4.4 מספרים עוקבים II

מטרות

- גילוי, הכללה והנמקה של חוקיות
- הכללה אלגברית של חוקיות
- שימוש באלגברה להוכחת חוקיות
- פתרון משוואות על סמך שיקולים
- פישוט ביטויים אלגבריים.

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (למשל, *Excel*)

פתיחה

מדגימים את משימה 1.א. באמצעות שתי דוגמאות.

פתרונות והערות

1. ב. בשלשות של מספרים עוקבים, ההפרש בין ריבוע המספר האמצעי למכפלת שני המספרים הקיצוניים הוא 1.

ג. מסמנים את המספר האמצעי ב- x.

שלושת המספרים העוקבים הם $x-1,\ x,\ x+1$

הפרש המכפלות הוא $x^2-(x+1)(x-1)=1$

2. ב. ברביעיות של מספרים עוקבים , ההפרש בין מכפלת שני המספרים האמצעיים למכפלת שני המספרים הקיצוניים הוא 2.

ג. מסמנים את המספר הקטן ב- x.

ארבעת המספרים העוקבים הם $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$

הפרש המכפלות הוא $(x+1)(x+2)-x(x+3)=2$

3. ב. ברביעיות של מספרים בדילוגים של 2, ההפרש בין מכפלת שני המספרים האמצעיים למכפלת שני המספרים הקיצוניים הוא 8.

ג. מסמנים את המספר הקטן ב- x.

ארבעת המספרים בסדרה הם $x,\ \ x + 2,\ \ x + 4,\ \ x + 6$

הפרש המכפלות הוא $(x+2)(x+4)-x(x+6)=8$

4. ב. ברביעיות של מספרים בדילוגים של 3, ההפרש בין מכפלת שני המספרים האמצעיים למכפלת שני המספרים הקיצוניים הוא 18.

ג. מסמנים את המספר הקטן ב- x.

ארבעת המספרים בסדרה הם $x,\ \ x + 3,\ \ x + 6,\ \ x + 9$

הפרש המכפלות הוא $(x+3)(x+6)-x(x+9)=18$

5,6 ברביעיות של מספרים בדילוגים שגודלם d, ההפרש בין מכפלת שני המספרים האמצעיים למכפלת שני המספרים הקיצוניים הוא $2d^2$.

מסמנים את המספר הקטן ב- x.

ארבעת המספרים בסדרה הם $x,\ \ x + d,\ \ x + 2d,\ \ x + 3d$

הפרש המכפלות הוא $(x+d)(x+2d)-x(x+3d)=2d^2$

הערה: ההצדקה האלגברית מראה כי הטענה נכונה לכל ערך שנציב עבור x ולאו דווקא לערכים שלמים.

פתרון אלגברי נוסף*

מסמנים ב- a את הממוצע של ארבעת המספרים בסדרה.

ארבעת המספרים בסדרה הם $a – 1.5d.\ a – 0.5d,\ a + 0.5\ d,\ a+1.5d$

הפרש המכפלות הוא $(a – 0.5d)(a + 0.5\ d) – (a – 1.5d)(\ a+1.5d) = 2d^2$

7. א. זו רביעיית מספרים בדילוגים של 4, ולכן הפרש המכפלות הוא $2\cdot 4^2=32$

ב. זו רביעיית מספרים בדילוגים של 10, ולכן הפרש המכפלות הוא $2\cdot 10^2=200$

8. א. הביטוי באגף שמאל של המשוואה הוא הפרש המכפלות כאשר רביעיית המספרים היא בדילוגים של 3.

לכן עבור כל ערך של x, תוצאת ההצבה בביטוי השמאלי של המשוואה הינה $2\cdot 3^2=18$

מאחר שהאגף הימני של המשוואה הוא גם כן 18, כל מספר הוא פתרון של המשוואה.

ב. הביטוי באגף שמאל של המשוואה הוא הפרש המכפלות כאשר רביעיית המספרים היא בדילוגים של 5.

