יחידה 1: יחס וקנה מידה

1.3 יחסים בטנגרם

מטרות

- הכרת משחק הטנגרם
- בניית הֶקשר בין נושא היחס לנושא דמיון של מצולעים
- התנסות בסיטואציה גיאומטרית של חקר ובנייה
- זיהוי חוקיות בסדרה של צורות גיאומטריות דומות וניסוח חוקיות באמצעות ביטויים אלגבריים
- זיהוי תכונות גיאומטריות, ומציאת גדלים גיאומטריים (אורכים, היקפים ושטחים)
- קישור בין ייצוג גיאומטרי, מספרי ואלגברי.

אמצעי עזר

- ריבועי נייר ומספריים לכל תלמיד להכנת הטנגרם, או לחילופין ערכות מוכנות של טנגרם , או לחילופין יישומון טנגרם באינטרנט (Tangram Applet).
- גיליון אלקטרוני (למשל, Excel).

פתיחה

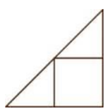
בונים עם התלמידים את שבעת חלקי הטנגרם על-פי הוראות הבנייה שבפעילות.

מזהים עם התלמידים את שבעת חלקי הטנגרם (משולש קטן, משולש בינוני, משולש גדול, מקבילית וריבוע).

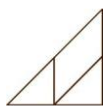
מבקשים מהתלמידים לסדר את שבעת חלקי הטנגרם כריבוע.

פתרונות והערות

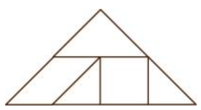
1. א. משולש גדול הבנוי משני משולשים קטנים וריבוע



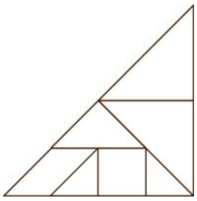
משולש גדול הבנוי משני משולשים קטנים ומקבילית



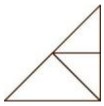
ב. משולש הבנוי מחמישה חלקים



ג.   משולש הבנוי מכל שבעת חלקי הטנגרם

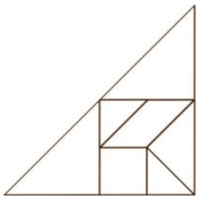


ניתן לרמוז לתלמידים על אפשרות זו על ידי הצגת
הסקיצה הבאה

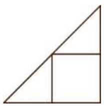


(המשולש הגדול בסקיצה הוא המשולש הבנוי מחמשת החלקים של הטנגרם ללא המשולשים הגדולים)

אפשרות נוספת



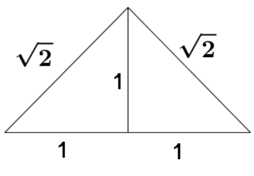
ניתן לרמוז לתלמידים על אפשרות זו על ידי הצגת
הסקיצה הבאה



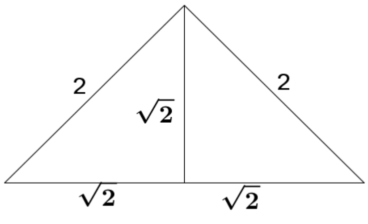
(הריבוע בסקיצה הוא ריבוע הבנוי מחמשת החלקים של הטנגרם ללא המשולשים הגדולים).

2. כל משולש בסדרה נוצר על ידי הצמדה בניצב של שני עותקים של המשולש הקודם לו בסדרה
הערה: את אורך היתר של המשולש הראשון בסדרה מוצאים באמצעות משפט פיתגורס(מפורט במשימה 4).

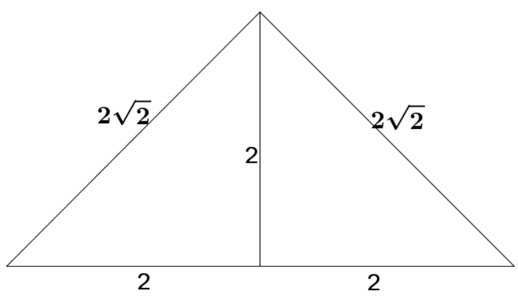
המשולש השני בסדרה כשני עותקים של המשולש הראשון



