4.5 על מכפלות

- פתרון בעיות מילוליות לא שגרתיות
- פתרון בעיות מספריות באמצעות שיקולים מספריים, חיפוש שיטתי ומיצוי אפשרויות
- יישום מושגים הקשורים לתכונות של מספרים טבעיים (למשל, מכפלה, כפולות, גורמים ועצרת).

גיליון אלקטרוני (למשל, *Excel*)

מציגים את השאלה הבאה:

מצאו את המספר הגדול ביותר בעל התכונות הבאות:

- בעל 16 ספרות

- מכפלת הספרות היא 2,016.

מבקשים מהתלמידים הצעות לפתרון ומציגים דרך פתרון לא אלגברית
תוך כדי הצגת הפתרון, מזכירים מושגים מתחום המספרים, כגון: מספר ראשוני, פירוק לגורמים ראשוניים, כפולה של מספר וכו'.

תשובה:

מפרקים את 2016 לגורמים $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

(כדי לפרק בתחילה מחלקים ב- 2 חמש פעמים וב- 3 פעמיים)

למספר זה יש 8 גורמים ראשוניים. על מנת לבנות מספר בעל 16 ספרות מבלי לשנות את ערך המכפלה מצרפים 8 גורמים שהם 1.

אי-לכך מסיקים כי ספרות המספר הם 1,1,1,1,1,1,1,1,2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 7

וכדי לקבל את המספר הגדול ביותר מספרות אלו מסדרים אותן מהגדול לקטן 7,332,222,211,111,111

1. א. מספר האפסים בסוף תוצאת המכפלה שווה למספר הפעמים שבהם 10 מופיע כגורם שלה – וזהו מספר הפעמים שהזוג 2, 5 מופיע בפירוק לגורמים ראשוניים של המכפלה.
מאחר שכל מספר שני במכפלה הוא זוגי , 2 מופיע בפירוק לגורמים ראשוניים יותר פעמים מאשר 5. לכן מספיק לחפש את מספר הפעמים ש- 5 מופיע בפירוק לגורמים ראשוניים.

מספר הפעמים ש- 5 מופיע בפירוק לגורמים ראשוניים הוא 6 (עד 27 יש 5 כפולות של 5, ו- 25 "תורם" גורם נוסף של 5). לכן בסופה של המכפלה יהיו 6 אפסים.

ב. משיקולים דומים למשימה 1.א המספר הקטן ביותר שבעצרת שלו מופיעים 8 אפסים הוא $n = 35$.
מאחר שהמספרים 36, 37, 38, 39 אינם "תורמים" גורמים של 5, מספר האפסים בעצרות של מספרים אלה הוא גם כן 8.

ג. מצמצמים את השבר ומקבלים

$$\frac{40!}{30!}=\frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot29\cdot30}\cdot31\cdot\ldots\cdot40}{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot29\cdot30}}=31\cdot\ldots\cdot40$$

במכפלה זו, הגורם 5 מופיע פעמיים (נתרם מהמספרים 35, 40) ולכן בסופה של תוצאת החילוק הבאה יהיו 2 אפסים.

ד. במכפלה זו, הגורם 5 מופיע פעמיים (נתרם מהמספרים 10, 20) ולכן בסופה של מכפלה זו יהיו 2 אפסים.

2. מרכיבים את המספר בחיפוש שיטתי.

בודקים את המיקום של הספרה 7:

- הזוגות היחידים עם הספרה 7 הם 27 או 72. לכן 7 אינו יכול להופיע באמצע המספר.
- אם 7 מופיע בקצה השמאלי, המספר חייב להיראות כך: _ _ 4 2 7.

  במקרה זה, האפשרויות הן: <u>6</u> <u>3</u> 4 2 7, <u>3</u> <u>6</u> 4 2 7, אך אף אחת מהן אינה מתאימה.
- אם 7 מופיע בקצה הימני, יש שתי אפשרויות:

  אפשרות א: _ _ 3 2 7 . במקרה זה הצירופים האפשריים הם: <u>4</u> <u>6</u> 3 2 7, <u>6</u> <u>4</u> 3 2 7

  אפשרות ב: _ _ 4 2 7 . במקרה זה הצירופים האפשריים הם: <u>3</u> <u>6</u> 4 2 7, <u>6</u> <u>3</u> 4 2 7

  המספר היחידי המתאים מבין ארבע אפשרויות אלה הוא **36427**.

3. א. מפרקים את 720 למכפלת גורמים ראשוניים $720=2^4\cdot3^2\cdot5$

כל מכפלה של שלושה מספרים (שונים מ- 1) שתוצאתם 720, מתפרקת לגורמים ראשוניים אלו.

ניתן להיעזר בפרוק זה כדי למצוא את שלשת המספרים הדרושים.

