יחידה 6: חפיפה ודמיון משולשים, משולש שווה שוקיים

6.1 שני כבלים

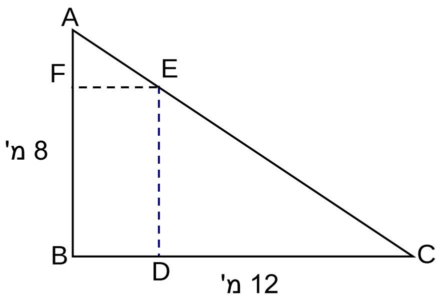
מטרות

- פתרון בעיה מורכבת בדרכים שונות המשלבות אלגברה, גיאומטריה (דמיון משולשים, שטחים), ופונקציה קווית
- פתרון בעיות באמצעות הוספת מערכת צירים לשרטוט גיאומטרי
- חקר של סיטואציה בה יש מרכיב שאינו תלוי בחלק מן הנתונים האחרים, וביטוייה הגיאומטרי והאלגברי של תופעה זו
- שימוש ביישומון ככלי לביצוע סימולציה של סיטואציית הבעיה ולהעלאת השערות.

אמצעי עזר

שימוש ביישומון "שני כבלים" באתר או לפי הכתובת http://ggbtu.be/mKe6t9hnl

פתיחה



מציגים לתלמידים את הבעיה הבאה:

בשרטוט שלפניכם הקטע AB מייצג מגדל של גלשן "אומגה" בגובה 8 מ'.

א. באיזה מרחק מהמגדל (EF) נמצא הגלשן לאחר שעבר רבע מהדרך?

ב. באיזה גובה מעל פני הקרקע (ED) נמצא הגלשן באותה נקודה?

תשובה:

פתרון גיאומטרי (דמיון משולשים)

משולשים $\triangle ABC$, ו- $\triangle AFE$ דומים. לכן, $\frac{AE}{AC}=\frac{EF}{BC}$

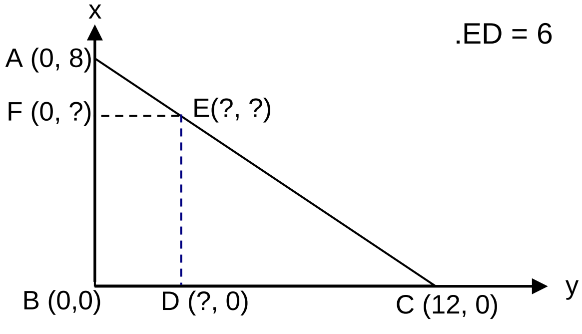
מציבים את הנתונים: BC=12 והיחס $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{4}$ ומקבלים, $EF = 3$

משולשים $\triangle ABC$, ו- $\triangle EDC$ דומים. לכן, $\frac{AB}{BC}=\frac{ED}{DC}$

מציבים $DC = 12 - 3 = 9$, $AB = 8,\ BC = 12$, ומקבלים, $ED = 6$.

פתרון אלגברי (משוואת הקו הישר)

משרטטים את נתוני הבעייה במערכת צירים באופן הבא,



בדומה לדרך הפתרון הקודמת מוצאים כי, $EF = 3$

לכן שיעורי נקודה D הם, $D(3, 0)$

ושיעור ה- x של נקודה E הוא 3.

מוצאים את משוואת הקו הישר AC על פי הנקודות A, C, $y=-\frac{2}{3}x+8$

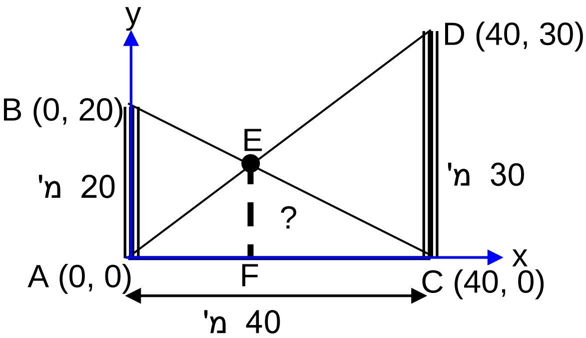
מציבים את שיעור ה- x של נקודה E, במשוואת הישר AC

ומקבלים, $y=-\frac{2}{3}\cdot 3+8=6$

ומכאן, $ED = 6$.

