7.4 מהי חבורה?

מטרות

- הרחבה והעמקה של מושגים מתמטיים מוכרים   למשל, משוואה, פעולות חשבון, תכונות פעולות
- הגדרת המושג חבורה חילופית
- שימוש באלגברה להכללת ולהצדקת תכונות של פעולות
- מציאת דוגמאות ואי דוגמאות למושגים על סמך להגדרתם

אמצעי עזר

אין

פתיחה

מציגים את לוח הפעולה $\oplus_7$ שבמשימת הפתיחה. מבקשים מן התלמידים לזהות תופעות מענינות ולהסביר אותן במידת האפשר.

תופעה לדוגמה: כל המספרים באלכסון בכיוון / שווים.

ההסבר: נצא מאחת התוצאות בלוח (שאיננה בשורה הראשונה) שמתקבלת מפעולה על שני מספרים. "נצעד" צעד אחד ימינה, וצעד אחד למעלה, ונגיע למספר הבא באלכסון בכיוון ↗. הצעידה ימינה, הוסיפה 1 למספר הראשון בפעולה $\oplus_7$, הצעידה למעלה החסירה 1 מן המספר השני בפעולה. בסך הכל תוצאת הפעולה לא השתנתה.

פתרונות והערות

בפעילות זו משתמשים התלמידים בכל התכונות והמושגים שלמדו בשלוש הפעילויות הקודמות וקושרים אותם בהגדרה של חבורה חילופית. בפעילות התלמידים מיישמים את המושג חבורה, על ידי בדיקה אם קבוצה ופעולה המוגדרת עליה היא חבורה (משימות 2 , 4-6, 8), ומחפשים דוגמאות ואי דוגמאות לחבורות (משימות 3, 7). עיסוק באי דוגמאות במתמטיקה, מחדד מאוד את ההבנה של המושגים הנלמדים.

1. א. לפי הלוח מסיקים ש

- הקבוצה סגורה לגבי הפעולה, כי רואים שכל התוצאות בתוך הלוח שייכות לקבוצה.
- המספר הניטרלי הוא 0, כי בשורה שלו ובעמודה שלו התוצאות הן כמו המספרים בשוליים כלומר, 0 אינו משפיע על התוצאה.
- הפעולה חילופית, כי רואים שהלוח סימטרי לגבי האלכסון בכיוון \ .
- לכל מספר בקבוצה יש איבר הופכי, כי 0 הוא המספר הניטרלי, והוא מופיע כתוצאה בכל שורה ובכל עמודה.

ב. דוגמאות לאישור הקיבוציות:

$$(2 \oplus_7 3) \oplus_7 5 = 5 \oplus_7 5 = 3 \qquad 2 \oplus_7 (3 \oplus_7 5) = 2 \oplus_7 1 = 3$$

$$(6 \oplus_7 4) \oplus_7 2 = 3 \oplus_7 2 = 5 \qquad 6 \oplus_7 (4 \oplus_7 2) = 6 \oplus_7 6 = 5$$

2. כן הקבוצה היא חבורה.

במשימה 1 הראינו שארבעה תנאים מתקיימים. תכונת הקיבוציות של הפעולה נתונה מראש, כי הוכחתה כרוכה בתהליך ארוך של מיצוי אפשרויות רבות. אפשר לומר באופן כללי כי הפעולה מסתמכת על חיבור רגיל שהוא קיבוצי.

3. אפשר להשתמש באי דוגמאות שנידונו בפעילויות הקודמות.

א. לדוגמה, **קבוצת המספרים הטבעיים** אינה סגורה לגבי **פעולת החילוק** הרגיל.

ב. לדוגמה, **פעולת החיסור** הרגיל אינה קיבוצית בקבוצת **המספרים השלמים**.

ג. לדוגמה, בקבוצת **המספרים הזוגיים** אין לכפל **איבר ניטרלי**.

ד. לדוגמה, בקבוצת **המספרים החיוביים ו 0**, יש איבר ניטרלי לגבי **החיבור** הרגיל, אבל לא לכל איבר יש איבר הופכי.

4. טבלה זו מסכמת את כל מה שהתלמידים למדו בכל הפעילויות (כולל הפעילות הנוכחית) בנושא חבורות. עבור מילוי חלק מן המשבצות מציעים לתלמידים למלא לוחות פעולה, שבעזרתם יוכלו לבדוק קיום או אי קיום של תכונות מסוימות. אפשר להסתפק בבדיקת חלק מן המקרים.

