9.2 גאומטריה של מוניות

מטרות

- הכרת דוגמה של גאומטריה לא אוקלידית
- הבנה כי מושגים וצורות גאומטריות המקובלים כ"טבעיים" ומובנים מאליהם במקרה זה, הגדרת מרחק בין שתי נקודות, יכולים להשתנות בהתאם להגדרתם
- הכרה אינטואיטיבית של המושג מקום גאומטרי
- ביצוע בניות גאומטריות

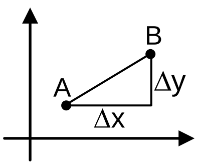
אמצעי עזר

שקף למורה של שתי מערכות צירים . אחת עבור גאומטריה של מוניות , ואחת עבור גאומטריה רגילה (ראו בסוף הפעילות). השקף יעזור למורה להציג את התשובות במליאה.

פתיחה

קוראים את משימת הפתיחה ועונים עליה במליאה . פותרים את משימה 1, וקוראים את הגדרת המרחק בגאומטריה של מוניות לעומת הגדרת המרחק בגאומטריה רגילה שבמסגרת . מדגישים שבגאומטריה של מוניות, בניגוד לנסיעה במונית, מתייחסים גם לנקודות שנמצאות בתוך המשבצות , וההגבלה היחידה על מסלול – היותו מורכב מקטעים אופקיים ו/או אנכיים בלבד.

פתרונות והערות



הפעילות עוסקת בגאומטריה במערכת צירים השונה מן הגאומטריה הרגילה.

באופן פורמלי, בגאומטריה רגילה המרחק בין שתי נקודות A ו- B במערכת צירים קרטזית

מוגדר כך: $AB=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

ואילו הגדרת המרחק בגאומטרית מוניות היא: $AB=|\Delta x|+|\Delta y|$

כאשר Δx הוא הפרש שיעורי ה- x ו- Δy הפרש שיעורי ה- y של שתי הנקודות.

אין צורך להביא הגדרות אלו בפני הכיתה.

הגדרות שונות למרחק בשתי הגאומטריות גורמות לשוני בין הצורות הגאומטריות שהגדרתן מתבססת על מרחק . למשל, מעגל מוגדר כאוסף כל הנקודות המרוחקות במידה שווה מנקודה מסוימת . התלמידים ייווכחו למשל לראות כי ל"מעגל" בגאומטרית מוניות יש צורה של ריבוע בגאומטריה הרגילה.

אם התלמידים ייתקלו בקשיים במהלך הפעילות, אפשר לעבוד בשני שלבים, ולסכם כל שלב לפני התחלת העבודה על השלב הבא. השלב הראשון (משימות 3-4), מוביל את התלמידים לחיפוש אחר המאפי ין של כל הנקודות

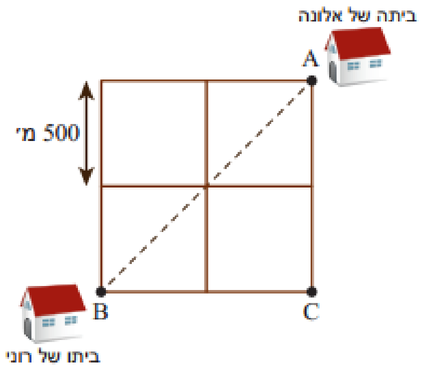
המרוחקות מרחק נתון מנקודה אחת נתונה. השלב השני (משימות 5-6), מתייחס למדידת מרחק נתון משתי נקודות נתונות.

.1 א. אורך המסלול הוא 2000 מטר (= 500 · 4) כלומר 2 קילומטר.

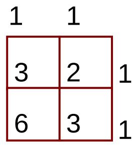
ב. לפי משפט פיתגורס, $AB^2 = 1000^2 + 1000^2 = 2,000,000$

$AB = 1414$

המרחק בקו ישר הוא 1.414 קילומטר.



.2 א-ב. אפילו אם הנהג בוחר באחד המסלולים הקצרים ביותר , אי אפשר לדעת באיזה מסלול בחר הנהג, כי יש 6 מסלולים קצרים בין שני הבתים (ראו פעילות 8.1 "בכמה דרכים?")



.3 התשובות ביחידות של מערכת הצירים.

