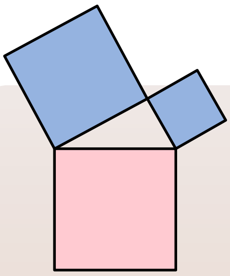
יחידה 7: משפט פיתגורס

7.1 מגדלי פיתגורס – ללא מחשב

גרסה חלופית לפעילות 7.2



משפט פיתגורס קובע כי סכום שטחי הריבועים, הבנויים על הניצבים במשולש ישר-זווית, שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר.

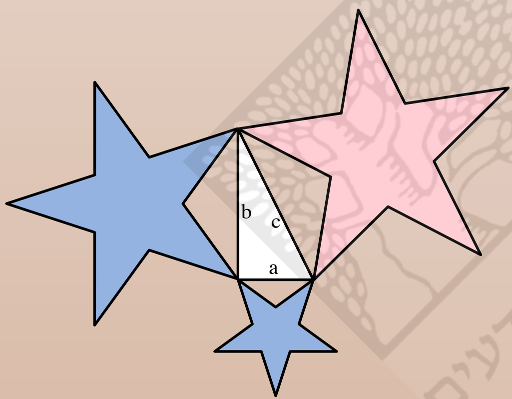
בניסוח אחר: אם אורכי הניצבים במשולש ישר-זווית הם a ו- b,
ואורך היתר הוא c, אז: $a^2 + b^2 = c^2$.

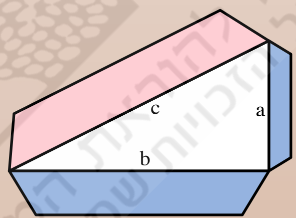
הקשר בין מידות מסוימות של משולשים והיותם משולשים ישרי-זווית היה מוכר זה מאות שנים לפני זמנו של פיתגורס – בבבל, במצרים העתיקה ובסין, אולם המתמטיקאים היוונים היו הראשונים שהכלילו את הקשר למשפט ועמלו למצוא הוכחה כללית. משפט פיתגורס והוכחתו נכלל גם ב"יסודות" – ספרו הנודע של אוקלידס.

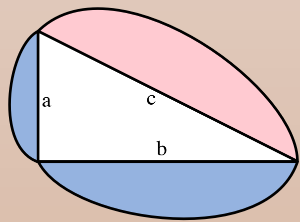
באותו ספר נמצאת גם **הרחבה של משפט פיתגורס**:

אם על צלעותיו של משולש ישר-זווית מונחות צורות דומות, אז סכומם של שני השטחים הקטנים שווה לשטח הגדול.

בציורים הבאים, כמה דוגמאות להכללה זו:



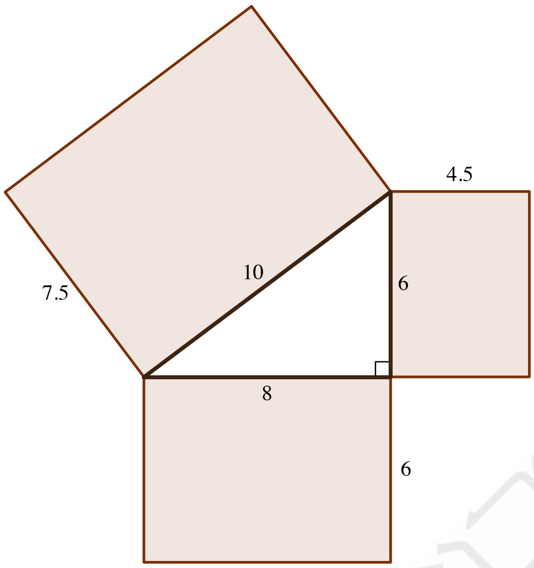


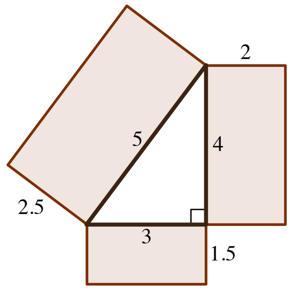


נבדוק את הנכונות של משפט פיתגורס המורחב עבור צורות שונות הבנויות על הצלעות של משולש ישר-זווית.

מלבנים

1. על כל אחת מצלעותיו של משולש ישר-זווית בנוי **מלבן**.
   ענו עבור כל אחד משני המקרים הבאים:





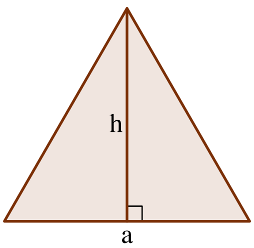
א. האם המלבנים דומים? נמקו.

ב. האם משפט פיתגורס המורחב נכון בשני המקרים האלה?