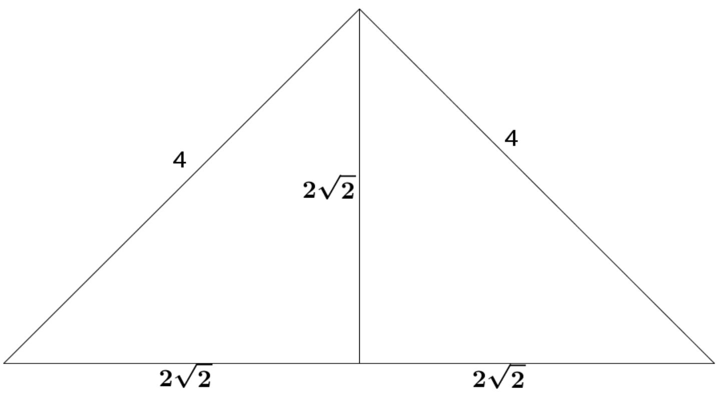
המשולש השלישי בסדרה כשני עותקים של המשולש השני



המשולש הרביעי בסדרה כשני עותקים של
המשולש השלישי



המשולש החמישי בסדרה כשני עותקים של המשולש הרביעי



מחשבים את אורכי היתרים, ההיקפים והשטחים על פי איורים אלו, כמתואר בטבלה בעמוד הבא:

	תיאור המשולש	אורך ניצב אחד	אורך ניצב שני	אורך יתר	היקף המשולש	שטח המשולש
1	המשולש הקטן (חלק של הטנגרם)	1	1	$\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}=$ 3.41	0.5
2	המשולש הבינוני (חלק של הטנגרם)	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	$2\cdot\sqrt{2}+2=$ 4.83	1
3	המשולש הגדול (חלק של הטנגרם)	2	2	$2\cdot\sqrt{2}$	$4+2\cdot\sqrt{2}=$ 6.83	2
4	משולש הבנוי מחמישה חלקים (ללא שני המשולשים הגדולים)	$2\cdot\sqrt{2}$	$2\cdot\sqrt{2}$	4	$4\cdot\sqrt{2}+4=$ 9.66	4
5	משולש הבנוי מכל שבעת חלקי הטנגרם	4	4	$4\cdot\sqrt{2}$	$8+4\cdot\sqrt{2}=$ 13.66	8

.3 להלן מספר תכונות של המשולשים:

- כל המשולשים הם שווי שוקיים
- כל המשולשים הם ישרי זווית וזוויות הבסיס הם $45°$
- באמצעות הצמדה בניצב של שני עותקים של אותו משולש, מקבלים את המשולש הבא בסדרה
- אורך ניצב במשולש שווה לאורך היתר של המשולש הקודם לו בסדרה
- אורך היתר במשולש שווה לסכום אורכי הניצבים של המשולש הקודם לו בסדרה
- אורך היתר במשולש גדול פי $\sqrt{2}$ מאורך ניצב (מפורט במשימה 4).

(תכונות נוספות מצויינות במשימה 5).

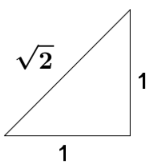
.4 היחס בין אורך היתר לאורך ניצב הוא $1:\sqrt{2}$.

הסבר: מסמנים את אורך הניצבים ב- a.

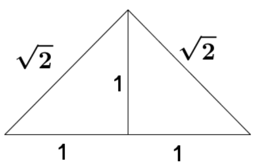
על פי משפט פיתגורוס אורך היתר הינו $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

לכן היחס בין אורך היתר לאורך ניצב הוא $\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$

.5 א,ב. בוחרים משולש כלשהו בסדרה וקובעים את אורך הניצב שלו כיחידה



המשולש הבא בסדרה נוצר על ידי הצמדה בניצב של שני עותקים של משולש זה



- יחס אורכי הניצבים הינו $\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$
- יחס אורכי היתרים הינו $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
- יחס ההיקפים הינו $\frac{2+2\cdot\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+2)}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
- יחס השטחים הינו $\frac{1}{0.5}=2$

ג. יחס אורכי הצלעות זהה ליחס היקפי המשולשים (ושווה ל- $\sqrt{2}$).
למעשה בכל זוג משולשים דומים יחס ההיקפים זהה ליחס הדמיון , וזהות זו נובעת מכך שההיקף הוא למעשה סכום אורכי הצלעות.

ד. יחס השטחים (שהינו 2) הוא ריבוע היחס בין אורכי צלעות המשולשים (שהינו $\sqrt{2}$).

6. א. אורך היתר גדל פי $\sqrt{2}$ ממשולש אחד למשולש הבא אחריו בסדרה . במשולש הראשון בסדרה אורך היתר הוא $\sqrt{2}$ ולכן במשולש העשירי בסדרה אורך היתר הינו $(\sqrt{2})^{10}=\left[(\sqrt{2})^2\right]^5=2^5=32$

אורך ניצב גדל פי $\sqrt{2}$ ממשולש אחד למשולש הבא אחריו בסדרה. במשולש הראשון בסדרה אורך ניצב הוא 1 ולכן במשולש העשירי בסדרה אורך ניצב הינו $1\cdot(\sqrt{2})^9=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^8=\sqrt{2}\cdot 16$

ב. משיקולים דומים מסיקים כי אורך היתר במשולש ה-n הינו $(\sqrt{2})^n$

ואורך ניצב במשולש ה- n הינו $(\sqrt{2})^{n-1}$

7. נוסחאות מתאימות להכנת הטבלה.

