

## 8.4 מספרים משולשים וארבעוניים

**דני** ואמו קנו תפוזים בשוק. מוכר הפירות ארגן את התפוזים במבנים בצורות דמויות משולשים.



דני רצה לדעת כמה תפוזים יהיו ב- "משולש" הרביעי. מהו מספר התפוזים בכל "משולש"? רשמו את סדרת המספרים מהקטן עד הגדול.

אם ניתן לסדר כמות מסוימת של פריטים בצורת משולש, המספר המתאים לכמות זאת נקרא **מספר משולש**.

מספר משולש ניתן לכתיבה ולחישוב כסכום של מספרים עוקבים, החל מ- 1.

1. רשמו את 8 המספרים המשולשים הראשונים.

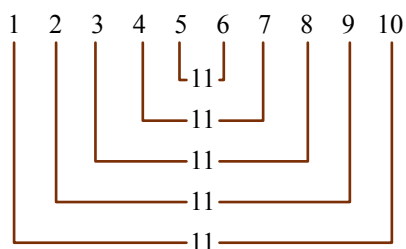
2. המספר המשולש ה- 100 הוא 5,050.

א. מהו מספר המשולש ה-101?

ב. כיצד אפשר לחשב את המספר המשולש ה-  $n$ , אם המספר המשולש ה-  $(n - 1)$  ידוע?

3. א. חשבו לפי "השיטה" הנרמזת באיור מספרים משולשים שונים.

ב. נסו למצוא ביטוי אלגברי המייצג את המספר המשולש ה-  $n$  - כלומר, את סכום המספרים הטבעיים מ-1 עד  $n$ .





**קרל פרידריך גאוס** (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) היה מתמטיקאי גרמני הנחשב לאחד המתמטיקאים הגדולים בכל הדורות. מספרים כי גאוס היה בן תשע, כשהמורה ביקש מתלמידיו לחבר את המספרים הטבעיים מ-1 עד 100 – תרגיל שלפי הערכתו אמור היה לדרוש מהם עבודה של שיעור שלם אחד לפחות. לאחר כמה שניות הציג גאוס הקטן למורה שלו את התוצאה: 5,050. הוא הסביר למורה הנדהם כי אם מחברים בזוגות את המספר הראשון והאחרון, את המספר השני וזה שלפני האחרון וכך הלאה, מקבלים 50 זוגות של מספרים שסכום כל אחד מהם 101 (1 + 2 = 99 + 50 = ... = 100 + 51). כך הוא הסיק כי תוצאת התרגיל של המורה היא 5,050 (= 101 · 50).



4. ניצור את סדרת המספרים המשולשים באמצעות גיליון אלקטרוני (למשל, Excel).

א. כתבו בעמודה הראשונה את המספרים הטבעיים מ-1 עד 30.

ב. צרו בעמודה השנייה את 30 המספרים המשולשים הראשונים בסדרה: כתבו נוסחה מתאימה לחישוב מספר משולש (ראו משימה 2) וגררו.

ג. בעמודה השלישית, צרו בדרך אחרת את 30 המספרים המשולשים הראשונים בסדרה: כתבו נוסחה אחרת המתאימה לחישוב מספר משולש (ראו משימה 3) וגררו.

ד. השוו בין שתי הסדרות שיצרתם בסעיפים ב' ו-ג'.

	A	B	C
1	1	1	1
2	2	3	
3	3	6	
4	4	10	
5	5		
6	6		
7	7		
8	8		
9	9		
10	10		



5. א. רשמו את סדרת עשרת המספרים המשולשים הראשונים. חשבו כל אחד מהם בעזרת המספר

המשולש שלפניו בסדרה, לפי הכלל שמצאתם במשימה 2.

ב. חשבו את עשרת המספרים המשולשים הראשונים בעזרת הנוסחה שמצאתם במשימה 3.

ג. השוו בין שתי הסדרות שיצרתם בסעיפים א' ו-ב'.

מוכר התפוזים בשוק החליט לסדר את סחורתו בסדרה מרשימה של "פירמידות": מעל כל משולש (ראו את שאלת הפתיחה) הוא הניח שכבות תפוזים משולשות קטנות יותר – כל משולש קטן מן המשולש שמתחתיו (ראו תמונה). בדרך זאת הוא קיבל סדרה של "מגדלי" תפוזים דמויי ארבעונים (פירמידות משולשות).

נקרא למספרי התפוזים (או הכדורים) שאפשר לסדר בערמות דמויות ארבעונים מספרים ארבעוניים.



6. א. השלימו את הטבלה. היעזרו בערמות התפוזים.

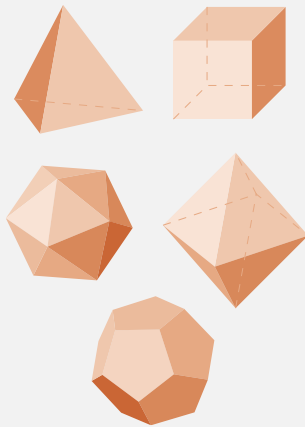
5	4	3	2	1	מקום
			3	1	מספר משולש
			4	1	מספר ארבעוני

ב. המספר הארבעוני ה-15 הוא 680. מהו המספר הארבעוני ה-16?

7. אפשר לחשב את המספר הארבעוני הנמצא במקום ה- $n$  בסדרה כך:

$$\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{6}, n \geq 1 \text{ (מספר טבעי).}$$

חשבו באמצעות הביטוי את המספרים הארבעוניים ה-15 וה-16 ובדקו תשובתכם למשימה הקודמת.



**ארבעון משוכלל** הוא גוף שפאותיו הן ארבעה משולשים שווי-צלעות. הארבעון המשוכלל הוא אחד מחמשת הפאונים המשוכללים: הארבעון, הקובייה, התמניון, התריסרון והעשרימון (ראו תמונה). **פאון משוכלל** הוא גוף קמור המוגבל על-ידי מצולעים משוכללים מאותו סוג, כך שבכל קדקוד שלו נפגשים אותו מספר של מצולעים. אפלטון - פילוסוף ומתמטיקאי שחי ביוון לפני כ- 2,500 שנה, טען כי הפאונים המשוכללים הם התגלמות היופי בשל הסימטריה המושלמת שלהם. אפלטון האמין כי הגופים המשוכללים מסמלים את היסודות המרכיבים את העולם.

8. התבוננו במשולש פסקל שלמטה.

א. אתרו במשולש פסקל את סדרת המספרים המשולשים ואת סדרת המספרים הארבעוניים.

ב. אתרו במשולש פסקל

- את סכום 2 המספרים המשולשים הראשונים
- את סכום 3 המספרים המשולשים הראשונים
- את סכום 4 המספרים המשולשים הראשונים

ג. הכלילו והסבירו: סכום  $n$  המספרים המשולשים הראשונים נמצא במשולש פסקל במקום ה- \_\_\_\_, ב- "קליפה" מספר \_\_\_\_.

										שורה 0
				1						שורה 1
			1	1						שורה 2
		1	2	1						
	1	3	3	1						
	1	4	6	4	1					
	1	5	10	10	5	1				
	1	6	15	20	15	6	1			
	1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1		



מלטשים ארבעון משוכלל מזכוכית באופן הבא: מחברים את אמצעי שלוש צלעות היוצאות מקדקוד אחד ומנסרים את הפירמידה הנוצרת. חוזרים על הפעולה בכל אחד מקדקודי הארבעון. איזה גוף נשאר לאחר הליטוש?