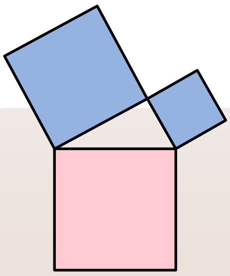
7.2 מגדלי פיתגורס – באמצעות מחשב

גרסה חלופית לפעילות 7.1

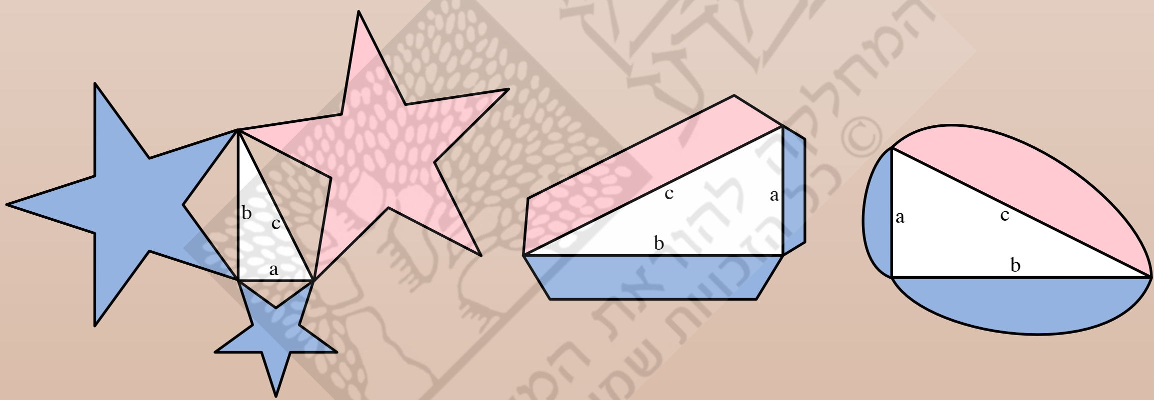


משפט פיתגורס קובע כי סכום שטחי הריבועים, הבנויים על הניצבים במשולש ישר-זווית, שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר.
בניסוח אחר: אם אורכי הניצבים במשולש ישר-זווית הם a ו- b, ואורך היתר הוא c, אז: $a^2 + b^2 = c^2$.

הקשר בין מידות מסוימות של משולשים והיותם משולשים ישרי-זווית היה מוכר זה מאות שנים לפני זמנו של פיתגורס – בבבל, במצרים העתיקה ובסין, אולם המתמטיקאים היוונים היו הראשונים שהכלילו את הקשר למשפט ועמלו למצוא הוכחה כללית. משפט פיתגורס והוכחתו נכלל גם ב"יסודות" – ספרו הנודע של אוקלידס.

באותו ספר נמצאת גם **הרחבה של משפט פיתגורס**:

אם על צלעותיו של משולש ישר-זווית מונחות צורות דומות, אז סכומם של שני השטחים הקטנים שווה לשטח הגדול.
בציורים הבאים, כמה דוגמאות להכללה זו:

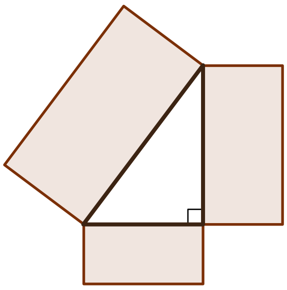


נבדוק את הנכונות של משפט פיתגורס המורחב עבור צורות שונות הבנויות על הצלעות של משולש ישר-זווית.

במשימות 1 ו- 2 נבנו צורות על הצלעות של משולש ישר-זווית. בכל משימה:

- פתחו את הישומון המתאים באתר **מתמטיקה משולבת** (מדור **מצוינות רחובות**).
- שנו את מידות המשולש (על-ידי גרירת הנקודות האדומות) ומדדו אורכים ושטחים.
- בדקו האם משפט פיתגורס המורחב נכון במקרה זה.

