יחידה 3: טכניקה אלגברית

3.1 הפרש ריבועים

מטרות

- שימוש והעמקה בנושא נוסחאות הכפל המקוצר
- קישור בין התחום המספרי והאלגברי
- גילוי חוקיות
- שימוש באלגברה לגילוי, ביטוי והצדקת תכונות של מספרים

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (*Excel*),

פתיחה

מציגים לפני התלמידים דוגמאות להפרש ריבועים של מספרים עוקבים, למשל אלו שבפתיח.

רושמים דוגמאות נוספות לפי הצעת התלמידים להפרש ריבועים של מספרים עוקבים.

מעלים השערות למשל:

הפרש ריבועים של מספרים עוקבים הוא מספר אי-זוגי.

הפרש ריבועים של מספרים עוקבים הוא סכום המספרים העוקבים.

מציעים לתלמידים להשתמש בפירוק לגורמים כדי לאשש את השערותיהם, למשל:

$$3^2-2^2=(3-2)(3+2)=1\cdot 5=5$$

$$6^2-5^2=(6-5)(6+5)=1\cdot 11=11$$

פתרונות והערות

הפעילות מתבססת בעיקר על נוסחת הכפל המקוצר $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, כאשר יוצאים מן האגף הימני אל השמאלי. כאשר a ו- b הם מספרים עוקבים, הפרשם 1 ולכן הפרש הריבועים שווה לסכום המספרים. כאשר המספרים הם בדילוג n, הפרש הריבועים הוא סכום המספרים המוכפל ב- n. המכפלה הזאת מאפשרת להכליל את סוגי המספרים הניתנים לכתיבה כהפרש ריבועים של מספרים (זוגי, אי-זוגי, ראשוני וכדומה). הפעילות מעודדת השערות, הכללות והצדקות שלהן בדרך אלגברית. כדאי להפנות את תשומת לב התלמידים שהצדקה אלגברית שנוצרת על-ידי שרשרת שוויונות נתנת לקריאה מימין לשמאל כמו משמאל לימין, ולכן הטענות ההפוכות לטענות המוכחות גם הן נכונות.

1. א. למשל:

- הפרש ריבועים של מספרים עוקבים הוא מספר אי-זוגי.

הוכחה: נסמן את המספרים העוקבים ב- n (n מספר טבעי) וב- (n + 1).

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

לכל n שהוא מספר טבעי, 2n + 1 הוא מספר אי-זוגי.

- הפרש הריבועים של מספרים עוקבים הוא סכום המספרים העוקבים.

הוכחה: לפי הנוסחה, הפרש הריבועים של מספרים שווה למכפלת סכום המספרים בהפרשם.
מכיוון שהפרש המספרים הוא 1, הפרש הריבועים שווה לסכום המספרים (המוכפל ב- 1).

ב. 7, 27, 323

מספר זוגי לא ניתן לכתיבה כהפרש ריבועים של שני מספרים עוקבים, כי (כפי שהוכחנו בסעיף א) הפרש זה הוא תמיד מספר אי-זוגי. ניתן לכתוב **כל** מספר אי-זוגי כהפרש ריבועים של מספרים עוקבים.
הטענות שהוכחנו בסעיף א נכונות גם אם נהפוך אותן: כל מספר אי-זוגי ניתן לכתיבה כהפרש ריבועים של מספרים עוקבים.
כמו כן, סכום של שני מספרים עוקבים (שהוא תמיד אי-זוגי), ניתן לכתוב כהפרש ריבועים של מספרים עוקבים.
ההוכחות הן ההוכחות הקודמות מן הסוף להתחלה.

$$7 = 2\cdot 3 + 1 = 4^2 - 3^2$$
$$27 = 2\cdot 13 + 1 = 14^2 - 13^2$$
$$323 = 2\cdot 161 + 1 = 162^2 - 161^2$$