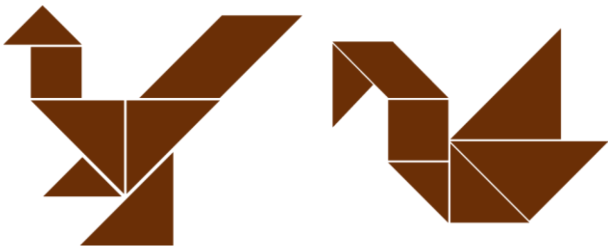
	A	B	C	D	E	F
1	משולש	אורך ניצב אחד	אורך ניצב שני	אורך היתר	היקף המשולש	שטח המשולש
2	1	1	1	=SQRT(2)	=B2+C2+D2	=B2*C2/2
3	2	=D2	=D2	=B2+C2	=B3+C3+D3	=B3*C3/2

טבלה עד המשולש במקום ה- 16 בטבלה.

	A	B	C	D	E	F
1	משולש	אורך ניצב אחד	אורך ניצב שני	אורך היתר	היקף המשולש	שטח המשולש
2	1	1	1	1.41	3.41	0.5
3	2	1.41	1.41	2	4.83	1
4	3	2	2	2.83	6.83	2
5	4	2.83	2.83	4	9.66	4
6	5	4	4	5.66	13.66	8
7	6	5.66	5.66	8	19.31	16
8	7	8	8	11.31	27.31	32
9	8	11.31	11.31	16	38.63	64
10	9	16	16	22.63	54.63	128
11	10	22.63	22.63	32	77.25	256
12	11	32	32	45.25	109.25	512
13	12	45.25	45.25	64	154.51	1024
14	13	64	64	90.51	218.51	2048
15	14	90.51	90.51	128	309.02	4096
16	15	128	128	181.02	437.02	8192
17	16	181.02	181.02	256	618.04	16384

1. א. 4 ב. 9 ג. 16 ד. 5^n

2. א. $x = 6$ ב. $x = 4$



למסיימים

בנו בעזרת חלקי הטנגרם סדרה של ריבועים.

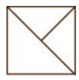
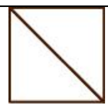
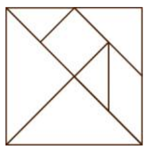
ארגנו את ממצאיכם בטבלה הבאה:

	תיאור הריבוע	צלע ריבוע	היקף הריבוע	שטח הריבוע
1				

נסו להמשיך את הטבלה, ולמצוא ביטויים אלגבריים המתארים את מידות הריבועים.

(**תשובות**:

(שימו לב שאורך צלע הריבוע היא כאורכי הניצבים של המשולשים בטבלה שבמשימה 2).

	תיאור הריבוע	צלע הריבוע	היקף הריבוע	שטח הריבוע
1	ריבוע קטן (של הטנגרם) 	1	4	1
2	ריבוע בינוני (למשל, משני משולשים קטנים ומשולש בינוני) 	$\sqrt{2}$	$4\cdot\sqrt{2}$	2
3	ריבוע גדול (הבנוי משני משולשים גדולים  או או הבנוי מחמשת חלקי הטנגרם (ללא המשולשים הגדולים) 	2	8	4
4	ריבוע הבנוי מכל שבעת חלקי הטנגרם 	$2\cdot\sqrt{2}$	$8\cdot\sqrt{2}$	8
n	ריבוע כללי	$(\sqrt{2})^{n-1}$	$4\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$	2^{n-1}

לסיכום

מבטאים קשרים בין משולשים שונים בסדרה.

- קשרים בין אורכי ניצבים ויתרים באותו משולש
- קשרים בין אורכי ניצבים ויתרים בין משולשים שונים
- קשרים בין היקפים ושטחים בין משולשים שונים
- מציאת ביטויים אלגבריים לאורכי הצלעות ושטח המשולש
- הקשר בין יחס הדמיון של זוג משולשים ליחס השטחים שלהם.

מדגימים קשרים אלו בטבלה שבמשימה 2, ומסבירים אותם באמצעות שרטוט גיאומטרי (כדוגמת אלו שבמשימה 2 במדריך למורה) ובאמצעות הביטויים האלגבריים (משימה 6).