פתרונות והערות

1. דרך אלגברית



בונים מערכת צירים

מוצאים את משוואת הישר AD על פי הנקודות A, D:

$$y=\frac{3}{4}x$$

מוצאים את משוואת הישר BC על פי הנקודות B, C:

$$y=-\frac{1}{2}x+20$$

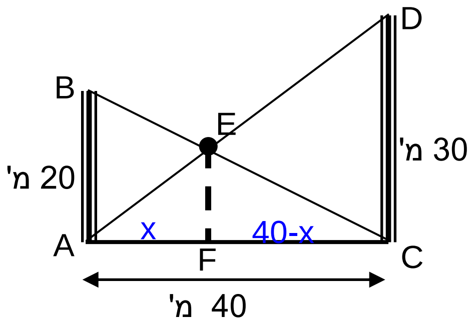
מוצאים את ערך ה-x של נקודת החיתוך (E) של שני הישרים AD, BC: $-\frac{1}{2}x+20=\frac{3}{4}x$

$$x_E=16$$

מציבים את התוצאה באחת המשוואות ומוצאים את ערך ה- y של הנקודה E: $y_E=\frac{3}{4}\cdot 16=12$

לכן אורך הקטע EF (גובה נקודת החיתוך בין שני הכבלים) הוא 12 מ'.

דרך גיאומטרית 1 (דמיון משולשים)



מסמנים ב- x את אורך הקטע AF.

מדמיון המשולשים $\triangle ABC$, $\triangle FEC$ (לפי משפט הדמיון "זווית– זווית") נובע היחס: $\frac{FC}{AC}=\frac{EF}{BA}$

מציבים את הנתונים: $\frac{40-x}{40}=\frac{EF}{20}$

פותרים ומקבלים, $EF=\frac{40-x}{2}$

באופן דומה, על סמך המשולשים $\triangle CDA$, $\triangle FEA$ (לפי משפט הדמיון "זווית– זווית") מסיקים: $\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{DC}$

מציבים את הנתונים: $\frac{x}{40}=\frac{EF}{30}$

ומקבלים, $EF=\frac{3}{4}x$

משווים בין שני הביטויים עבור EF,

$$\frac{40-x}{2}=\frac{3}{4}x\Rightarrow$$

$$x=AF=16$$

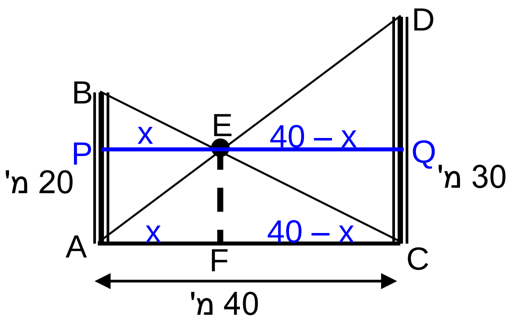
מציבים את הערך שהתקבל באחד הביטויים ומקבלים:

$$EF=\frac{3}{4}\cdot16=12$$

גובה נקודת המפגש הוא 12 מ'.

דרך גיאומטרית 2 (שטחים)

מעבירים קו מקביל ל- AC דרך E ומסמנים ב- x את AF.



מחסרים משטח משולש $\triangle ACD$ את שטח משולש $\triangle DEC$ ומקבלים ששטח משולש $\triangle AEC$ הוא,

$$S_{\triangle AEC}=15x$$

מחסרים משטח משולש $\triangle BAC$ את שטח משולש $\triangle BEA$ ומקבלים ששטח משולש $\triangle AEC$ הוא,

$$S_{\triangle AEC}=400-10x$$

משווים את שני הביטויים לשטח משולש $\triangle AEC$,

$$400-10x=15x\ \Rightarrow\ x=16$$

מכאן ששטח משולש $\triangle AEC$ הוא 240 מ"ר

$$S_{\triangle AEC}=15\cdot16=240$$

מצד שני שטח משולש $\triangle AEC$ הוא,

$$S_{\triangle AEC}=\frac{AC\cdot EF}{2}$$

מציבים AC = 20, $S_{\triangle AEC}=240$ ומקבלים:

$$EF=12$$

גובה נקודת המפגש הוא 12 מ'.

