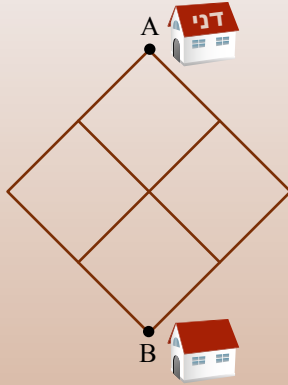


יחידה 8: משולש פסקל

8.1 בכמה דרכים?

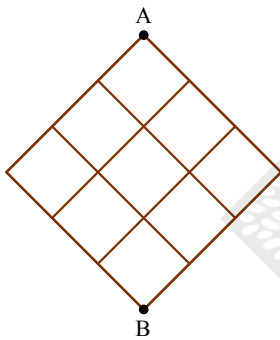


דני גר בשכונה שבה כל הרחובות מקבילים או מאונכים זה לזה. דני גר ליד הצומת המסומן באות A בשרטוט, וחברו **רמי** גר ליד הצומת המסומן באות B.

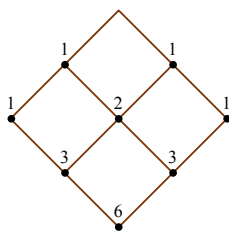
דני רוצה לדעת בכמה דרכים שונות ניתן להגיע מביתו לבית של רמי. מותר לבחור אך ורק ברחובות שבכיוון דרום-מזרח או דרום-מערב (במפה - הרחובות המובילים כלפי מטה).

דני הציע: כדאי להתחיל מן הבית שלי ולרשום ליד כל צומת את מספר הדרכים המובילות אליו.

1. נסו למצוא בכמה דרכים שונות ניתן להגיע מתביתו של דני לביתו של רמי. היעזרו בהצעה של דני.

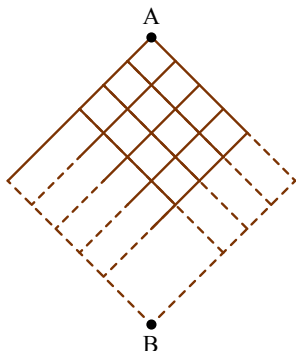


2. התבוננו בשרטוט. בכמה דרכים שונות ניתן להגיע מנקודה A לנקודה B? מותר להגיע מ-A ל-B רק בשבילים שמובילים לכיוון דרום-מזרח או דרום-מערב.



מספר הדרכים המובילות לכל צומת הוא סכום מספרי הדרכים המובילות לצמתים הסמוכים שמעליו.

מג/3: במשימת הפתיחה מתקבלת מערכת המספרים שבצד שמאל.



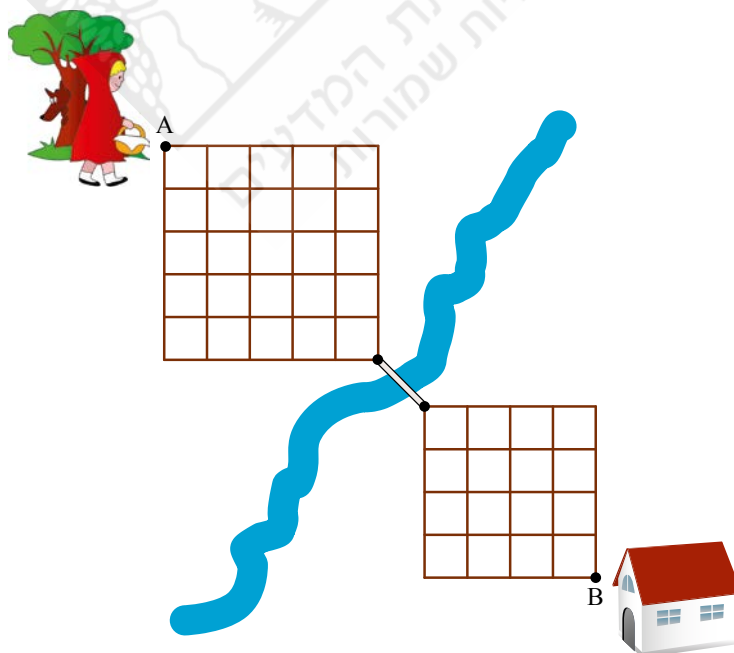
3. מהן מידות רשת השבילים הריבועית שבתמונה בצד שמאל, אם ניתן להגיע מן נקודה A לנקודה B ב-924 דרכים שונות?



