1.2 סכומים

מטרות

- זיהוי חוקיות בסיטואציה מתמטית והכללתה
- קישור בין ייצוגים שונים: מספרי, גיאומטרי ואלגברי
- שימוש בכלים טכנולוגיים לחקירה ולבדיקה

אמצעי עזר

מחשבון , גיליון אלקטרוני (*Excel*),

פתיחה

מציגים את משימת הפתיחה ומבקשים מן התלמידים לאמוד את התוצאות תוך זמן של דקה אחת. יש סיכויים גדולים שהאומדנים (לפחות של הסכום השלישי) יהיו רחוקים זה מזה וגם מהתוצאות המדויקות. יש סיכוי לשיפור האומדן בסוף הפעילות.

ממשיכים בקריאת המדור "הידעתם?"

פתרונות והערות

במהלך המשימה ימצאו התלמידים חוקיות בדגמים גיאומטריים. הדגמים נוצרים על-ידי הרכבת ריבועים או קוביות, והסתכלות על ההרכבה בשתי דרכים שונות. דרך אחת מדגימה סכום (של מספרים טבעיים, או של הריבועים שלהם או של חזקה שלישית שלהם), ודרך שנייה מדגימה מכפלה.

המסקנות הנובעות מן הפעילות הן:

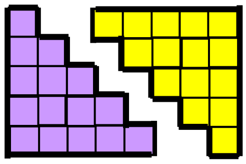
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(1+n)n}{2}$$

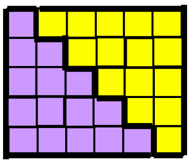
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=(1+2+3+4+\ldots+n)^2=[\frac{(1+n)n}{2}]^2=(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2})^2$$

1. סכום המספרים הטבעיים העוקבים החל מ-1 מיוצג על-ידי שטח של מעין "משולש ישר-זווית עם מדרגות", כאשר כל ריבוע מייצג יחידה אחת, וכל שורה מייצגת מספר טבעי. אם משכפלים את ה"משולש", מסובבים אותו ומחברים את שני החלקים, נוצר מלבן. מידות המלבן $(n+1) \times n$ ושטחו מייצג סכום כפול מהסכום המבוקש.

א.

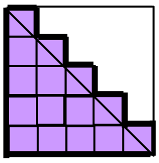




ב. $5050 \ \left(= \frac{101 \cdot 100}{2}\right)$

ג. $\frac{(n+1) \cdot n}{2}$

2. משלימים את "משולש המדרגות" משאלה 1 לריבוע. סכום המספרים הטבעיים העוקבים החל מ- 1 מודגם על-ידי חצי משטח הריבוע הגדול ועוד חצי משטח ריבועי היחידה שבאלכסון שלו.



א. $15 \ \left(= \frac{5^2}{2} + \frac{5}{2}\right)$

ב. $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. אם רושמים מכנה משותף ומפרקים לגורמים, אפשר לראות כי מתקבל ביטוי זהה לקודם.

3. א. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

$$\frac{11 \cdot 10}{2} = 55 \qquad \frac{10^2}{2} + \frac{10}{2} = 55$$

ב. הדגמה זו מתאימה להדגמה הגיאומטרית הראשונה שבה הפכנו את סדר המחוברים וחישבנו את ערך הסכום על-ידי מכפלה.

4. א. 20 מספרים. לפי הדגם הראשון: הכפלת הסכום תיתן את שטח המלבן. מידות המלבן הם שני מספרים טבעיים עוקבים. מחפשים שני מספרים טבעיים עוקבים שמכפלתם 420. אפשר למצוא אותם על-ידי ניסוי וטעייה, או להיעזר בפרוק לגורמים ראשוניים של המספר 420. המספרים הם 20 ו- 21.

ב. 10 מספרים. הסכום של חמשת המספרים הטבעיים הראשונים הוא 15 $\left(= \frac{6 \cdot 5}{2}\right)$. לכן, הסכום מ- 1 ואילך הוא 120 (=105 + 15). מחפשים שני מספרים טבעיים עוקבים שמכפלתם היא 240 $(= 120 \cdot 2)$. המספרים הם 15 ו- 16. יש לחבר 15 מספרים כדי שסכומם יהיה 120, לכן יש לחבר 10 $(= 15 - 5)$ מספרים טבעיים עוקבים מ- 6 ואילך כדי לקבל 105.

5. סכום ריבועי המספרים הטבעיים העוקבים החל מ-1 מיוצג על-ידי הנפח של מעין "פירמידה משולשת עם מדרגות", בה כל קובייה מייצגת יחידה, וכל קומה מייצגת ריבוע של מספר טבעי. אם משכפלים את הגוף פעמיים נוספות ומחברים את שלושת החלקים, נוצרת תיבה שמידותיה $n \times (n+1) \times (n+\frac{1}{2})$ ונפחה (שאפשר להציגו כמכפלה) גדול פי 3 מהסכום המבוקש.