בגאומטריה **של מוניות**:

$AB = 4$

$AC = 6 + 3 = 9$

$AD = 1.5 + 2.5 = 4$

בגאומטריה רגילה:

$AB = 4$

$AC^2 = 6^2 + 3^2 = 45$

$AC = 6.7$

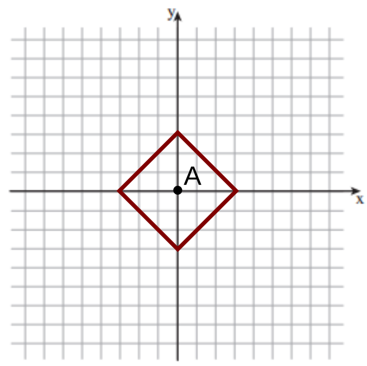
$AD^2 = 1.5^2 + 2.5^2 = 8.5$

$AD = 2.9$

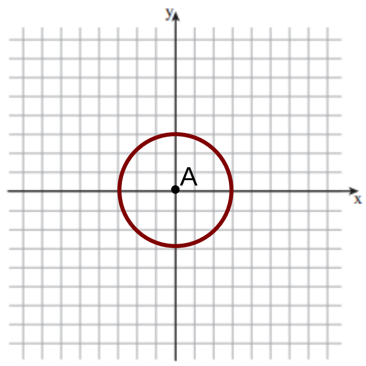
.4 בגאומטרית מוניות הנקודות יוצרות ריבוע שמרכזו (מפגש אלכסוניו) הוא הנקודה ממנה מדדנו את המרחק ואלכסונו גדול פי 2 מן המרחק המבוקש.

בגאומטריה אוקלידית הנקודות יוצרות מעגל שמרכזו הוא הנקודה מ מנה מדדנו את המרחק , ורדיוסו הוא המרחק המבוקש.

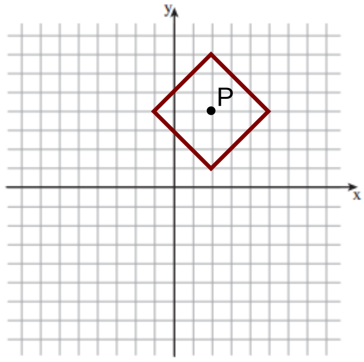
א. **גאומטריה של מוניות**

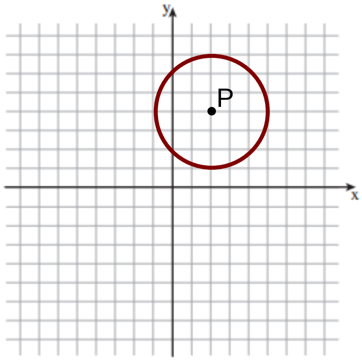


גאומטריה רגילה



ב. **גאומטריה של מוניות** **גאומטריה רגילה**

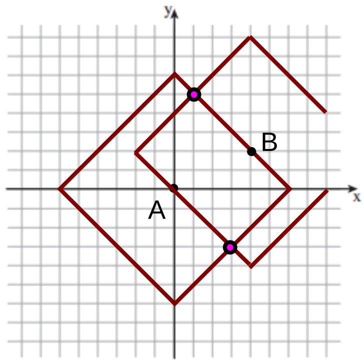


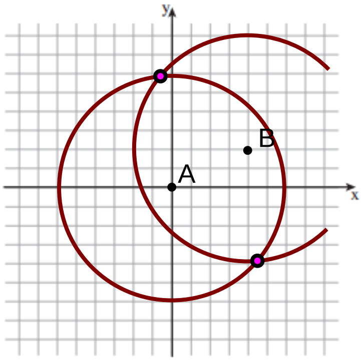


5. משימה זו מסתמכת על המסקנות שהוסקו במשימה הקודמת. על-ידי שרטוט שני מעגלים שווי-רדיוס בגאומטריה אוקלידית, או שני ריבועים שווי-אלכסונים בגאומטריה של מוניות, אפשר למצוא את נקודות החיתוך שלהם. אלה הנקודות הנמצאות במרחק שווה משתי הנקודות המסומנות במערכת הצירים.

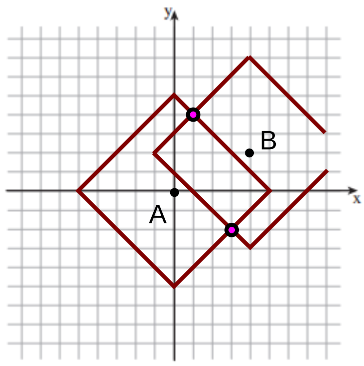
א. הנקודות המודגשות נמצאות במרחק 6 יחידות מ- A ומ- B.