מנהטן היא רובע של העיר ניו יורק שבארצות הברית. מנהטן נבנתה בתקופה שבה ניו יורק גדלה בקצב מהיר ביותר, על שטח פנוי מבניינים קודמים. בשנת 1811 הוחלט לבנות במנהטן רשת רחובות. הרחובות המובילים מהדרום לצפון נקראו שדרות (Avenue), והרחובות המובילים מהמזרח למערב נקראו רחובות (Street). הן הרחובות והן השדרות מוספרו במספרים עוקבים. כתוצאה מכך, נוצרה רשת של רחובות ושדרות מאונכים זה לזה. מתן מספרים לכל רחוב ושדרה מקל מאוד על ההתמצאות בעיר.

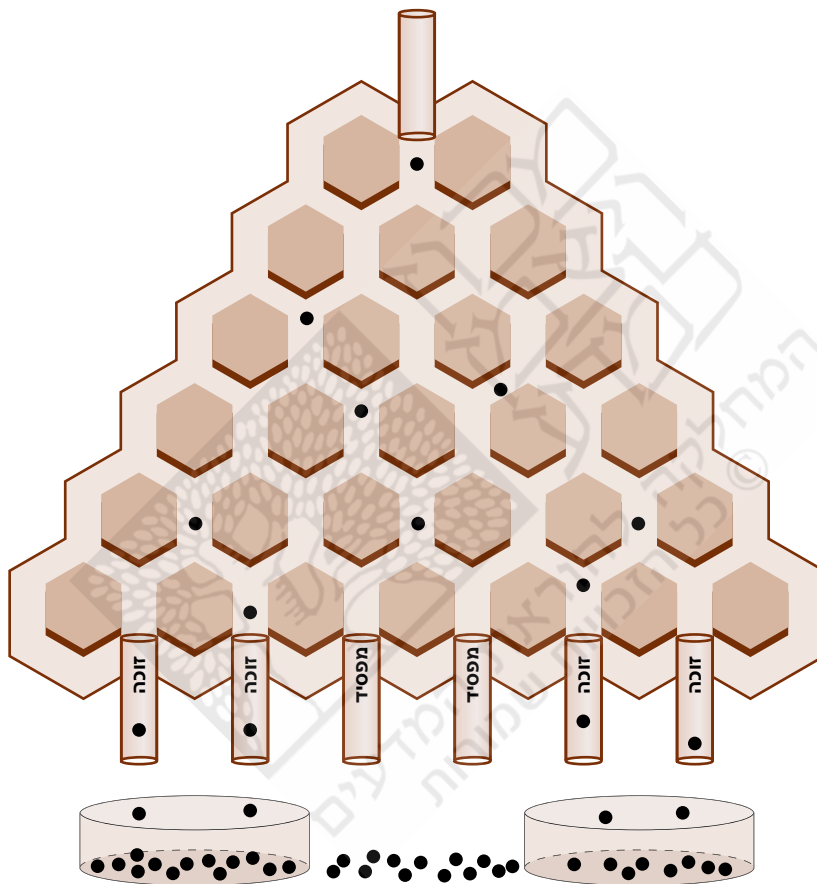
כיפה אדומה

4. כל יום כיפה אדומה מביאה אוכל מביתה (נקודה A במפה) אל ביתה של סבתא (נקודה B במפה). כדי לבלבל את הזאב, החליטה כיפה אדומה להגיע מביתה לבית של סבתא מדי יום במסלול אחר.
- א. בכמה דרכים שונות יכולה לבחור כיפה אדומה?
- ב. כמה שנים בערך יעברו עד שכיפה אדומה תעבור דרך כל המסלולים?