2. בשלב זה יש לאפשר השערות ואף נימוקים שונים. משימה זו מכינה לקראת המשימה הבאה – בה מוצאים כי גובה נקודת המפגש של הכבלים הוא קבוע (12 מ') ואינו תלוי במרחק שבין שני העמודים - ולפיכך לא מומלץ לפסוק בשלב זה.

3. פותרים את שלושת הסעיפים באחת מהדרכים המוצעות לעיל.

בסעיף 3.ג. מתברר כי אורך הקטע EF אינו תלוי באורך AC והוא קבוע 12 מ'.

דוגמה לפתרון סעיף 3.ג על פי דרך הפתרון הגיאומטרית הראשונה:

באופן דומה לדרך המוצגת בשאלה 1, מקבלים שני ביטויים עבור EF,

$$EF=\frac{20(k-x)}{k}\ ,\ EF=\frac{30x}{k}$$

משווים בין שני הביטויים עבור EF,

$$\frac{20(k-x)}{k}=\frac{30x}{k}\Rightarrow x=\frac{2}{5}k$$

מציבים את הערך שהתקבל באחד הביטויים ומקבלים את אורך הקטע EF,

$$EF=\frac{30}{\cancel{k}}\cdot(\frac{2}{5}\cancel{k})=12$$

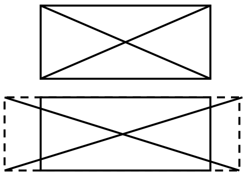
כלומר, אורכו של EF אינו תלוי ב- k.

ניתן להגיע לאותה מסקנה באמצעות כל אחת מדרכי הפתרון שתוארו לעיל.

4. בשלב זה ייתכן ויתעורר קונפליקט בין האינטואיציה כי גובה נקודת מפגש משתנה כאשר משנים את המרחק בין העמודים, לבין החישוב המתמטי המורה על ההיפך מכך.

דרך אחת לסייע ביישוב שתי התפיסות הסותרות, היא להתרכז במקרה שבו העמודים הן בני אותו גובה. במקרה זה, ניתן לתאר את נקודת המפגש בין שני הכבלים כנקודת חיתוך האלכסונים של מלבן.

אם "נמתח" את המלבן במידה שווה מכל צד, הרי שנקודת מפגש האלכסונים תישאר קבועה, ובפרט מרחקה מצלעות המלבן האופקיות.



5. בפעילות ראינו כי אם גובהי העמודים הם 20 מ' ו- 30 מ', גובה נקודת המפגש בין שני הכבלים היא 12 מ', ואינו תלוי במרחק שבין העמודים. ביישומון ניתן לשנות את גובה העמודים, ולהכליל (באופן התנסותי) טענה זו גם לגבהים שונים של עמודים: כל עוד גובה העמודים קבוע, גובה נקודת המפגש בין שני הכבלים הוא קבוע ואינו תלוי במרחק שבין העמודים.

1. גובה הדקל הוא 4.5 מ', וגובה האנטנה הוא 6 מ'.

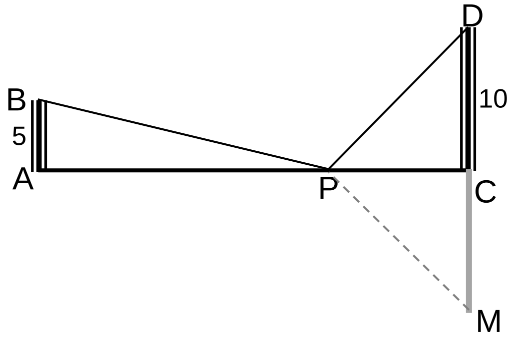
2.

	ביטויים אלגבריים לאורכי הצלעות	ביטויים אלגבריים להיקפי המשולשים	היקף המשולשים כאשר היקף משולש א' הוא 45 ס"מ
משולש א	$x,\ \ 2x + 10,\ \ 3x + 5$	$6x + 15$	45 ס"מ
משולש ב	$\frac{1}{2}x,\ \ x + 5,\ \ \frac{1}{2}\cdot(3x+5)$	$\frac{1}{2}(6x+15) =$ $3x+7.5$	22.5 ס"מ
משולש ג	$1.5x,\ \ 1.5\cdot(2x + 10),\ \ 1.5\cdot(3x + 5)$	$1.5\cdot(6x+15) =$ $9x+22.5$	67.5 ס"מ