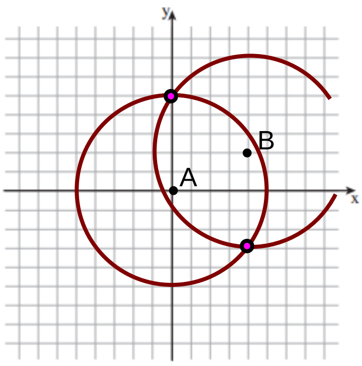
גאומטריה של מוניות **גאומטריה רגילה**



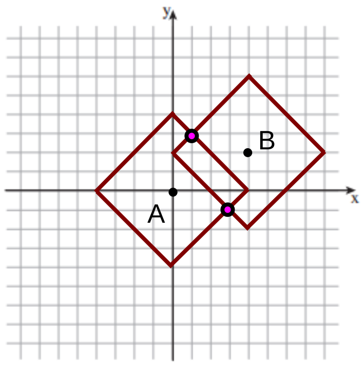


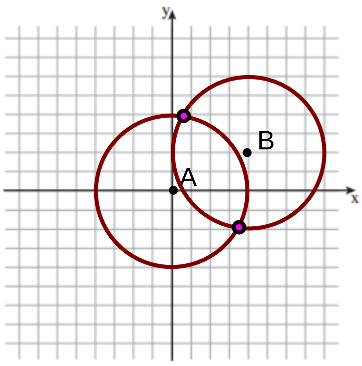
ב. הנקודות המודגשות נמצאות במרחק 5 יחידות מ- A ומ- B.





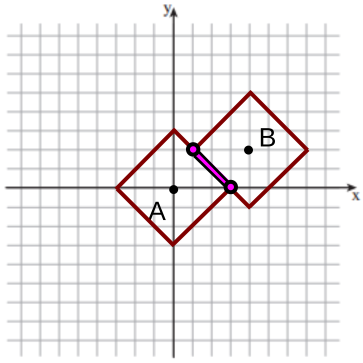
ג. הנקודות המודגשות נמצאות במרחק 4 יחידות מ- A ומ- B.



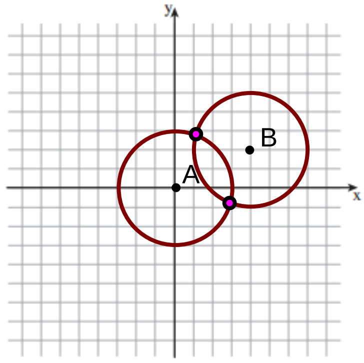


ד. הנקודות המודגשות (כולל הקטע) נמצאות במרחק 3 יחידות מ- A ומ- B.

גאומטריה של מוניות

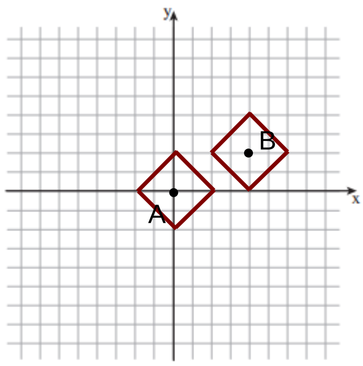


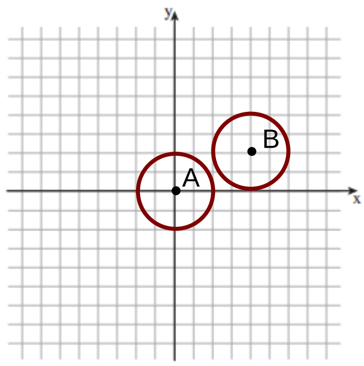
גאומטריה רגילה



בסעיף זה אפשר לראות כי בגאומטריית מוניות ייתכן מצב שבו שני "מעגלים" נחתכים ביותר משתי נקודות. במקרה זה לשתי הצורות קטע משותף – כלומר, אינסוף נקודות משותפות.

ה. אין נקודות שנמצאות במרחק של 2 יחידות מ- A וגם מ- B.

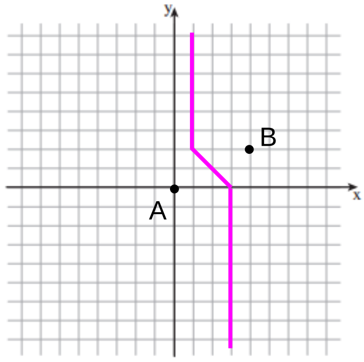


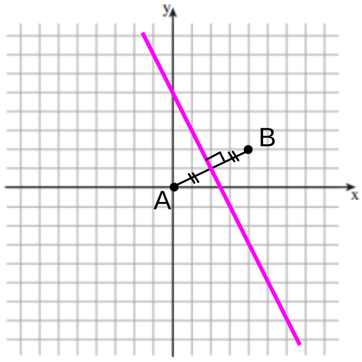


ו. סעיף זה מסכם את כל המסקנות מכל הסעיפים שקדמו לו.

