

3. א. התוצאה השגויה של דני לאחר שהפך את סדר המספרים היא 9 במקום התוצאה הנכונה 15. התלמידים אמורים להגיע למסקנה שבחלק מהפעולות יש חשיבות לסדר המספרים, ובחלק מהפעולות אין חשיבות לסדר. מסקנה זו תוביל להבנת תכונת החילופיות.

ב. אם דני יהפוך את הסדר,

בפעולה ♠ הוא יקבל תוצאה נכונה.

בפעולה ★ הוא יקבל בדרך כלל, תוצאה שגויה. רק אם המספרים יהיו שווים או נגדיים התוצאה תהיה נכונה.

בפעולה ♦ הוא יקבל תוצאה נכונה.

4. הפעולות ♠ ו ♦ הן חילופיות ואילו הפעולות ▲ ו ★ אינן חילופיות.

כדאי לקיים דיון בשאלה כיצד יודעים אם פעולה היא חילופית או לא, וכיצד מנמקים זאת:

כדי להראות שפעולה אינה חילופית מספיקה דוגמה נגדית אחת (תרגיל שבו שינוי סדר המספרים גורם לשינוי בתוצאה).

דוגמאות נגדיות:

10 ▲ 3 = 23 ואילו 3 ▲ 10 = 16

10 ★ 3 = 103 ואילו 3 ★ 10 = 19

כדי להראות שפעולה היא חילופית דרוש הסבר כללי, מילולי או אלגברי, על סמך תכונות פעולות חשבון שאנו מכירים.

דוגמה להסבר מילולי:

הפעולה ♠ היא חילופית. הסכום לא משתנה גם אם משנים את סדר המספרים כי חיבור רגיל הוא פעולה חילופית. החילוק ב 2 נעשה בשני המקרים על תוצאות שוות, ולכן תוצאות הפעולה שוות.

דוגמה להסבר אלגברי

הפעולה ♦ היא חילופית.

$b \blacklozenge a =$	$a \blacklozenge b =$
$(b + a) + b \cdot a$	$(a + b) + a \cdot b$

שני הביטויים האחרונים שווים בגלל חילופיות החיבור הרגיל וחילופיות הכפל הרגיל.

5. מטרת שאלה זו היא לבחון פעולות מוכרות ולבדוק האם הן חילופיות או לא. למשל: פעולות החיבור והכפל הן חילופיות, ולעומתן פעולות החיסור, החילוק והחזקה אינן חילופיות.

כדאי לעודד תלמידים להמציא פעולות המסתמכות על פעולות אלו.

6. ההגדרה הכללית של המושג איבר ניטרלי נעשית באמצעות המקרים המוכרים של 0 בחיבור ו 1בכפל.

א. השערתו של דני אינה נכונה. 0 אינו איבר ניטרלי לגבי הפעולה ♠.

ב. גם השערתה של אלונה אינה נכונה. 1 אינו איבר ניטרלי לגבי הפעולה ♠.

ג. אמנם יש פתרון לכל משוואה, אבל הפתרונות שונים. אי אפשר למצוא מספר אחד שיתאים לכל המשוואות.

ד. המסקנה מסעיף ג היא שאין איבר ניטרלי לפעולה ♠.

7. לפעולה ♦ יש איבר ניטרלי והוא 0.

פתרון בדרך של השערה ובדיקה

משערים כי 1 או 0 הם איברים ניטרליים, כי אלה האיברים הניטרליים המוכרים.

בודקים ומגלים כי $a \blacklozenge 1 =$

$a + 1 + a \cdot 1 =$

$2a + 1$

ולכן 1 אינו איבר ניטרלי

בודקים ומגלים כי $a \blacklozenge 0 =$

$a + 0 + a \cdot 0 = a$

ולכן 0 הוא איבר ניטרלי של הפעולה ♦

פתרון בדרך אלגברית

נרצה למצוא מספר e, שעבור כל a, יתקיים $a \blacklozenge e = a$, כלומר:

נדרוש $(a + e) + (a \cdot e) = a$

נפשט ונפתור $a + e + ae = a \quad / -a$

$e + ae = 0$

$e \cdot (1 + a) = 0$

נסיק כי $e = 0$

אחרי פתרון שאלה 7 כדאי לדון עם התלמידים על מספר נקודות.

