2.3 משחקי הסתברות

מטרות

- התנסות ושימוש בשיקולים הסתברותיים
- הצגת ההסתברות ככלי לניתוח משחקים
- בניית מרחב מדגם של כל התוצאות האפשריות
- בנייה של משחקי קובייה
- הצגת ההסתברות ככלי לבניית משחקים הוגנים.

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (למשל, *Excel*).

פתיחה

קוראים את הוראות המשחק הראשון ומדגימים אותו. ניתן לשנות את סדר המשחקים בפעילות.

פתרונות והערות

3. א.

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

ב.

סכום	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
הסתברות	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ג. מומלץ לפזר את הדסקיות על הלוח בהתאם להסתברות לקבלת כל סכום.

במקרה של 100 דסקיות, כדאי לפזר את הדסקיות באופן הבא:

סכום	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
מספר דסקיות	2-3	5-6	8-9	11-12	13-14	16-17	13-14	11-12	8-9	5-6	2-3

6. א.

•	1	2	3	4	5	6
1	פ	ז	פ	ז	פ	ז
2	ז	ז	ז	ז	ז	ז
3	פ	ז	פ	ז	פ	ז
4	ז	ז	ז	ז	ז	ז
5	פ	ז	פ	ז	פ	ז
6	ז	ז	ז	ז	ז	ז

ב. ההסתברות לקבלת מכפלה זוגית היא $\frac{3}{4}$, ולקבלת מכפלה אי-זוגית היא $\frac{1}{4}$.

ג. ההסתברות לקבל תוצאה זוגית גדולה פי 3 מההסתברות לקבל תוצאה אי- זוגית, ולכן המשחק אינו הוגן ומוטה לטובת השחקן הזוגי.

הערה: תלמידים עשויים להיות מופתעים מכך שהמשחק אינו הוגן, אף-על-פי שכמויות המספרים הזוגיים והאי-זוגיים הרשומים על הקובייה שוות. ההסתברות השונה לקבלת כל אחת מהתוצאות נובעת מהתכונות של כפל מספרים זוגיים ואי-זוגיים:

•	זוגי	אי-זוגי
זוגי	ז	ז
אי-זוגי	ז	פ

7. ב. דרך כללית לבנות קוביות כך שהמשחק יהיה הוגן הוא לרשום בקובייה אחת מספרים אי-זוגיים בלבד, ובקובייה השנייה מספרים זוגיים ואי-זוגיים בכמויות שוות.

דוגמה:

קובייה א'	11	7	23	31	67	1
קובייה ב'	13	18	42	99		

במקרה זה מספר האפשרויות לקבלת תוצאה זוגית או אי-זוגית הוא זהה ושווה ל- 12.

10. א.

שחקן כפליים	
כפל ב- 2	**מספר**
2	1
4	2
6	3
8	4
10	5
12	6

שחקן הסכום						
+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

ב.

מס' אפשרויות לתיקו	מס' אפשרויות לזכייה של *שחקן כפליים*	מס' אפשרויות לזכייה של *שחקן הסכום*	תוצאות אפשריות *לשחקן כפליים*
1	0	35	**1 × 2 = 2**
3	3	30	**2 × 2 = 4**
5	10	21	**3 × 2 = 6**
5	21	10	**4 × 2 = 8**
3	30	3	**5 × 2 = 10**
1	35	0	**6 × 2 = 12**
18	99	99	**סה"כ**

מס' אפשרויות כולל: 204 (= 36·6)

הערה: כדי לסייע על הכנת הטבלה, מומלץ לפני-כן לרשום את מספר הפעמים שמתקבל כל סכום (מ- 2 ועד 12) בהטלת שתי קוביות.

11. א. לשני השחקנים יש 99 אפשרויות לזכות בנקודה.

ב. לשני השחקנים יש הסתברות של $0.46 \approx \frac{11}{24} = \frac{99}{216}$ לזכות בנקודה.