2. א. דוגמאות

הפרש ריבועים של מספרים בדילוג 2	**הפרש ריבועים של מספרים בדילוג3**
$3^2 - 1^2 = 2\cdot 4 = 8$	$4^2 - 1^2 = 3\cdot 5 = 15$
$5^2 - 3^2 = 2\cdot 8 = 16$	$5^2 - 2^2 = 3\cdot 7 = 21$
$8^2 - 6^2 = 2\cdot 14 = 28$	$6^2 - 3^2 = 3\cdot 9 = 27$
$4^2 - 2^2 = 2\cdot 6 = 12$	$7^2 - 4^2 = 3\cdot 11 = 33$

ב. הפרש הריבועים של מספרים בדילוג 2 הוא סכום המספרים מוכפל ב- 2.
הפרש הריבועים של מספרים בדילוג 3 הוא סכום המספרים מוכפל ב- 3.

ג. המסקנה שרשמנו בסעיף ב נובעת מנוסחת הכפל המקוצר.

ד. בדרך דומה ניתן להסיק מנוסחת הכפל המקוצר כי הפרש ריבועי מספרים בדילוג 6 שווה לסכום המספרים המוכפל ב- 6.

ה.
$$23^2 - 22^2 = 1\cdot 45 = 45$$
$$23^2 - 21^2 = 2\cdot 44 = 88$$
$$23^2 - 20^2 = 3\cdot 43 = 129$$
$$23^2 - 19^2 = 4\cdot 42 = 168$$

3. א. אם שני מספרים עוקבים אז אחד זוגי והשני אי-זוגי. ריבוע של מספר זוגי הוא מספר זוגי, וריבוע של מספר אי-זוגי הוא אי-זוגי. הפרש בין שני מספרים שהאחד זוגי והשני אי-זוגי הוא תמיד אי-זוגי.

ב. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. כאשר a עוקב של b, הפרשם 1 ולכן הפרש הריבועים שלהם שווה לסכומם. מכיוון שהמספרים עוקבים, אחד מהם זוגי והאחר אי-זוגי. לכן סכומם אי-זוגי.

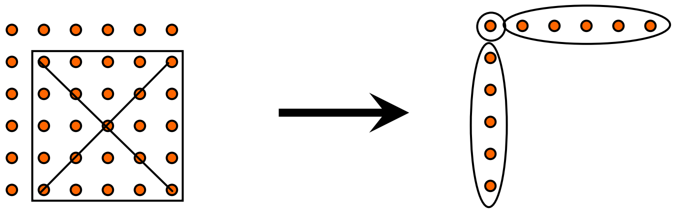
ג. נסמן את המספרים ב- n וב- (n + 1), n מספר טבעי.

$$(n+1)^2-n^2=(n+1+n))(n+1-n)=2n+1$$

לכל n מספר טבעי, 2n + 1 הוא מספר אי-זוגי.

ד. ראה משימה 1 א במדריך זה.

ה. למשל, $6^2-5^2=2\cdot5+1=11$



4. n ו- (n + 1) מייצגים את שני המספרים העוקבים שהפרש הריבועים שלהם הוא המספר האי זוגי 2n + 1.

כדי למצוא את n (המספר הקטן מן השניים), נוריד 1 מהמספר האי-זוגי, ונחלק את התוצאה ב- 2.

כשהפרש הריבועים הוא למשל 47, נפתור את המשוואה 2n + 1 = 47

תהליך הפתרון של המשוואה הוא התהליך המתואר באופן כללי.

47 – 1 = 46 → 46 : 2 = 23

23 הוא המספר הקטן מבין השניים.

לכן המספרים שהפרש ריבועיהם הוא 47 הם 24 ו- 23.

5. א. הפרש ריבועים הוא מכפלת סכומם בהפרשם. לכן הפרש הריבועים של שני מספרים יהיה אי-זוגי, רק אם שני הגורמים האלה (סכומם והפרשם) הם אי-זוגיים.

ההפרש וגם הסכום יהיו אי-זוגיים רק אם אחד המספרים זוגי והשני אי-זוגי.

כלומר, אלה מספרים בדילוג 1 או 3 או 5 וכו'.

בכל המקרים האחרים הפרש הריבועים זוגי, כי סכום והפרש של מספרים זוגיים הם זוגיים, וכן סכום והפרש של מספרים אי-זוגיים הם זוגיים.