לדוגמה $720=2^4\cdot3^2\cdot5=5\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot2\cdot2\cdot2)=5\cdot6\cdot24$

דוגמאות נוספות: $720=5\cdot8\cdot18=2\cdot18\cdot20=1\cdot10\cdot72$

ב. כדי לקבל שלושה גורמים שווים ש<u>מכפלתם</u> 720, מחשבים שורש שלישי של 720. $\sqrt[3]{720}\approx8.96$

בכל מכפלה שתוצאתה 720, אם אחד הגורמים גדול מ- 8.96 אז בהכרח הגורם הקטן יהיה קטן מ - 8.96.

לכן הגורם הקטן ביותר במכפלה הוא לכל היותר 8.

ואכן קיימת מכפלה שבה הגורם הקטן הוא 8: $720=8\cdot9\cdot10$

ולכן הערך הגדול ביותר האפשרי עבור x (כלומר, עבור הגורם הקטן ביותר) הוא 8.

4. גילה של אילנה בעוד שנה הוא כפולה זוגית של 11 (כפולות אי-זוגיות של 11 יוצרות גיל שהוא מספר זוגי – ולכן הגיל של אילנה בשנה שלפני כן לא יהיה ראשוני).

ממצים את האפשרויות השונות באמצעות טבלה:

הגיל של אילנה בעוד שנה	22	44	66	88	110
הגיל של אילנה כיום	21	43	65	87	109
האם זהו מספר ראשוני?	לא	כן	לא	לא	כן
הגיל של יונתן כיום (צעיר בשנתיים מאילנה)		41			107
האם זהו מספר ראשוני?		כן			כן
הגיל של יונתן בעוד שנה		42			108
האם זהו מכפלה של שני מספרים עוקבים?		6×7			לא

מכאן שבשנה הזאת יונתן בן 41, ואילנה בת 43

5. נסמן את שלוש הספרות ב- x, y, z.

ששת המספרים שניתן לבנות באמצעות ספרות אלה הם:

$\overline{xyz}\ ,\ \overline{xzy}\ ,\ \overline{yxz}\ ,\ \overline{yzx}\ ,\ \overline{zxy}\ ,\ \overline{zyx}$

(הקו מעל המספרים מציין מספר תלת-ספרתי ונועד לציין שזאת אינה מכפלה)

סכום האחדות של ששת המספרים הוא $2(x + y + z)$

סכום העשרות של ששת המספרים הוא $10\cdot 2(x + y + z)$

סכום המאות של ששת המספרים הוא $100\cdot 2(x + y + z)$

לפיכך, סכום ששת המספרים הוא $222\cdot(x + y + z)$

מפרקים את 222 לגורמים $222 = 2\cdot 3\cdot 37$

מחפשים ערכים אפשריים לסכום $(x + y + z)$ כך שנוכל לכתוב את המכפלה $2\cdot 3\cdot 37\cdot(x + y + z)$ כמכפלה של שני מספרים עוקבים.

קיימות שתי אפשרויות לחלוקת גורמי המכפלה הזאת לשתי קבוצות שייצרו שני גורמים עוקבים

אפשרות א':

אחד הגורמים הוא 37 והגורם השני נוצר מכל האחרים

כלומר, הפרוק לשני גורמים הוא $\left[(x+y+z)\cdot 6\right]\cdot 37$

במקרה זה הגורם השני (שהוא מספר עוקב ל- 37 או קודם לו) הוא 38 או 36.

- הגורם השני אינו יכול להיות 38 (כי אז $(x + y + z)$ הוא מספר לא שלם)
- אם הגורם השני הוא 36, אז $x + y + z = 6$ והספרות הן 1, 2, 3.

אפשרות ב':

אחד הגורמים הוא 74 ($2\cdot 37 =$) והגורם השני נוצר מכל האחרים

כלומר, הפרוק לשני גורמים הוא $\left[(x+y+z)\cdot 3\right]\cdot 74$

במקרה זה, הגורם השני (שהוא מספר עוקב ל- 74 או קודם לו) הוא 75 או 73.

- הגורם השני אינו יכול להיות 75 משום שבמקרה כזה $(x + y + z)$ צריך להיות 25, והסכום הגדול ביותר האפשרי של שלוש ספרות שונות הוא $7 + 8 + 9 = 24$
- הגורם השני אינו יכול להיות 73 משום שבמקרה כזה $(x + y + z)$ הוא מספר לא שלם.

מכאן ששלוש הספרות שרויטל בחרה הן 3, 2, 1, סכום כל המספרים התלת-ספרתיים האפשריים משלוש ספרות אלו הוא 1332, והוא אכן ניתן לכתיבה כמכפלת שני מספרים עוקבים: $1332 = 36{\cdot}37$

6.[*] הספרות שמרכיבות את המספר הן הספרות מ- 0 ועד 9, כאשר כל אחת מופיעה פעם אחת בדיוק.

נסמן את סכום הספרות במקומות האי-זוגיים במספר המבוקש כ- A, ואת סכום הספרות במקומות הזוגיים כ- B.

על-פי סימני החילוק ב- 11, ההפרש בין A ל- B הוא כפולה של 11.

בנוסף, הסכום של A ו- B (סכום הספרות מ- 0 ועד 9) הוא 45.