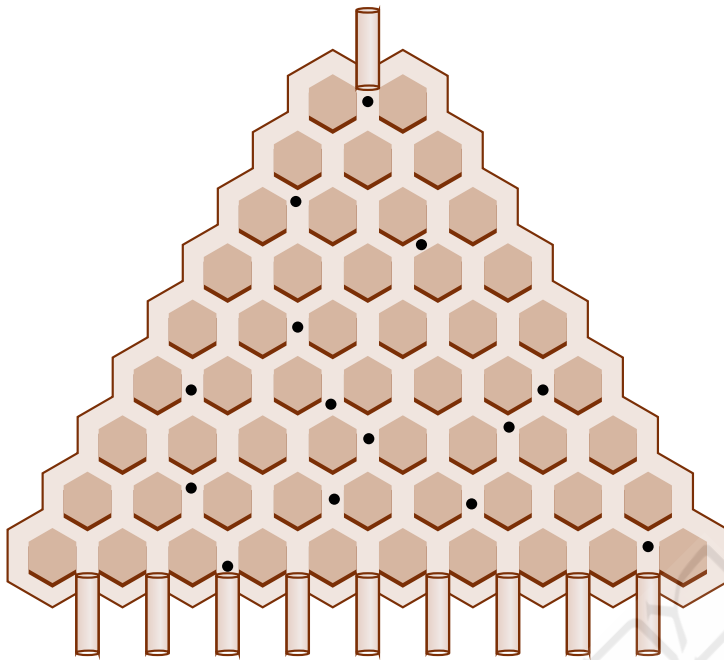
משחק המבוך

5. בשרטוט "מבוך מסלולים" משחילים כדור בפתח העליון של המבוך, והוא נופל דרך סדרה של 5 צמתים. בכל צומת הכדור נכנס מלמעלה ומתגלגל באופן אקראי דרך הפתח הימני או השמאלי שבתחתית הצומת. אם בסוף המבוך הכדור נופל לתוך אחד משני הכלים, זוכים בנקודה, ואם הוא נופל מחוץ לכלי, מפסידים נקודה.
- א. האם המשחק הוגן?
- ב. אם לא, הציגו דרך להפוך את המשחק להוגן.

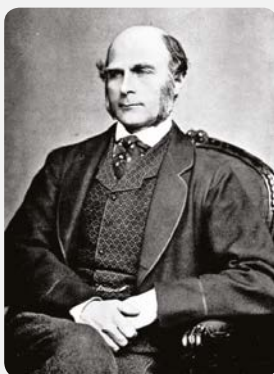


המבוך הגדול

6. המבוך שבשרטוט מורכב מ-9 שורות של משושים. בדרכו מן הפתח העליון אל אחד הפתחים התחתונים, הכדור עובר דרך 8 צמתים.



- א. מהו המספר הכולל של המסלולים המובילים מן הפתח העליון אל אחד הפתחים התחתונים?
ב. כמה מסלולים מובילים לפתח הקיצוני השמאלי?
מה הסיכוי שכדור ייצא מן המבוך דרך הפתח הקיצוני השמאלי?
ג. כמה מסלולים מובילים לפתח האמצעי?
מה הסיכוי שכדור ייצא מן המבוך דרך הפתח האמצעי?



משחק המבוך הקודם הומצא על-ידי פרנסיס גלטון (Francis Galton, 1822-1911). גלטון היה מדען אנגלי שחקר תופעות שונות באמצעות הסתברות וסטטיסטיקה, ולוח המשחק שראינו קודם נקרא לעתים "לוח גלטון". גלטון פרסם מעל 340 מאמרים וספרים. הוא נחשב לחלוץ בתחום שנקרא "חוכמת ההמונים" – אם כי כוונתו הייתה להוכיח כי שיקולים רבים המקובלים על רוב האנשים, הם שיקולים מוטעים. על-מנת להוכיח זאת, הוא השתתף ביריד שבו המבקרים נתבקשו להעריך את משקלו של שור. ההערכה הטובה ביותר זכתה בפרס. להפתעתו של גלטון אף איש (וביניהם אנשים שנחשבו למומחים בנושא) לא הגיע ממש קרוב למשקל האמתי של השור, אך הממוצע של כל ההערכות היה שונה מהמשקל האמתי ב-0.08 אחוז בלבד! היום הביטוי "חוכמת ההמונים" פופולארי עקב אתרי אינטרנט (כגון ויקיפדיה) המשתמשים בידע של אנשים רבים.