בגאומטריה אוקלידית, כל הנקודות המרוחקות במידה שווה מ- A ומ- B נמצאות על ישר אחד שהוא האנך האמצעי לקטע המחבר את שתי הנקודות הנתונות (במקרה זה, AB).

בגאומטריה של מוניות, נקבל קו שבור המורכב מקטע ושתי קרניים משני צדדיו. הקרניים מאונכות לציר ה- x, והקטע הוא החלק המשותף בין צלעות הריבועים בעלי "רדיוס" (חצי אלכסון) שהוא חצי המרחק בין A ל- B.

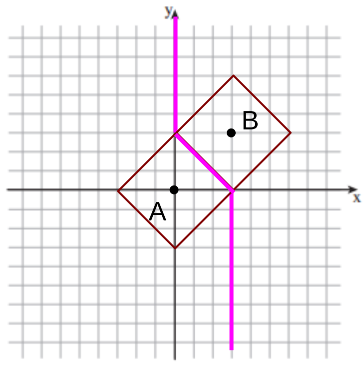




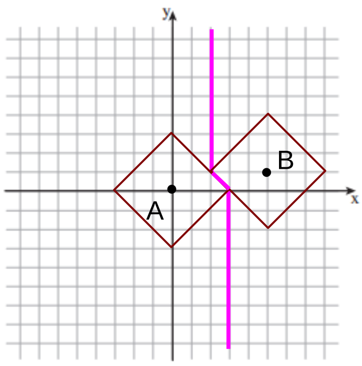
במהלך הפעילות, חלק מן התלמידים יגיעו למסקנה המוטעית כי הנקודות בעלות תכונה זו בגיאומטריית מוניות נמצאות לאורך שני קווים מקבילים. מבחינה זו התוצאה של סעיף זה מהווה הפתעה מעניינת.

6. מכיוון שהקטע המשופע הוא החלק המשותף בין צלעות הריבועים בעלי "רדיוס" (חצי אלכסון) שהוא חצי המרחק בין A ל- B, אורך הקטע המשופע יגדל ככל שהחלק המשותף בין צלעות ה"ריבועים" יגדל, והוא יהיה הגדול ביותר באורכו כאשר הוא יהיה באורך צלע הריבוע . הקטע המשופע ייעלם כאשר ה"ריבועים" רק נוגעים זה בזה. כדי למצוא נקודה B מתאימה יש לשמור על המרחק 6 מנקודה A.

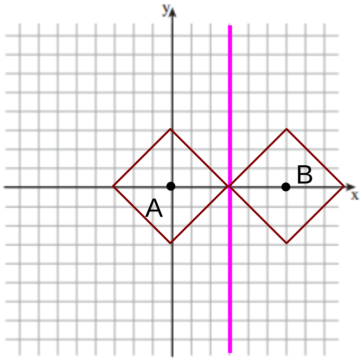
א. למשל,



ב. למשל,



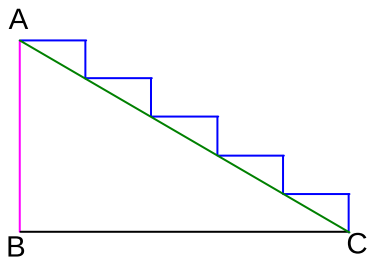
ג. למשל,



א. שיעורי הנקודה B יכולים להיות גם $(3, -3)$,$(-3, -3)$, או $(-3, 3)$. כלומר מרחקה מציר ה- x (או מציר ה- y) צריך להיות 3.

ב. מרחק הנקודה B מציר ה- x (או מציר ה- y) צריך להיות חיובי וקטן מ- 2, ובלבד שהמרחק בין הנקודות A ו- B יישאר 6.

ג. שיעורי הנקודה B יכולים להיות גם $(-6, 0)$,$(0, 6)$, או $(0, -6)$. כלומר היא צריכה להיות על ציר ה- x או על ציר ה- y.

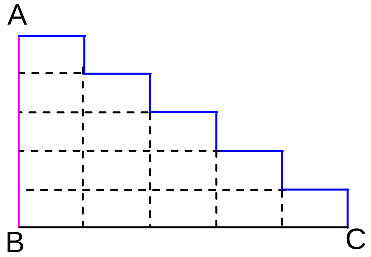


הדרך הקצרה ביותר להגיע מנקודה A לנקודה C היא בגלישה במעקה.