מרכיבים מערכת משוואות בשני משתנים, ומוצאים את A ו- B עבור כל כפולה של 11.

ההפרש בין A ל- B	0	11	22	33
מערכת משוואות	$A - B = 0$ $A + B = 45$	$A - B = 11$ $A + B = 45$	$A - B = 22$ $A + B = 45$	$A - B = 33$ $A + B = 45$
פתרון	$A = 22.5$ $B = 22.5$	**$A = 28$** **$B = 17$**	$A = 33.5$ $B = 11.5$	$A = 39$ $B = 6$

(הערה: ניתן להחליף את ההפרש $A - B$ בהפרש $B - A$, כלומר, להחליף בין הפתרונות שמתקבלים עבור A ו- B).

הפתרון היחידי המתאים לבעייה מתקבל כאשר ההפרש הוא 11, ובמקרה זה סכום הספרות במקומות האי-זוגיים הוא 28 וסכום הספרות במקומות הזוגיים הוא 17 (או, להיפך).

את 28 ניתן לקבל, למשל, מהספרות 0, 4, 7, 8, 9 ואת 17 מהספרות הנותרות 1, 2, 3, 5, 6.

שוזרים את הספרות מכל קבוצה בשיטת ריץ' -רץ' (סדר הספרות בכל קבוצה אינו משנה) והמספר שמתקבל מתחלק ב- 11. למשל, 4201738596 או 8641029375.

דרך פתרון נוספת

מרכיבים מהספרות 1-9 שלושה מספרים תלת- ספרתיים שמתחלקים ב- 11 (מספרים שההפרש בין סכום הספרות הקיצוניות לספרה האמצעית הוא 0 או 11), למשל, 924, 671, 385 [או 275, 396, 418].

- רושמים את שלושת המספרים בסמיכות זה לזה בסדר שבוחרים (ניתן להחליף גם בין הספרות הקיצוניות בכל מספר תלת-ספרתי),
- משבצים את הספרה 0 בין שני מספרים תלת-ספרתיים, או רושמים אותו בסוף המספר, המספר שמתקבל מתחלק ב- 11, למשל, 9246713850 או 1765830924.

---

[*] מבוסס על אולימפיאדת זוטא תשע"ג - שאלון לכיתה ז - שלב ב' – פתרונות, מכון דוידסון לחינוך מדעי
http://davidson.weizmann.ac.il/compzuta

שומרים על כושר

1. א. 7200 ב. 730 ג. 1440 ד. 26 ה. 72 ו. 6 ז. 30 ח. 15

2. א. $9! \boxed{<} 8!$ ג. $\frac{9!}{9} \boxed{=} 8!$ ה. $11! \boxed{=} 10!\cdot 11$ ז. $2! \boxed{>} \frac{12!}{6!}$

   ב. $9! \boxed{<} 8!\cdot 2$ ד. $\frac{9!}{9!} \boxed{=} \frac{8!}{8!}$ ו. $15! \boxed{>} 14!\cdot 20$ ח. $4! \boxed{>} \frac{8!}{4!}$

3. א. 6 ב. 4 ג. 9 ד. 0 ה. 0 ו. 5 ז. 0 ח. 5

חידה

נבדוק אם יש מספר בטווח 2999 – 2990 שמתאים כתשובה לשאלה.

סכום הספרות של 2990 הוא $2 + 9 + 9 + 0 = 20$

אם נחליף את ספרת האחדות ב- 5 נקבל מספר (2995) שסכום ספרותיו 25 (וזהו מספר ריבועי).

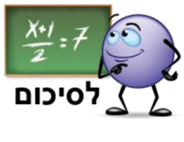
סכומי הספרות של מספרים שבין 2995 ו- 3000 הם קטנים מ- 36, ואינם מספרים ריבועיים.

לכן 2995 הוא "השנה המושלמת" האחרונה עד שנת 3000.

למסיימים

1. הרכיבו באמצעות הספרות מ- 1 עד 9 "מיקוד" בעל תשע ספרות, כך שכל שתי ספרות סמוכות במיקוד יוצרות מספר דו-ספרתי שהוא מכפלה של שני גורמים חד-ספרתיים.

   (**תשובה**: 728163549)
2. מצאו 5 פתרונות נוספים למשימה 6.
3. הבעייה במדריך המוצעת כפתיחה לפעילות, במקרה שלא הוצגה לתלמידים.



לסיכום

דנים עם התלמידים בנקודות הבאות:

- שאלות ופתרונות שמצאו חן בעיניהם
- האם אוסף של שאלות קצרות השונות זו מזו עדיף בעיניהם על פתרון שאלה אחת מורכבת וגדולה יותר
- שיטות פתרון שיושמו בבעיות השונות: חיפוש שיטתי ומיצוי אפשרויות, שימוש באלגברה, ניסוי וטעייה, הפעלת שיקולים

  האם שיטת הניסוי וטעיה היא דרך לגיטימית לפתרון בעיות? אם כן, באילו מקרים?