ג. המשחק הוגן משום שלשני השחקנים יש אותה הסתברות לזכות בנקודה.

לוח המתאים להטלת זוג קוביות רגילות ומציאת סכומם מופיע במשימה 3. להלן, לוח המתאים ל סכומי המספרים הרשומים על קוביות סיצ'רמן:

+	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	**סכום**
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**הסתברות**

טבלה זו אכן זהה לטבלה המוצגת בסעיף ב.3.

שומרים על כושר

1. א.

$+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{2}$	ג	ג	ג	ג	ג	ג
$\frac{1}{3}$	ג	ג	ג	ג	$\frac{1}{2}$	ק
$\frac{1}{4}$	ג	ג	$\frac{1}{2}$	ק	ק	ק
$\frac{1}{5}$	ג	ג	ק	ק	ק	ק
$\frac{1}{6}$	ג	$\frac{1}{2}$	ק	ק	ק	ק
$\frac{1}{7}$	ג	ק	ק	ק	ק	ק

ק – קטן מ- $\frac{1}{2}$

ג – גדול מ- $\frac{1}{2}$

ב. ההסתברות לקבלת תוצאה גדולה מ- $\frac{1}{2}$ היא $\frac{16}{36}$, ואילו ההסתברות לקבלת תוצאה קטנה מ- $\frac{1}{2}$ היא $\frac{17}{36}$,

ולכן המשחק אינו הוגן ומוטה לטובת שחקן ב.

2. א.

$\bullet$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$	ק	ק	ק	ק	ק	ק
$\frac{2}{3}$	ק	ק	ק	1	ג	ג
$\frac{3}{4}$	ק	ק	ק	ג	ג	ג
$1\frac{1}{2}$	ק	1	ג	ג	ג	ג
$1\frac{2}{3}$	ק	ג	ג	ג	ג	ג
$1\frac{3}{4}$	ק	ג	ג	ג	ג	ג

ק – קטן מ-1

ג – גדול מ- 1

ב. ההסתברות לקבלת תוצאה גדולה מ- 1 היא $\frac{19}{36}$, ואילו ההסתברות לקבלת תוצאה קטנה מ- 1 היא $\frac{15}{36}$,

ולכן המשחק אינו הוגן ומוטה לטובת שחקן א'.

למסיימים

1. **משחק רביעי**

במשחק זה מטילים קובייה אחת. בכל סיבוב:

- שחקן א' כופל את המספר שהתקבל בהטלת הקובייה ב- $3\frac{1}{2}$.
- שחקן ב' מעלה בריבוע את המספר שהתקבל בהטלת הקובייה, אך אם המספר שהתקבל הוא 4 התוצאה של שחקן זה היא 0.
- השחקן בעל התוצאה הגבוהה יותר זוכה בנקודה אחת

מנצח: השחקן שצבר את מירב הנקודות לאחר 15 סיבובים.

א. האם המשחק הוגן?

ב. משנים את הכלל לקבלת נקודות, וכעת בכל סיבוב כל שחקן מקבל מספר נקודות השווה לתוצאה שחישב
שחקו מספר פעמים את המשחק עם הכלל החדש.
האם תחת הכלל החדש, המשחק הוגן?

2. רושמים על שש פיאותיה של קובייה (הוגנת) את המספרים הבאים: 3, 5, 6, 9, 11, 14.

א. מה ההסתברות לקבל את התוצאה 6?

ב. מה ההסתברות לקבל את התוצאה 4?

ג. מה ההסתברות לקבל תוצאה גדולה מ- 6?

ד. מה ההסתברות לקבל תוצאה אי-זוגית?

ה. מה ההסתברות לקבל מספר דו-ספרתי?

ו. מה ההסתברות לקבל מספר שסכום ספרותיו הוא 5?

ז. מה ההסתברות לקבל מספר ראשוני?

3. בכל סעיף, רשמו על קובייה ריקה 6 מספרים (מספר אחד על כל פיאה), כך שהקובייה תקיים את התנאי הרשום.