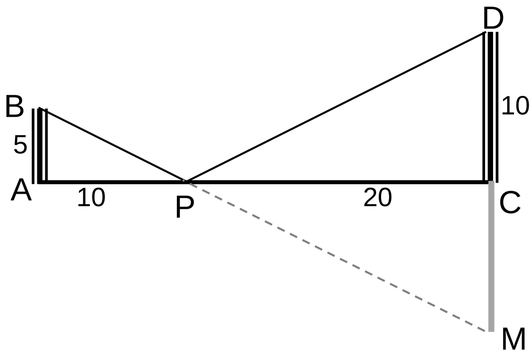
3. א. דומים ב. דומים ג. דומים ד. לא בהכרח דומים ה. דומים ו. חופפים

מסלול הציפור יוצר שני משולשים ישרי זווית ($\triangle BAP$, $\triangle DCP$).

משקפים את מסלול הציפור מהנחל לעץ הגבוה (PD), ומסמנים אותו כ- PM.

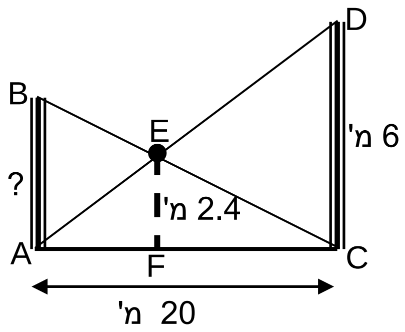


אורך המסלול של הציפור הוא BP + PD, והוא זהה לאורכו של המסלול מנקודה B לנקודה M – כלומר, ל- BP + PM.
המסלול הקצר ביותר מנקודה B ל- M הוא הקטע הישר BM.
במקרה כזה, המשולשים ישרי הזווית הם דומים, ויחס הדמיון הוא 2:1. לכן יחס המרחקים PC ו-AP הוא גם כן 2:1, והנקודה P נמצאת במרחק של 20 מ' ו- 10 מ' מגדות הנהר.



למסיימים

1. בשרטוט משמאל, מצאו את אורכו של AB.
[**תשובה:** AB = 4]



פינת המחשב

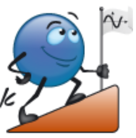
2. *משימת חקר*
בפעילות זו למדתם כי גובה נקודת המפגש בין שני הכבלים (EF) אינו תלוי במרחק בין שני העמודים.
במשימה זו תחקרו כיצד משתנה גובהו של EF, כאשר הגבהים של שני העמודים משתנים.
היכנסו ליישומון "שני כבלים" באתר או לפי הקישור http://ggbtu.be/mKe6t9hnl

א. שנו את היישומון, כך שהעמודים יהיו בגובה זהה.
שנו את הגבהים של העמודים, ובכל פעם מדדו את גובהו של EF.
מצאו קשר בין גובהו של EF, לבין הגבהים של העמודים.

ב. שנו את היישומון כך שהיחס בין שני העמודים יהיה 2:1.
מצאו דוגמאות שונות, ובכל פעם מדדו את גובהו של EF.
מצאו קשר בין גובהו של EF, לבין גובהו של העמוד הגבוה.

ג. חיזרו על סעיף 2.ב, עם יחס של 3:1.

ד. חיזרו על סעיף 2.ב, עם יחס של 3:2.



אתגר

ה. הכלילו את ממצאיכם: מצאו קשר בין יחס הגבהים של שני העמודים לבין אורכו של EF.
נסו להצדיק את טענתכם.
[**תשובות** בסוף המדריך]

לסיכום

דנים בדרכים שונות לפתרון משימה 1.

מיישמים דרכים אלו לפתרון משימה 3.ג, שם במקום המספר עבור AC מציבים k. במהלך הפתרון k מצטמצם, והאורך המתקבל של EF באופן קבוע הוא 12.

דנים במשמעות התוצאה: גובה נקודת המפגש של הכבלים קבוע (12) ואינו תלוי במרחק שבין שני העמודים.