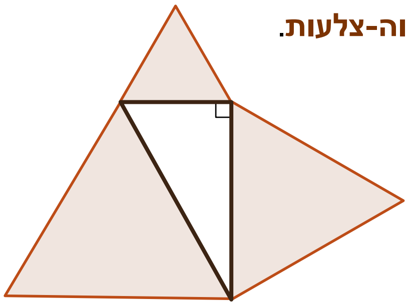
ג. האם משפט פיתגורס המורחב נכון עבור כל שלושה מלבנים דומים הבנויים על הצלעות של משולש ישר-זווית?
הוכיחו את טענתכם בדרך אלגברית. אפשר להשתמש במשפט פיתגורס המקורי.
שימו לב, במלבנים דומים היחס בין שתי צלעות סמוכות של כל מלבן הוא קבוע.

משולשים שווי-צלעות

2. לפניכם משולש שווה-צלעות.



א. הביעו את גובה המשולש h באמצעות צלעו a.
שימו לב, הגובה במשולש שווה-צלעות הוא גם תיכון.

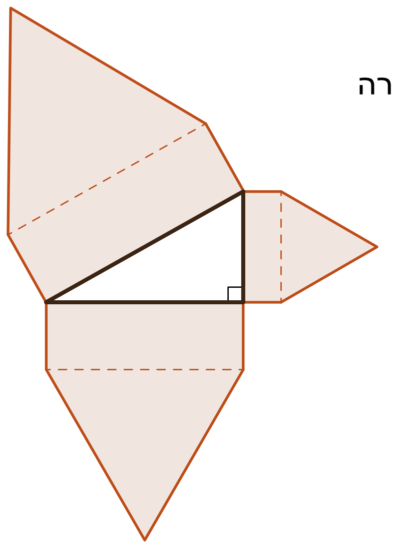


ב. על כל אחת מצלעותיו של משולש ישר-זווית בנוי **משולש שווה-צלעות**.
האם המשולשים דומים? נמקו.

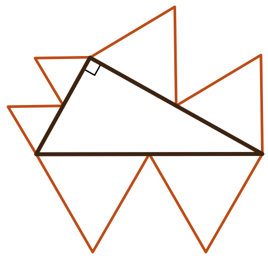
ג. האם משפט פיתגורס המורחב נכון עבור משולשים שווי-צלעות הבנויים על הצלעות של משולש ישר-זווית?
הוכיחו את טענתכם בדרך אלגברית. אפשר להשתמש במשפט פיתגורס המקורי.

צורות נוספות

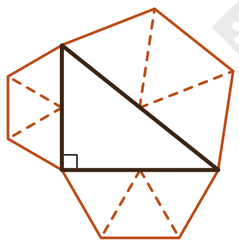
3. א. על צלעותיו של משולש ישר-זווית בנויות צורות דומות. כל צורה מורכבת ממלבן וממשולש שווה-צלעות. כל המלבנים דומים.
הוכיחו בדרך אלגברית כי משפט פיתגורס המורחב נכון במקרה זה.



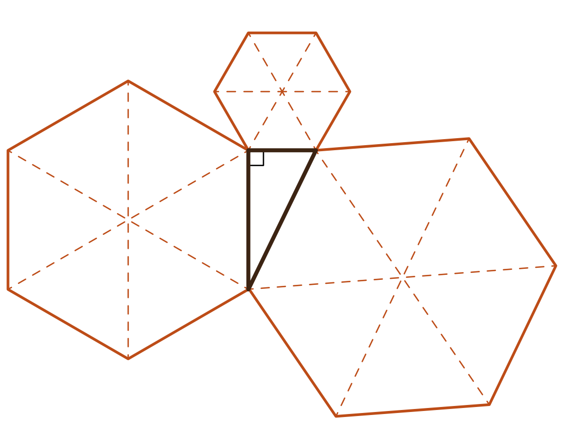
ב. על צלעותיו של משולש ישר זווית בנויות צורות. כל צורה מורכבת משני משולשים שווי-צלעות חופפים.
הוכיחו בדרך אלגברית כי משפט פיתגורס המורחב נכון במקרה זה.



ג. על צלעותיו של משולש ישר-זווית בנויים טרפזים שווי-שוקיים, הניתנים לחלוקה לשלושה משולשים שווי-צלעות חופפים.
הוכיחו בדרך אלגברית כי משפט פיתגורס המורחב נכון במקרה זה.



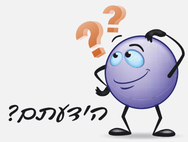
ד. על צלעותיו של משולש ישר-זווית בנויים משושים משוכללים.
הוכיחו בדרך אלגברית כי משפט פיתגורס המורחב נכון במקרה זה.



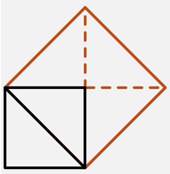
4. במרכז הנופש "בְרֵכת הדולפין" יש מדשאה שצורתה משולש ישר-זווית. סביב המדשאה רוצים לבנות שלוש בְרֵכות בעלות אותה צורה ואותו עומק אך בגדלים שונים.
שתיים מהבְרֵכות יופעלו רק בקיץ ובְרֵכה מקורה נוספת תופעל רק בחורף.
על-מנת לחסוך במים, המים משתי בְרֵכות הקיץ מוזרמים בסוף הקיץ לבְרֵכת החורף ובסוף החורף בחזרה לבְרֵכת הקיץ, ומגיעים לאותו גובה.