ב.

$a^2 - b^2$ (a \ b)	**זוגי**	**אי-זוגי**
זוגי	זוגי	אי-זוגי
אי-זוגי	אי-זוגי	זוגי

6. אם שני המספרים זוגיים (או שניהם אי-זוגיים) אז גם סכומם זוגי וגם הפרשם זוגי. מכפלה של שני מספרים זוגיים תמיד מתחלקת ב- 4.

.7 מספרים זוגיים שאינם מתחלקים ב- 4 לא ניתנים לכתיבה כהפרש ריבועים של מספרים טבעיים. ראינו במשימות הקודמות שאם אחד המספרים זוגי והשני אי-זוגי, הפרש הריבועים שלהם תמיד אי-זוגי, ואם שניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים, הפרש הריבועים שלהם מתחלק ב- 4. וגם הטענות ההפוכות נכונות.

.8 26 ו- 50 הם מספרים זוגיים שאינם מתחלקים ב- 4, ולכן לא ניתנים לכתיבה כהפרש ריבועים של מספרים טבעיים.

.9 מספר ראשוני ניתן לכתיבה כמכפלה של שני גורמים טבעיים רק אם אחד הגורמים הוא 1. הגורם 1 יכול להיות רק ההפרש בין המספרים לכן המספרים עוקבים.

.10 נרשום כל הפרש ריבועים כמכפלות של שני גורמים. הגורם הקטן צריך להיות הפרש המספרים והשני סכומם.

א. $36=36\cdot 1$ $\quad$ $36=18\cdot 2$ $\quad$ $36=12\cdot 3$ $\quad$ $36=9\cdot 4$

אם הפרש הריבועים של שני מספרים הוא זוגי, אז שני המספרים זוגיים או שניהם אי-זוגיים.

לכן גם סכומם והפרשם (גורמי המכפלה) שניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים.

לכן רק המכפלה $36=18\cdot 2$ מתאימה.

$a + b = 18$ $a – b = 2$. אפשר לפתור כמערכת משוואות או לנחש: $a = 10$ $b = 8$ $\quad 10^2-8^2=36$

ב. ראינו במשימות הקודמות שמספר זוגי שאינו מתחלק ב- 4 אינו יכול להיכתב כהפרש של שני ריבועים. ואמנם, אם נכתוב את 30 כמכפלות של שני גורמים:

$30=1\cdot 30$, $30=2\cdot 15$, $30=3\cdot 10$ $\quad$ $30=5\cdot 6$

נראה שתמיד הגורם האחד זוגי והשני אי-זוגי. אילו שניהם היו זוגיים הייתה המכפלה מתחלקת ב- 4.

ג. $21=21\cdot 1$ $\quad a = 11$ $\quad b = 10$ $\quad 11^2-10^2=21$

$21=7\cdot 3$ $\quad a = 5$ $\quad b = 2$ $\quad 5^2-2^2=21$

ד. מכיוון ש- 120 זוגי, המכפלה צריכה לכלול לפחות מספר זוגי אחד. אבל כבר ראינו שלא ייתכן שאחד זוגי והשני אי-זוגי. לכן שני הגורמים זוגיים.

$120=60\cdot 2$ $\quad a = 31$ $\quad b = 29$ $\quad 31^2-29^2=120$

$120=30\cdot 4$ $\quad a = 17$ $\quad b = 13$ $\quad 17^2-13^2=120$

$120=20\cdot 6$ $\quad a = 13$ $\quad b = 7$ $\quad 13^2-7^2=120$

$120=12\cdot 10$ $\quad a = 11$ $\quad b = 1$ $\quad 11^2-1^2=120$

בדקנו באופן שיטתי את כל המכפלות המאפשרות לכתוב את המספר כהפרש ריבועים.