התכונה / **הקבוצה עם הפעולה**	**סגירות**	**קיבוציות**	**איבר ניטרלי**	**איבר הופכי**	**חילופיות**	**האם זו חבורה חילופית?**
המספרים הטבעיים עם חיבור	√	√	x	x	√	x
המספרים השלמים עם כפל	√	√	√	x	√	x
המספרים הטבעיים עם הממוצע החשבוני	x	x	x	x	√	x
המספרים מהצורה $\frac{m}{n}$ כאשר m, n מספרים שלמים (שונים מ 0) עם כפל	√	√	√	√	√	√
קבוצת המספרים {0, 1, 2, 3, 4} עם חיבור מחזורי $\oplus_5$	√	√	√	√	√	√
קבוצת המספרים {0, 1, 2, 3, 4} עם כפל מחזורי $\odot_5$	√	√	√	x	√	x
קבוצת המספרים {1, 2, 3, 4} עם כפל מחזורי $\odot_5$	√	√	√	√	√	√
קבוצת המספרים {0, 1, 2, 3} עם חיבור מחזורי $\oplus_4$	√	√	√	√	√	√
קבוצת המספרים {1, 2, 3} עם כפל מחזורי $\odot_4$	x	x	√	x	√	x

הסברים ונימוקים לחלק מן התכונות

המספרים הטבעיים עם חיבור: אין ניטרלי כי 0 לא שייך לקבוצת הטבעיים. לכן גם אין הופכי.

המספרים השלמים עם כפל: למשל, אין הופכי ל 2, כי $\frac{1}{2}$ אינו שלם.

המספרים השלמים עם הממוצע החשבוני, בדקנו תכונות בפעילות קודמת תרגיל 2.

קבוצת המספרים {0, 1, 2, 3, 4} עם כפל מחזורי $\odot_5$: ל 0 אין הופכי. הפעולה של כל מספר עם 0 נותנת 0, שהוא לא המספר הניטרלי. אפשר לראות בלוח כי בשורה ובעמודה של 0 המספר 1 הניטרלי אינו מופיע.

קבוצת המספרים {1, 2, 3} עם כפל מחזורי $\odot_4$: הקבוצה אינה סגורה כי $2 \odot_4 2 = 0$ ו 0 אינו בקבוצה. מסיבה זו הפעולה גם אינה קיבוצית, כי למשל הפעולה $3 \odot_4 (2 \odot_4 2)$ אינה מוגדרת, כי 0 (שמתקבל כתוצאת הפעולה

שבסוגריים) לא שייך לקבוצה. בנוסף, ל 2 אין הופכי, כי הפעולה של כל מספר מן הקבוצה עם 2 אינה נותנת כתוצאה 1 המספר הניטרלי.

5. א. אפשר לזהות בלוח כי קיים לפעולה איבר ניטרלי שהוא 1. כמו כן, אפשר לזהות חילופיות.

ב. לא קיימת סגירות. למשל, $2 \odot_6 3 = 0$ והתוצאה 0, אינה שייכת לקבוצה.

לא קיימת קיבוציות מאותה סיבה. למשל, הפעולה $4 \odot_6 (3 \odot_6 2)$ אינה מוגדרת.

לא לכל איבר קיים איבר הופכי. למשל, ל 4 אין הופכי, כי 1 הוא האיבר הניטרלי, וכל התוצאות בשורה ובעמודה של 4 שונות מ 1.

ג. הקבוצה הנתונה עם הפעולה הנתונה אינה חבורה עקב אי קיום כל התנאים הדרושים לקיום חבורה.

6. לאחר שראו מספר לוחות פעולה, ולמדו כיצד לזהות תכונות מן הלוחות, התלמידים מתנסים בקבוצות של איברים כלליים, ולא מספריים. לא ניתנה דוגמה של חבורה, כי בדיקת הקיבוציות דורשת תהליך ארוך של מיצוי אפשרויות.

א. הקבוצה אינה חבורה. היא אמנם סגורה, יש לה איבר ניטרלי והוא a, והיא חילופית, אבל ל b אין איבר הופכי, כי תוצאת הפעולה בינו לבין שני האיברים בקבוצה היא תמיד b, שאינו האיבר הניטרלי. לכן, אין צורך לבדוק קיבוציות.