המסקנה מתבססת על המשפט הקובע שסכום שתי צלעות במשולש גדול מן הצלע השלישית.

הקטע AC (המעקה) במשולש ABC קצר מסכום הצלעות AB ו- AC.

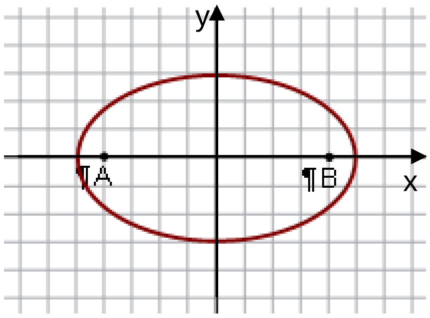
כמו כן , בכל מדרגה הקטע המשופע הנמצא תחתיה קצר מסכום הקטעים האופקי והאנכי של המדרגה לכן , הקטע AC המורכב מסכום הקטעים המשופעים שמתחת למדרגות קצר מסכום כל הקטעים האופקיים והאנכיים של המדרגות



שתי הדרכים האחרות: (1) ירידה במדרגות, ו- (2) גלישה בחבל ואחר-כך הליכה ישרה שוות באורכן.

אפשר לחלק את הקטע AB לקטעים שאורך כל אחד מהם שווה לאורך קטע אנכי במדרגה, ואת BC לקטעים שאורך כל אחד מהם שווה לקטע אופקי במדרגה. (ראו שרטוט)

למסיימים



1. לפניכם, בגאומטריה רגילה, הגרף של כל הנקודות שסכום מרחקיהן מ- A ומ- B הוא 10 יחידות.

כלומר, אם P נקודה כזאת, PA + PB = 10.

לגרף כזה קוראים אליפסה.

א. בחרו שלוש נקודות על הגרף ובדקו אם הן מקיימות את התכונה

הערה: כדי לתת את השאלה למסיימים יש לצלם את הגרף.

אין קשר בין סעיף א לסעיף ב לכן אפשר להסתפק בסעיף ב.

תשובה: למשל, הנקודה (5, 0) מרחקה מ- A 9 יחידות, ומרחקה מ- B יחידה אחת. סכום המרחקים הוא 10.

למשל, הנקודה (0, –3). לפי משפט פיתגורס מרחקה מ- A וגם מרחקה מ- B הוא 5 יחידות ($=\sqrt{4^2+3^2}$).

סכום המרחקים 10

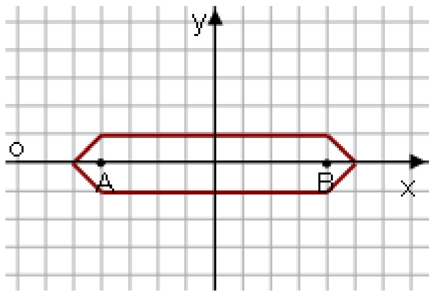
למשל, הנקודה (4, 1.8), מרחקה מ- B הוא 1.8 יחידות.

לפי משפט פיתגורס מרחקה מA הוא 8.2 יחידות ($=\sqrt{1.8^2+8^2}$). לכן סכום המרחקים הוא 10 (= 1.8 + 8.2)

ב. שרטטו בגאומטריה של מוניות גרף של כל הנקודות שסכום מרחקיהן מ-A ומ- B הוא 10 יחידות.

תשובה: ראו שרטוט.

התלמידים יכולים להגיע לשרטוט הדרוש רק לאחר מציאת מספר מספיק של נקודות בודדות.



לסיכום

- מתייחסים לרעיון של גאומטריה אחרת ולמושגים והצורות הגאומטריות שהשתנו בהתאם להגדרתם
- משתמשים בשקפים של מערכות הצירים ובודקים את שאלה 5 סעיף ו. מוודאים שכל התלמידים אכן קיבלו את המקומות הגאומטריים המבוקשים.
- אם התלמידים עבדו השנה או בשנה שעברה על פעילות הקשורה לגיאומטריה על כדור (מאגר פעילויות לכיתה ז' פעילות 6.3), אפשר להזכיר את הפעילות כדוגמה נוספת לגיאומטריה לא אוקלידית. גם אם התלמידים לא התנסו בפעילות אפשר להסביר את העקרון שמאחורי הגיאומטריה הזאת (ניתן לקרוא לה "גיאומטריה של מטוסים")