א. $1^2+2^2+3^2=\dfrac{3\cdot 4\cdot 3\frac{1}{2}}{3}=14$

ב. $6x7x6\frac{1}{2}$

ג. $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2=\dfrac{10\cdot 11\cdot 10\frac{1}{2}}{3}=385$

ד. $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+\frac{1}{2})}{3}$

כדאי לדעת כי מספר הריבועים השונים (שאורך צלעותיהם מספרים טבעיים) שניתן לזהות בריבוע שמידותיו nxn שווה לסכום ריבועי המספרים הטבעיים מ- 1 ועד n.
למשל, בריבוע של 10x10 ניתן לזהות 385 ריבועים שונים (שאורכי צלעותיהם מספרים טבעיים), כולל הריבוע המקורי (ראו סעיף ג).

ה. 1240 הוא סכום ריבועי 15 המספרים הטבעיים הראשונים.
הכפלת הסכום ב- 3 תיתן את נפח התיבה. לכן נפח התיבה $3720\ (=3\cdot 1240)$. מימדי התיבה הם שלושה מספרים הקרובים זה לזה. שניים עוקבים והשלישי נמצא באמצע בין שניהם. על-ידי ניסוי וטעיה אפשר למצוא כי המספרים הם: 15, 16, ו- 15.5.

6. החלוקה לריבועים שבכל שרטוט מייצגת את סכום החזקות השלישיות של המספרים הטבעיים העוקבים החל מ- 1 בשתי דרכים.

- על-ידי סכום השטחים החלקיים שבריבוע הגדול באופן הבא:

ריבוע 1 של 1x1 – מייצג את $1^3\ (=1\cdot 1^2)$

2 ריבועים של 2x2 (אחד שלם ואחד מחולק לשני חצאים) – מייצג את $2^3\ (=2\cdot 2^2)$

3 ריבועים של 3x3 – מייצג את $3^3\ (=3\cdot 3^2)$

4 ריבועים של 4x4 (שלושה שלמים ואחד מחולק לשני חצאים) – מייצג את $4^3\ (=4\cdot 4^2)$

וכן הלאה עד n.

- אפשר לחשב אותו שטח כשטח הריבוע הנוצר על-ידי גבולות הרשת:

אורך צלע הריבוע הגדול הזה הוא סכום n המספרים הטבעיים הראשונים, ולכן שטחו יהיה:

$(1 + 2 + 3 + \ldots n)^2$

א-ג.

	דרך א	דרך ב
רשת 3	$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$	$(1 + 2 + 3)^2 = 36$
רשת 4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$	$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 100$
רשת 6	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441$	$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2 = 441$
רשת 10	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + 10^3 = 3025$	$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ 10)^2 = 3025$

ד. הכללת החישובים השונים תוביל לשוויון בין הביטויים האלגבריים הבאים:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2$$

במשימות הראשונות הבענו את סכום המספרים הטבעיים העוקבים החל מ- 1 באופנים הבאים:

$$\frac{(n+1)\cdot n}{2} \quad , \quad \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

לכן אפשר לייצג את סכום החזקות השלישיות של המספרים הטבעיים העוקבים הראשונים על-ידי העלאה בריבוע של כל אחד מהביטויים האלגבריים הנ"ל. כל ריבוע כזה ניתן לכתיבה במספר אופנים. שניים מהם מופיעים בפעילות בסעיף הבא.

ה. כל הביטויים יכולים לייצג את הסכום הדרוש. (ראו סעיף ד.)

ו. **למשל,** $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 20^3 = [\frac{(1+20)\cdot 20}{2}]^2 = 210^2 = 44{,}100$

ז. 14,400 הוא סכום החזקות השלישיות של 15 המספרים הטבעיים הראשונים.

אפשר לבטא את סכום החזקות השלישיות של n המספרים הטבעיים הראשונים בעזרת **ריבוע** הסכום של n המספרים הטבעיים הראשונים. לכן הסכום עצמו יהיה $\sqrt{14{,}400} = 120$. הביטוי $\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ מייצג סכום זה.

לכן $\frac{(n+1)\cdot n}{2} = 120$. מחפשים שני מספרים טבעיים עוקבים שמכפלתם 240. על-ידי ניסוי וטעיה (או על-ידי פתרון משוואה ריבועית), מקבלים את המספרים 15 ו- 16.