א. שרטטו הצעה לעיצוב הצורה של שלוש הבריכות על-פי התנאים המבוקשים. רשמו מידות מתאימות להצעתכם.

ב. ערכו תחרות להצעה המקורית ביותר.

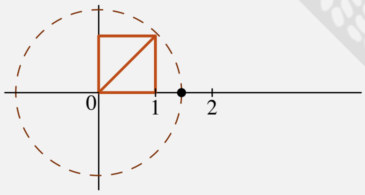


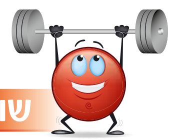
רבים חושבים על משפט פיתגורס כמשפט שמתייחס לקשר בין שלושה מספרים שהם אורכי הצלעות של משולש ישר-זווית. המתמטיקאים היוונים התייחסו אל משפט פיתגורס כמשפט על קשר בין שטחים בלבד. הם לא התייחסו לערכים המספריים של השטחים. הם ידעו להשוות שטחים ולמצוא שטח שהוא סכום או הפרש של שטחים ידועים, אבל הם לא הכירו את כל המספרים. הם עסקו רק במספרים שלמים ובמספרים רציונליים (מספרים שהם מנה של מספרים שלמים). כך למשל, הם ידעו כי שטח הריבוע הבנוי על האלכסון של ריבוע היחידה (ריבוע שמידותיו 1×1) הוא 2 יחידות ריבועיות, אבל לא ידעו איך להתייחס ולייצג את אורך הצלע של ריבוע זה.



אפשר למצוא את מקומו של מספר זה על ציר המספרים על-ידי שרטוט מעגל שמרכזו בקדקוד אחד של ריבוע היחידה, ורדיוסו כאורך אלכסון הריבוע (ראו שרטוט).

הקושי של היוונים נבע מכך, שאורך הצלע הזאת (שהוא קצת פחות מ- $1\frac{1}{2}$ יחידות אורך) לא ניתן לביטוי כחלק (כלומר, כשבר) כלשהו מיחידת האורך (שהיא אורך הצלע של ריבוע היחידה).

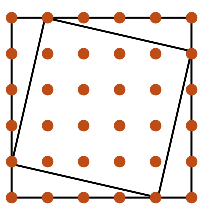




שומרים על כושר

1. חשבו את שטח הריבוע הפנימי בשתי דרכים:
   - באמצעות משפט פיתגורס
   - בלי להשתמש במשפט פיתגורס

   איזו דרך יעילה יותר, לדעתכם?



2. אורכי הניצבים של משולש ישר זווית הם 15 ס"מ ו- 20 ס"מ.
   א. מצאו את היקפו ואת שטחו של המשולש.
   ב. מהו אורך הגובה ליתר במשולש זה?

3. **תזכורת**: האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה.
   אורכי האלכסונים במעוין הם 10 ס"מ ו- 24 ס"מ. מצאו את שטחו והיקפו של המעוין.

משחק

4. "**השלימו לריבוע**" משחק לשני משתתפים.

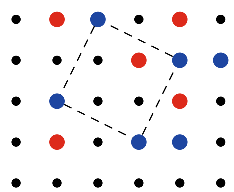
המשחק מכיל: רשת נקודות (צלמו מדף בסוף הפעילות או הניחו עליו דף שקוף).

מטרת המשחק: ליצור ריבועים.

מהלך המשחק: כל משתתף בתורו בוחר נקודה על הרשת ומסמנה בצבע משלו.

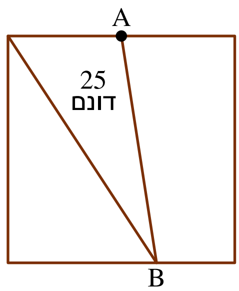
מנצח: המשתתף הראשון שיש לו ארבע נקודות שהן קדקודים של ריבוע. ריבוע יכול להיות מסובב ומכל גודל.

דוגמה שבה השחקן הכחול מנצח



חידה

חידה הודית עתיקה*



לאיכר הודי חובב מתמטיקה היו שלושה בנים - שני הבנים הגדולים תאומים. האיכר רצה להוריש לשלושת בניו את חלקתו הריבועית, כך ששטחי חלקות הבנים התאומים יהיו שווים. האיכר סימן את נקודת האמצע A של אחת מצלעות המגרש, ומתח קו עד לנקודה כלשהי (B) על הצלע שממול.
הבן הצעיר קיבל את החלקה המשולשת הפנימית אשר שטחה 25 דונם. את שתי החלקות הנותרות ששטחיהן שווים הוריש לשני בניו הגדולים התאומים.
היכן נמצאת הנקודה B שבחר האיכר?

* מבוסס על חידה מאתר מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך העל-יסודי.

רשתות למשחק: השלימו לריבוע