מלבנים



1. על צלעותיו של המשולש בנויים **מלבנים דומים**.

א. פתחו את היישומון: "מלבנים 1".

- מהו היחס בין הצלעות של כל מלבן?
- המשיכו לפי ההוראות שבראשית הפעילות.

ב. פתחו את היישומון: "מלבנים 2".

- מהו היחס בין הצלעות של כל מלבן?
- המשיכו לפי ההוראות שבראשית הפעילות.

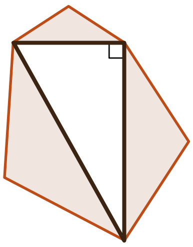
ג. האם משפט פיתגורס המורחב נכון עבור כל שלושה מלבנים דומים הבנויים על הצלעות של משולש ישר-זווית?

הוכיחו את טענתכם בדרך אלגברית. אפשר להשתמש במשפט פיתגורס המקורי.

שימו לב, במלבנים דומים היחס בין שתי צלעות סמוכות של כל מלבן הוא קבוע.

משולשים

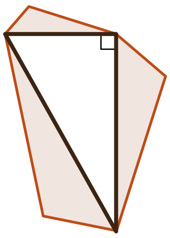
2. א. על צלעותיו של משולש ישר-זווית בנויים **משולשים** שווי-שוקיים ה**דומים** זה לזה.



- פתחו את היישומון: "משולשים שווי-שוקיים".
- המשיכו לפי ההוראות שבראשית הפעילות.

ב. על צלעותיו של משולש ישר-זווית בנויים **משולשים דומים** כלשהם.

- פתחו את היישומון: "משולשים כלשהם".
- המשיכו לפי ההוראות שבראשית הפעילות.



ג. האם משפט פיתגורס המורחב נכון עבור כל שלושה משולשים דומים הבנויים על הצלעות של משולש ישר-זווית? הוכיחו את טענתכם.
אפשר להשלים את המשולשים למלבנים (ראו שרטוט) ולהסתמך על משימה 1ג.

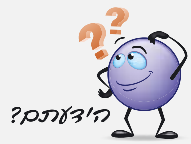
ד. המשיכו ביישומון "משולשים כלשהם". שנו את מידות המשולש ישר-הזווית, כך ששטחו של אחד משלושת המשולשים הבנויים על הצלעות יהיה בערך רבע משטחו של משולש שני.

מה היחס בין שטח המשולש הראשון לשטח המשולש השלישי?
הסבירו מדוע יחס זה מתקיים. הבחינו בין שתי אפשרויות שונות.

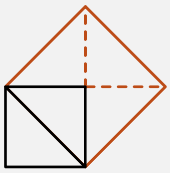
3. במרכז הנופש "בְּרֵכת הדולפין" יש מדשאה שצורתה משולש ישר-זווית. סביב המדשאה רוצים לבנות שלוש בְּרֵכות בעלות אותה צורה ואותו עומק אך בגדלים שונים.
שתיים מהבְּרֵכות יופעלו רק בקיץ ובְרֵכה מקורה נוספת תופעל רק בחורף.
על-מנת לחסוך במים, המים משתי בְּרֵכות הקיץ מוזרמים בסוף הקיץ לבְּרֵכת החורף ובסוף החורף בחזרה לבְּרֵכת הקיץ, ומגיעים לאותו גובה.

א. שרטטו הצעה לעיצוב הצורה של שלוש הבריכות על-פי התנאים המבוקשים. רשמו מידות מתאימות להצעתכם.

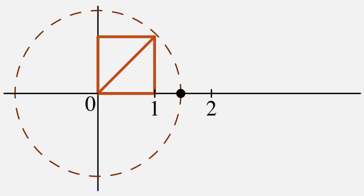
ב. ערכו תחרות להצעה המקורית ביותר.