א. ההסתברות לקבל את התוצאה 7 הוא $\frac{1}{6}$.

ב. ההסתברות לקבל תוצאה גדולה מ- 9 הוא $\frac{1}{2}$.

ג. ההסתברות לקבל תוצאה קטנה מ- 1 הוא $\frac{1}{2}$.

ד. ההסתברות לקבל את התוצאה 3 הוא $\frac{1}{3}$.

ה. ההסתברות לקבל תוצאה זוגית שווה להסתברות לקבל תוצאה שהיא כפולה של 3.

תשובות:

1. להלן טבלה המסכמת את האפשרויות במשחק

תוצאת ההטלה	התוצאה על פי החוק המתאים לשחקן א'	התוצאה על פי החוק המתאים לשחקן ב'
1	$3\frac{1}{2}$	1
2	7	4
3	$10\frac{1}{2}$	9
4	14	0
5	$17\frac{1}{2}$	25
6	21	36

א. ההסתברות של שחקן א' לזכות בנקודה הוא $\frac{2}{3}$ ושל שחקן ב' הוא $\frac{1}{3}$, ולכן המשחק אינו הוגן ומוטה לטובת שחקן א'.

ב. מחשבים את מספר הנקודות שמתקבל בממוצע להטלת קובייה (כלומר חישוב התוחלת). ההסתברות לקבלת כל אחד מהמספרים (1-6) בקובייה הוא $\frac{1}{6}$. ולכן,

עבור שחקן א' התוחלת היא $\frac{1}{6}\cdot(3\frac{1}{2}+7+10\frac{1}{2}+14+17\frac{1}{2}+21)=12.25$

עבור שחקן ב' התוחלת היא $\frac{1}{6}\cdot(1+4+9+0+25+36)=12.5$

במשחק זה יש לשחקן ב' יתרון (מועט) על פני שחקן א', ולכן גם משחק זה אינו הוגן, אך הפעם מוטה לטובת שחקן ב'.

2. א. $\frac{1}{6}$ ב. 0 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. $\frac{1}{3}$ ו. $\frac{1}{3}$ ז. $\frac{1}{2}$

3. א. קובייה עליה רשום המספר 7 בדיוק פעם אחת.
דוגמה: 3, 3, 7, 12, 14, 14

ב. קובייה עליה רשומים שלושה מספרים גדולים מ-9 ושלושה מספרים קטנים או שווים ל-9.
דוגמה: 3, 3, 7, 12, 14, 14

ג. קובייה עליה רשומים שלושה מספרים קטנים מ-1 ושלושה מספרים גדולים או שווים ל-1.
דוגמה: -3, -3, -7, 12, 14, 14

ד. קובייה שבה רשום המספר 3 בדיוק פעמיים.
דוגמה: 3, 3, 7, 12, 14, 14

ה. קובייה שבה מספר הפעמים שמופיע מספר זוגי זהה למספר הפעמים שמופיעה כפולה של 3.
(שימו לב, כפולות של 6 הן גם מספר זוגי וגם כפולה של 3).
דוגמה: 3, 3, 7, 12, 14, 14

לסיכום

דנים בהבדל שבין ההסתברויות לקבלת תוצאת משחק מסוימת, ובין השכיחות היחסית של תוצאת משחק המתקבלת אם משחקים את המשחק בפועל:

- האם יתכן כי במשחק לא הוגן (למשל, משחק *מכפלת זוג או פרט*) השחקן שהמשחק לרעתו (כמו *השחקן האי-זוגי*) ינצח בכל זאת? ומה לגבי רצף של משחקים?
- האם יתכן כי במשחק הוגן (למשל, משחק *סכום או כפליים*) המשחקים אותו 10 פעמים בזה אחר זה, אותו שחקן ינצח בכל המשחקים? האם ייתכן ניצחון חוזר אם משחקים אותו 100 פעמים?