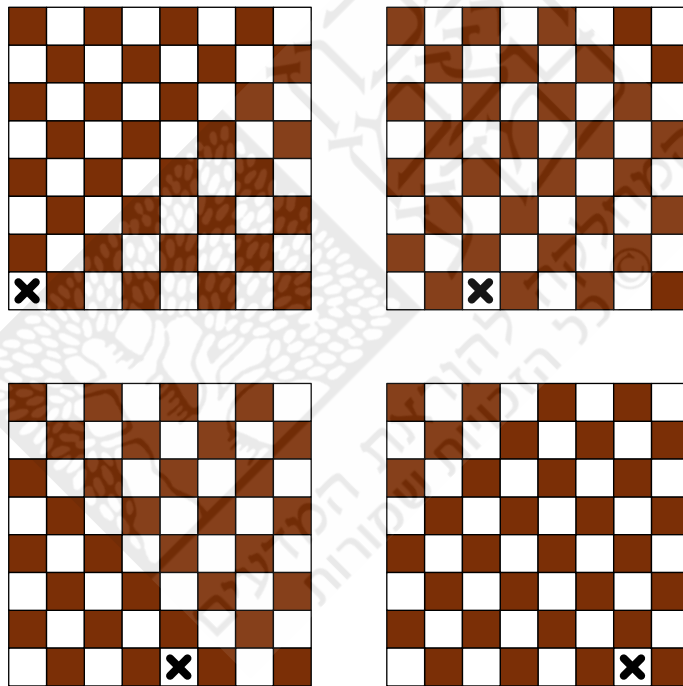
במשימות קודמות שאלנו "מה הסיכוי?" אפשר למצוא את הסיכוי (או במונחים מתמטיים יותר את ההסתברות) לתוצאה מסוימת על-ידי מציאת היחס בין מספר המסלולים המובילים לתוצאה הרצויה, למספר הכולל של כל המסלולים האפשריים.

מציאה: במשימה 5 הסיכוי שהכדור ייפול לתוך אחד הכלים הוא $\frac{12}{32}$, כי 12 מתוך 32 המסלולים האפשריים מובילים את הכדור לתוך אחד משני הכלים שבתחתית המבוך.

דמקה

7. אם נניח חייל דמקה על משבצת לבנה לבנה הנמצאת בשורה הראשונה של לוח שחמט ריק, הוא יוכל להגיע (בתנועה האלכסונית המותרת בדמקה) לכל אחד מן המשבצות הלבנות בשורה האחרונה (השמינית) של הלוח במספר דרכים.

א. בכל שרטוט, חשבו את מספר המסלולים שבהם ניתן לעבור מן המשבצת הלבנה שבשורה הראשונה (מסומנת ב-x) אל כל אחת מן המשבצות הלבנות שבשורה השמינית.



ב. מצאו את משבצת היציאה (בשורה הראשונה) ואת משבצת המטרה (בשורה השמינית) שביניהן ניתן לנוע במספר הדרכים הגדול ביותר. בכמה דרכים שונות ניתן לנוע בין שתי המשבצות הללו?

ג. בכמה דרכים ניתן להגיע מן המשבצת הלבנה הקיצונית השמאלית התחתונה אל השורה העליונה?

ד. בכמה דרכים ניתן להגיע מן השורה הראשונה אל השורה השמינית?

ה. מיכה אמר: מספר הדרכים להגיע מן השורה הראשונה לשורה השמינית הוא פי שניים ממספר הדרכים להגיע מהשורה הראשונה לרביעית. האם הוא צודק? אם כן, הוכח. אם לא, פי כמה בערך, גדול המספר הראשון מהשני?