רבים חושבים על משפט פיתגורס כמשפט שמתייחס לקשר בין שלושה מספרים שהם אורכי הצלעות של משולש ישר-זווית. המתמטיקאים היוונים התייחסו אל משפט פיתגורס כמשפט על קשר בין שטחים בלבד, ולא לערכים המספריים שלהם. הם ידעו להשוות שטחים ולמצוא שטח שהוא סכום או הפרש של שטחים ידועים, אבל הם לא הכירו את כל המספרים. הם עסקו רק במספרים שלמים, ובמספרים רציונליים (מספרים שהם מנה של מספרים שלמים). כך למשל, הם ידעו כי שטח הריבוע הבנוי על האלכסון של ריבוע היחידה (ריבוע שמידותיו 1×1) הוא 2 יחידות ריבועיות, אבל לא ידעו איך להתייחס ולייצג את אורך הצלע של ריבוע זה.

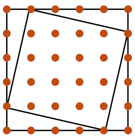


אפשר למצוא את מקומו של מספר זה על ציר המספרים על-ידי שרטוט מעגל שמרכזו בקודקוד אחד של ריבוע היחידה, ורדיוסו כאורך אלכסון הריבוע (ראו שרטוט).



הקושי של היוונים נבע מכך, שאורך הצלע הזאת (שהוא קצת פחות מ- $1\frac{1}{2}$ יחידות אורך) לא ניתן לביטוי כחלק (כלומר, כשבר) כלשהו מיחידת האורך (שהיא אורך הצלע של ריבוע היחידה)

שומרים על כושר



1. חשבון את שטח הריבוע הפנימי בשתי דרכים:
   - באמצעות משפט פיתגורס
   - מבלי להשתמש במשפט פיתגורס

   איזו דרך יעילה יותר, לדעתכם?

2. אורכי הניצבים של משולש ישר זווית הם 15 ס״מ ו- 20 ס״מ. אורך הגובה ליתר הוא 12 ס״מ.
   מצאו את שטחו ואת היקפו של המשולש.

3. **תזכורת**: האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה.
   אורכי האלכסונים במעוין הם 10 ס״מ ו- 24 ס״מ. מצאו את שטחו והיקפו של המעוין.

משחק

4. **״השלימו לריבוע״** משחק לשני משתתפים.

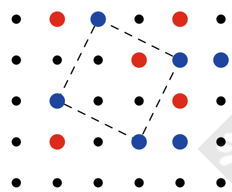
   המשחק מכיל: רשת נקודות (צלמו מדף בסוף הפעילות או הניחו עליו דף שקוף).

   מטרת המשחק: ליצור ריבועים.

   מהלך המשחק: כל משתתף בתורו בוחר נקודה על הרשת ומסמנה בצבע משלו.

   מנצח: המשתתף הראשון שיש לו ארבע נקודות שהם קודקודים של ריבוע.
   ריבוע יכול להיות מסובב ומכל גודל.