תשובה לשאלה 2 במדור "למסיימים"

ס	גובה העמוד הגבוה	גובה העמוד הנמוך	גובהו של EF	קשר בין גובהו של EF, לבין גובהו של העמוד הגבוה	מסקנה
סעיף א: יחס הגבהים הוא 1:1	2	2	1	2:1=2	היחס בין גובה העמוד הגבוה לגובהו של EF הוא 2:1
	3	3	$1\frac{1}{2}=1.5$	3:1.5 = 2	
	4	4	2	4:2 = 2	
סעיף ב: יחס הגבהים הוא 2:1	2	1	$\frac{2}{3}$	$2:\frac{2}{3}=3$	היחס בין גובה העמוד הגבוה לגובהו של EF הוא 3:1
	6	3	2	6:2 = 3	
	12	6	4	12:4 = 3	
סעיף ג: יחס הגבהים הוא 3:1	3	1	$\frac{3}{4}=0.75$	$3:\frac{3}{4}=4$	היחס בין גובה העמוד הגבוה לגובהו של EF הוא 4:1
	8	$2\frac{2}{3}$	2	8:2 = 4	
	9	3	$2\frac{1}{4}=2.25$	$9:2\frac{1}{4}=4$	
סעיף ד: יחס הגבהים הוא 3:2	6	4	$2\frac{2}{5}=2.4$	$6:2\frac{2}{5}=2\frac{1}{2}$	היחס בין גובה העמוד הגבוה לגובהו של EF הוא 5:2
	10	$6\frac{2}{3}$	4	$10:4=2\frac{1}{2}$	
	12	8	$4\frac{4}{5}=4.8$	$12:4\frac{4}{5}=2\frac{1}{2}$	

ה. נסמן את היחס בין הגבהים של שני העמודים ב- m.

היחס בין גובהו של העמוד הגבוה לבין גובהו של EF הוא m + 1.

הסבר בדרך גיאומטרית

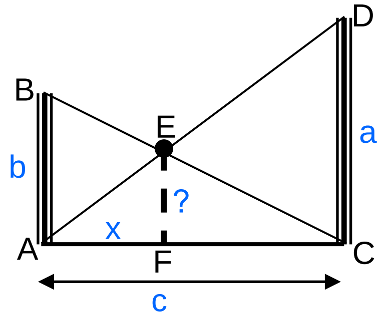
מסמנים את גובה העמוד הגבוה ב- a,

את גובה העמוד הנמוך ב- b,

את המרחק בין שני העמודים ב- c.

ואת המרחק בין נקודת המפגש לעמוד הנמוך (AF) ב- x.

על פי סימון זה, $m=\frac{a}{b}$



באופן דומה לדרך הפתרון הגיאומטרית השלישית (באמצעות שטחים), מקבלים

$$S_{\triangle AEC}=\frac{ac}{2}-\frac{a(c-x)}{2}=\frac{bc}{2}-\frac{bx}{2}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{bc}{a+b}$$

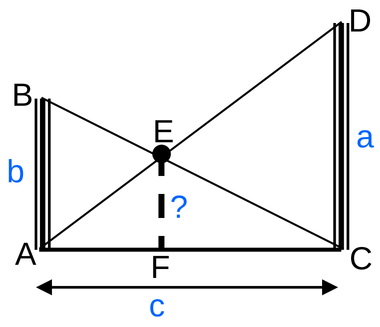
המשולשים $\triangle EFA$, $\triangle DCA$ דומים, ומיחס הדמיון נובע $x=\frac{EF\cdot c}{a}$

משווים בין שני הביטויים עבור x ומקבלים

$$\frac{bc}{a+b}=\frac{EF\cdot c}{a}\Rightarrow EF=\frac{ab}{a+b}=a:(\frac{a}{b}+1)=a:(m+1)\Rightarrow\frac{a}{EF}=m+1$$

כלומר היחס בין גובה העמוד הגבוה (a) וגובהו של EF הינו m + 1.

הסבר בדרך אלגברית



מסמנים $\frac{a}{b}=m$

משוואת הישר BC $y=-\frac{b}{c}x+b$

משוואת הישר AD $y=\frac{a}{c}x$

מוצאים את ערך ה-x של נקודת החיתוך (E) של שני הישרים AD, BC: $\frac{a}{c}x=-\frac{b}{c}x+b\Rightarrow$

$$x_E=\frac{bc}{a+b}$$

מציבים את התוצאה באחת המשוואות ומוצאים את אורכו של EF, $EF=y_E=\frac{a}{\cancel{c}}\cdot\frac{b\cancel{c}}{a+b}=\frac{ab}{a+b}$

מכאן שהיחס $\frac{a}{EF}$ הינו, $\frac{a}{EF}=\frac{a}{\left(\frac{ab}{a+b}\right)}=\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1=m+1$