לכן עבור כל ערך של x, תוצאת ההצבה בביטוי השמאלי של המשוואה הינה $2\cdot 5^2=50$

מאחר שהאגף הימני של המשוואה הוא 10, ואגפה השמאלי 50, אין פתרון למשוואה זו.

* פתרון זה הוצע על ידי ג'ייסון קופר מהמחלקה להוראת המדעים, מכון וייצמן

שומרים על כושר

1. יש 3 סוגים שונים של משוואות אפשריות לסעיפים א-ב, ו- 6 סוגים שונים של משוואות אפשריות לסעיפים ג-ד.

סעיפים א-ב

$x(x-2) = (x+2)(x+4)$	$x = -1$
$(x-2)(x+2) = x(x+4)$	$x = -1$
$(x-2)(x+4) = x(x+2)$	אין פתרון

סעיפים ג-ד

$x(x-2) - (x+2)(x+4) = 8$	$x = -2$
$(x+2)(x+4) - x(x-2) = 8$	$x = 0$
$(x-2)(x+2) - x(x+4) = 8$	$x = -3$
$x(x+4) - (x-2)(x+2) = 8$	$x = 1$
$(x-2)(x+4) - x(x+2) = 8$	אין פתרון
$x(x+2) - (x-2)(x+4) = 8$	כל מספר

2. א. לדוגמה: $(x-1)(x-6) = x^2 - 7x + 6$

   ב. לדוגמה: $(x-3.5)(x-3.5) = x^2 - 7x + 12.25$

   ג. לדוגמה: $(x-20)(x+13) = x^2 - 7x - 260$

   ד. לדוגמה: $(x-11.5)(x+4.5) = x^2 - 7x - 51.75$

3. לדוגמה: $x,\ 16x+2$ $2x,\ 8x+1$ $16,\ x^2+\frac{x}{8}$ $1,\ 16x^2+2x$

   $7,\ \frac{16x^2+2}{7}$ $10x,\ 1.6x+0.2$ $x^3,\ \frac{16}{x}+\frac{2}{x^2}$

חידה

מספר האפסים בסוף תוצאת המכפלה שווה למספר הפעמים שבהם 10 מופיע כגורם שלה – וזהו מספר הפעמים שהזוג 2, 5 מופיע בפירוק לגורמים ראשוניים של המכפלה.

מאחר שכל מספר שני במכפלה הוא זוגי, 2 מופיע בפירוק לגורמים ראשוניים יותר פעמים מאשר 5. לכן מספיק לחפש את מספר הפעמים ש- 5 מופיע בפירוק לגורמים ראשוניים.

מספר הפעמים ש- 5 מופיע בפירוק לגורמים ראשוניים הוא 12 (עד 50 יש 10 כפולות של 5, ובנוסף 25, 50 "תורמים" שני גורמים של 5), ולכן בסופה של המכפלה יהיו 12 אפסים.

למסיימים

בוחרים חמישיות של מספרים עוקבים:

- כופלים את שני המספרים הצמודים למספר האמצעי
- כופלים את שני המספרים הקיצוניים
- מוצאים את ההפרש בין המכפלה הראשונה והשנייה

א. בחרו חמישיות של מספרים עוקבים ובצעו את תהליך החישוב המתואר לעיל.

ב. מצאו חוקיות והצדיקו אותה באופן אלגברי.

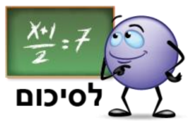
תשובה:

ההפרש בין המכפלות הוא 3, בלי תלות במספרים שנבחרו.

מסמנים את המספר הקטן ב- x.

חמשת המספרים העוקבים הם $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ x+4$

הפרש המכפלות הוא $(x+1)(x+3)-x(x+4)=3$



לסיכום

דנים על משימה 5 (או משימה 6) – בהכללה של החוקיות לרביעיות עם דילוגים שונים ובהצדקה להכללה זו

מדגימים את משמעות ההכללה באמצעות דוגמאות של רביעיות מספרים עם הפרשים שונים