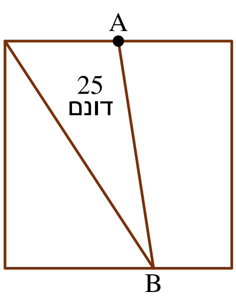
דוגמה שבה השחקן הכחול מנצח



חידה

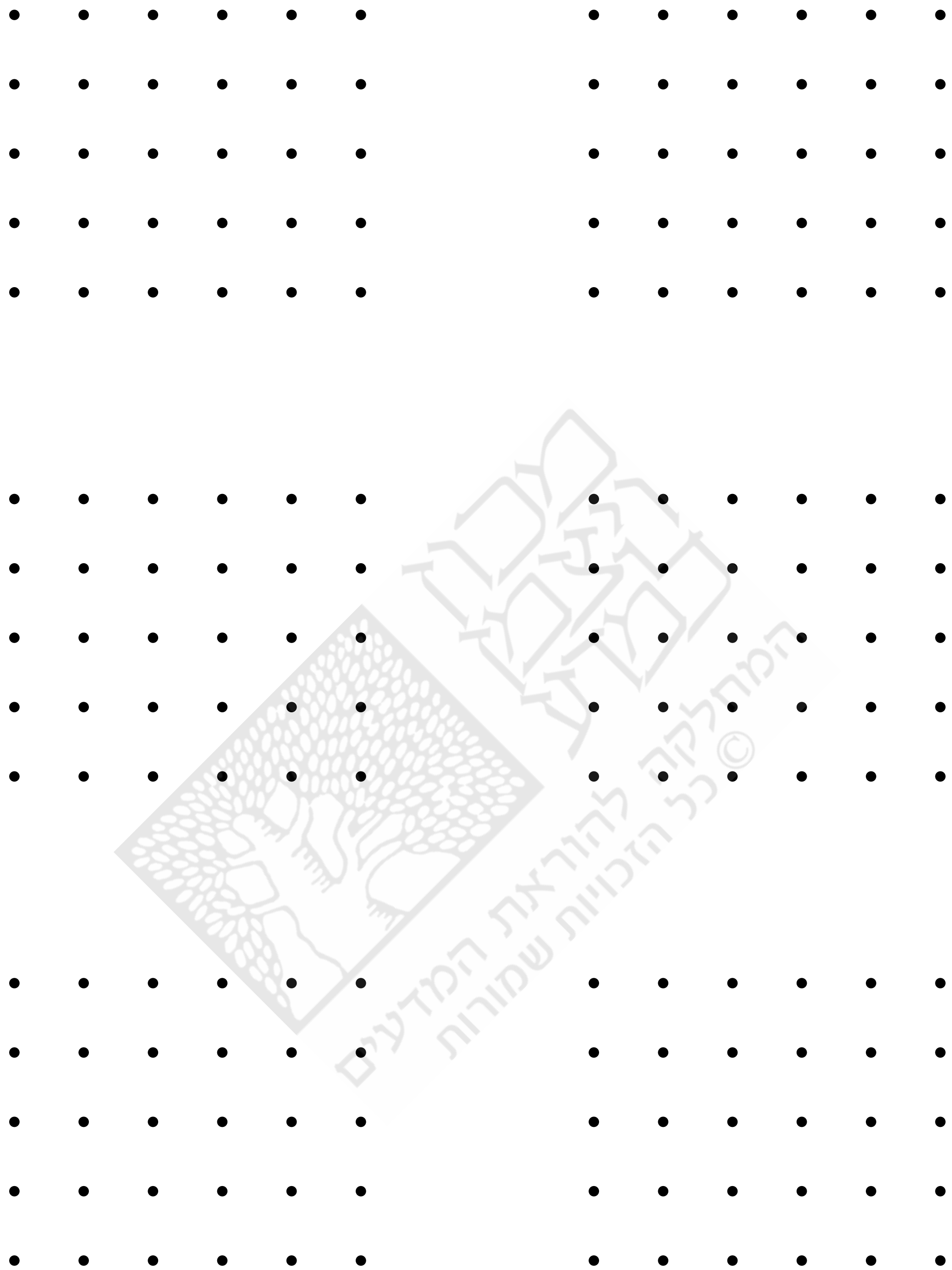
חידה הודית עתיקה*

לאיכר הודי חובב מתמטיקה היו שלושה בנים - שני הבנים הגדולים תאומים.
האיכר רצה להוריש לשלושת בניו את חלקתו הריבועית, כך ששטחי חלקות הבנים התאומים יהיו שווים. האיכר סימן את נקודת האמצע A של אחת מצלעות המגרש, ומתח קו עד לנקודה כלשהי (B) על הצלע שממול.
הבן הצעיר קיבל את החלקה המשולשת הפנימית אשר שטחה 25 דונם. את שתי החלקות הנותרות ששטחיהן שווים הוריש לשני בניו הגדולים התאומים.
היכן נמצאת הנקודה B שבחר האיכר?



* מבוסס על חידה מאתר מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך העל-יסודי.

רשתות למשחק: השלימו לריבוע



המחלקה להוראת המדעים
© כל הזכויות שמורות