ב. הקבוצה אינה חבורה חילופית. היא אמנם סגורה, יש לה איבר ניטרלי a, לכל איבר יש איבר הופכי, כי a נמצא בכל שורה ובכל עמודה, אבל היא איננה חילופית. אפשר לראות בלוח כי $b ✦ c \neq c ✦ b$, לכן אין צורך לבדוק קיבוציות.

למסיימים

1. נתונה קבוצת מספרים {a, b} עם פעולה בינארית כלשהי ✶.
בנו את לוח הפעולה של הפעולה ✶ כך שהקבוצה עם הפעולה תהווה חבורה חילופית.
מצאו את כל התשובות האפשריות.

תשובה: הלוחות האפשריים הם:
לוח מתאים צריך לקיים את ארבעת התנאים הבאים:
הלוח צריך להכיל רק איברים של הקבוצה a ו b (סגירות).
אחת השורות ואחת העמודות צריכות להיות העתק של השוליים המתאימים (קיום איבר ניטרלי).
כל שורה צריכה להכיל את האיבר הניטרלי (קיום איבר הופכי לכל איבר).
הלוח צריך להיות סימטרי לגבי האלכסון בכיוון ↘ (לחילופיות).
אפשר לייצר שני לוחות בלבד המקיימים את כל ארבעת התנאים האלה.

✶	a	b
a	a	b
b	b	a

✶	a	b
a	b	a
b	a	b

המשך ⇩

כמו כן, צריך לבדוק את הקיבוציות של הפעולה. לצורך זה, יש לבדוק 8 זוגות תרגילים, שהם כל האפשרויות לבחירת שלשות סדורות עם a ו b:

(b, b ,b) , (b, b ,a) , (b, a ,b) , (a, b ,b) , (b, a ,a) , (a, b ,a) , (a, a ,b) , (a, a ,a)

לכל שלשה, יש לבדוק אם הקיבוציות מתקיימת.

למשל, האם $(a \ast b) \ast b = a \ast (b \ast b)$

2. נתייחס לקבוצת המספרים **הטבעיים ו 0** על ציר המספרים.

M היא פעולה בין שני מספרים a ו b בקבוצה המוגדרת באופן הבא:

a M b שווה **למרחק** על ציר המספרים בין a ל b.

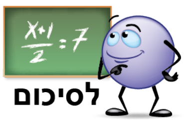
האם הקבוצה עם הפעולה היא חבורה חילופית? נמקו.

תשובה: נבדוק אם מתקיימים התנאים לקיום חבורה.

- הקבוצה סגורה לגבי הפעולה כי המרחק בין כל שני מספרים טבעיים או 0 הוא מספר טבעי או 0.
- המספר הניטרלי לגבי הפעולה הוא 0, כי המרחק של כל מספר טבעי או 0 מ 0 הוא המספר עצמו.
- אין מספר הופכי למספרים הטבעיים, כי אין מספר יחיד שמרחקו מכל מספר טבעי הוא 0.

מצאנו דוגמה נגדית, ואין צורך להמשיך ולבדוק את התנאים האחרים.

מסקנה: קבוצת המספרים הטבעיים ו 0 איננה חבורה לגבי פעולת המרחק M.



לסיכום

- מסבירים לתלמידים כי במהלך פעילויות אלה חקרנו תכונות משותפות לפעולות בינאריות רבות ובאמצעות תכונות אלה הגדרנו "יצור מתמטי" (מושג) חבורה חילופית.

  חקירת תכונות החבורה מאפשרת הסקת מסקנות כלליות, ומבטלת את הצורך בחקירת כל מקרה פרטי של חבורה בנפרד. באופן דומה, הגדרת קבוצות של צורות גיאומטריות וחקירת התכונות המשותפות לכל צורה השייכת לקבוצה, מבטלת את הצורך בחקירת מקרים פרטיים רבים.

  למשל, אם מוכיחים משפט מסוים במקבילית, המשפט נכון גם בריבוע, כי ריבוע הוא "יצור מתמטי" מסוג מקבילית, ואין צורך להוכיח בנפרד שהמשפט קיים בריבוע.

- דנים ברמת הקושי לבדיקת כל אחד מן התנאים לקיום חבורה, דנים ביעילות של לוח פעולה לענין זה, ומתיחסים לקושי לבדוק את קיום הקיבוציות, כתכונה שאין רואים אותה בלוח

- מתייחסים לחבורות שהאיברים בהן משתנים כלליים (כמו בסוף הפעילות), או אפילו "יצורים" גיאומטריים כפי שנראה בפעילות הבאה.