- כיצד מראים שלפעולה מסוימת אין איבר ניטרלי.

להבדיל מתכונת החילופיות שאותה אפשר להפריך בעזרת דוגמה נגדית, את תכונת הקיום של איבר ניטרלי אי אפשר להפריך על ידי דוגמה נגדית. אפשר רק להפריך קיום איבר ניטרלי מסוים. ההוכחה שאין איבר ניטרלי לפעולה מסוימת חייבת להיות כללית.

למשל, לפעולה ♠ (פעולת הממוצע החשבוני של שני המספרים) אין איבר ניטרלי.

הסבר מילולי:

כדי שהממוצע של שני מספרים יהיה זהה לאחד המספרים, המספרים חייבים להיות שווים, ולכן לא יכול להיות מספר אחד המתאים לכל המספרים.

הסבר אלגברי:

נחפש מספר אחד e המקיים: $a \spadesuit e = a$ לכל a

$$(a + e) : 2 = a \quad / \cdot 2$$

$$a + e = 2 \cdot a \quad / -a$$

$$e = a$$

כלומר, אין מספר אחד שמתאים לכל מספר a, אלא לכל מספר מתאים מספר אחר. לכן לפעולה ♠ אין איבר ניטרלי.

הערה: הפעולות ▲ ו ★ אינן חילופיות, ולכן לא נדון בשאלה האם יש להן איבר ניטרלי או לא.

אם נותר זמן, והתלמידים מתקדמים, אפשר לדון איתם גם בהגדרה של איבר ניטרלי משמאל, עבור פעולות שאינן חילופיות, כלומר איבר שאם הוא האיבר השמאלי בפעולה בינארית הוא ניטרלי, אך הוא אינו ניטרלי אם הוא האיבר הימני בפעולה זאת (ולהיפך עבור איבר ניטרלי מימין).

למשל, לגבי הפעולה ★, לכל a מתקיים:

$$0 \bigstar a = 0^2 + a = 0 + a = a$$

לכן 0 הוא איבר ניטרלי של הפעולה ★ משמאל.

לעומת זאת:

$$a \bigstar 0 = a^2 + 0 = a^2$$

לכן 0 אינו איבר ניטרלי של הפעולה ★ מימין.

למסיימים

א. המציאו פעולה חדשה באמצעות פעולות החשבון הרגילות.
רשמו מספר תרגילים עם הפעולה החדשה, ופתרו אותם.
תנו לחברכם לנחש את הפעולה (הראו לו רק את התרגילים ופתרונם).

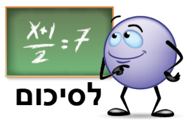
תשובה: למשל הפעולה $a ♥ b = |a – b| : 2$
שמשמעותה חצי המרחק בין שני המספרים על ציר המספרים.
$2 ♥ 8 = 3$ $3 ♥ –3 = 3$ $0 ♥ 9 = 4.5$

ב. בדקו ביחד אם הפעולה שלכם היא חילופית.

תשובה: הפעולה ♥ חילופית, כי $|a – b| = |b – a|$. המרחק בין a ל b, שווה למרחק בין b ל a. לכן גם חצאי המרחקים שווים.

ג. בדקו ביחד אם לפעולה שלכם יש איבר ניטרלי.

תשובה: לפעולה ♥ אין איבר ניטרלי.
לקיום איבר ניטרלי, צריך להתקיים $|a – b| : 2 = a$ לכל a.
אבל אגף שמאל תמיד חיובי ואגף ימין יכול להיות שלילי, ולכן לא תמיד מתקיים שוויון.



לסיכום

- דנים באסטרטגיות השונות בהן השתמשנו במהלך הפעילות, תוך הדגשת השימוש בביטויים אלגבריים לצורך פתרון בעיות, הצדקה והדגמה של תכונות של פעולות. למשל, הצבה לצורך חישוב, הצדקה לצורך בחינה של תכונות, ומניפולציות אלגבריות לצורך בדיקת תכונות של פעולות.
- חוזרים על הפעולות החדשות שהכרנו בפעילות זו, ומדברים על הקשר בין התכונות של פעולה נתונה למשל, אם הפעולה היא חילופית ויש לה איבר ניטרלי "מימין" אז אותו מספר ישמש גם איבר ניטרלי "משמאל".