.7

	A	B	C	D	E	F
1	המספרים הטבעיים	סכום המספרים הטבעיים	הריבועים של המספרים הטבעיים	סכום הריבועים של המספרים הטבעיים	חזקות 3 של המספרים הטבעיים	סכום חזקות 3 של המספרים הטבעיים
2	1	1	=A2^2	1	=A2^3	1
3	=A2+1	=B2+A3		=D2+C3		=F2+E3

לאחר גרירת הביטויים כלפי מטה לפי הסדר מימין לשמאל, נקבל:

	A	B	C	D	E	F
1	המספרים הטבעיים	סכום המספרים הטבעיים	הריבועים של המספרים הטבעיים	סכום הריבועים של המספרים הטבעיים	חזקות 3 של המספרים הטבעיים	סכום חזקות 3 של המספרים הטבעיים
2	1	1	1	1	1	1
3	2	3	4	5	8	9
4	3	6	9	14	27	36
5	4	10	16	30	64	100
6	5	15	25	55	125	225
7	6	21	36	91	216	441
8	7	28	49	140	343	784
9	8	36	64	204	512	1296
10	9	45	81	285	729	2025
11	10	55	100	385	1000	3025
12	11	66	121	506	1331	4356
13	12	78	144	650	1728	6084
14	13	91	169	819	2197	8281
15	14	105	196	1015	2744	11025
16	15	120	225	1240	3375	14400
17	16	136	256	1496	4096	18496
18	17	153	289	1785	4913	23409
19	18	171	324	2109	5832	29241
20	19	190	361	2470	6859	36100
21	20	210	400	2870	8000	44100

שומרים על כושר

1. ניתן להביע את הביטויים הנתונים באופנים רבים. להלן כמה אפשרויות:

$$[\frac{n^2+n}{2}]^2 \;,\; \frac{n^2+2n^3+n^4}{4} \;,\; \frac{(1+2n+n^2)}{2}\cdot\frac{n^2}{2} \;,\; \frac{(1+n)^2}{2}\cdot\frac{n^2}{2} \;,\; [(n+1)\cdot\frac{n}{2}]^2 \;,\; [\frac{(n+1)\cdot n}{2}]^2$$

חידה

$7^1=7 \quad 7^2=49 \quad 7^3=343 \quad 7^4=2401 \quad 7^5=16807$

הספרה האחרונה של 7^5 זהה לספרה האחרונה של 7^1. לכן הספרות האחרונות משתנות במחזוריות של 4.

סכום הספרות האחרונות של ארבע החזקות הראשונות של 7 הוא 10 (= 1 + 3 + 9 + 7).

לכן הספרה האחרונה של סכום 48 החזקות הראשונות של 7 היא 0 (12 מחזורים של 4 מספרים). לכן הסכום של 49 החזקות הראשונות של 7 מסתיים ב- 7.

באופן דומה, הסכום של שתי הספרות האחרונות של כל אחת מארבע החזקות הראשונות של 7 הוא:

100 (= 01 + 43 + 49 + 07). גם כאן יש מחזוריות של 4, לכן שתי הספרות האחרונות בסכום 49 החזקות הראשונות של 7 הן 07.

למסיימים

1. א. בדקו את נכונות השוויונים הבאים.

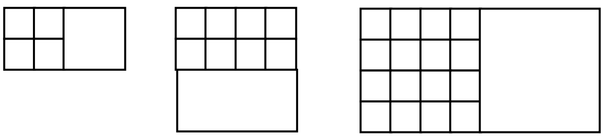
$2+2^1+2^2+2^3+2^4=2^5 \qquad 2+2^1+2^2+2^3=2^4 \qquad 2+2^1+2^2=2^3$

ב. נסו להסביר מדוע השוויונים נכונים.

תשובה

באופן כללי $\underbrace{2+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}}_{2^n}+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$

ג. הצורות הבאות מייצגות את הסכומים שלמעלה, וסכומים דומים להם לפי אותה חוקיות.
מה מאפיין צורות אלו? מה תהיה הצורה הבאה?



תשובה

הצורות הן לסירוגין מלבן שאורכו כפול מרוחבו, וריבוע שאורכו כאורך המלבן הקודם לו.

שטחה של כל צורה כפול משטח קודמתה.

הצורה הבאה תהיה ריבוע.

לסיכום

- מתייחסים לשימוש בייצוגים גיאומטריים להוכחת תכונות אלגבריות
- בודקים באיזו דרך פעלו התלמידים כדי לפתור את ה"שאלות ההפוכות" כמו 4, 5ה, 6ז. מתייחסים לקושי לפתור שאלות אלו בעזרת סכום של חזקות לעומת הקלות לפתרן באמצעות פעולות הכפל והחילוק.
- דנים באסטרטגיות למציאת ביטויים אלגבריים זהים לביטויים נתונים במדור "שומרים על כושר".