11. מתקבל לוח הפעולה (a^2-b^2) הבא.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	a^2-b^2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0	0												
3	1	1	0											
4	2	4	3	0										
5	3	9	8	5	0									
6	4	16	15	12	7	0								
7	5	25	24	21	16	9	0							
8	6	36	35	32	27	20	11	0						
9	7	49	48	45	40	33	24	13	0					
10	8	64	63	60	55	48	39	28	15	0				
11	9	81	80	77	72	65	56	45	32	17	0			
12	10	100	99	96	91	84	75	64	51	36	19	0		
13	11	121	120	117	112	105	96	85	72	57	40	21	0	
14	12	144	143	140	135	128	119	108	95	80	63	44	23	0

12. א. אלכסון האפסים שבטבלה מייצג את הפרשי ריבועים של מספרים שווים.

הפרשי ריבועים של מספרים בדילוג 1 הם המספרים האי-זוגיים והם נמצאים לאורך הקו שהוא מתחת לאלכסון האפסים.

הפרשי ריבועים של מספרים בדילוג 2 הם המספרים המתחלקים ב- 4, והם נמצאים מתחת לקו הקודם.

שומרים על כושר

1. אורן מצמצם מחוברים במקום לצמצם גורמים.

למשל, $\frac{x^{\cancel{2}}-\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{x}+\cancel{2}}=x-2$

אורן קיבל תוצאה נכונה בסעיפים א ו- ב.

2.

א. $\frac{x^2-1}{x+1} = x-1 \quad (x \neq -1)$

ב. $\frac{x^2-x}{x+1} \quad x \neq -1$ אי–אפשר לצמצם

ג. $\frac{x^2-x}{x-1} = x \quad (x \neq 1)$

ד. $\frac{x^2-x}{x} = x-1 \quad (x \neq 0)$

ה. $\frac{x^3-x}{x-1} = x(x+1) \quad (x \neq 1)$

ו. $\frac{x^3-x}{x} = x^2-1 \quad (x \neq 0)$

ז. $\frac{x^3-x}{x+1} = x(x-1) \quad (x \neq -1)$

ח. $\frac{x^3-x}{x^2-1} = x \quad (x \neq \pm 1)$

ט. $\frac{x^4-x^2}{x-1} = x^2(x+1) \quad (x \neq 1)$

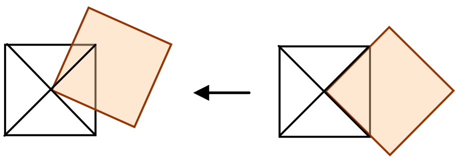
י. $\frac{x^4-x^2}{x+1} = x^2(x-1) \quad (x \neq -1)$

יא. $\frac{x^4-x^2}{x^2+1}$ כל x אי–אפשר לצמצם

יב. $\frac{x^4-x^2}{x^2+x} = x^2-x \quad (x \neq 0, -1)$

3. אורן אינו צודק. אם יש חיבור או חיסור שאפשר לפרק לגורמים, ייתכן שאפשר לצמצם.

אם שתי צלעות של הריבוע העליון מונחות על אלכסוני הריבוע התחתון, השטח המכוסה הוא רבע משטח הריבוע התחתון. כל תנוחה אחרת מתקבלת על-ידי סיבוב הריבוע העליון סביב מרכז הריבוע התחתון. אפשר להראות על-ידי חישובי זוויות שהמשולש הנגלה כתוצאה מן הסיבוב חופף למשולש המתכסה.



למסיימים

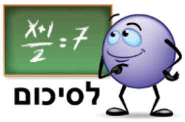
1. מצאו את כל הדרכים לכתוב את 924 כהפרש ריבועים.

תשובה

נפרק את 924 לגורמים ראשוניים. $924 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$

ראינו שאם המספר זוגי הגורמים (הסכום וההפרש) שניהם צריכים להיות זוגיים, לכן המספר 2 הוא גורם של כל אחד מהגורמים

$924 = 2 \cdot 462$	a = 230	b = 232	$232^2 - 230^2 = 924$
$924 = 6 \cdot 154$	a = 80	b = 74	$80^2 - 74^2 = 924$
$924 = 14 \cdot 66$	a = 40	b = 26	$40^2 - 26^2 = 924$
$924 = 22 \cdot 42$	a = 32	b = 10	$32^2 - 10^2 = 924$



- מתייחסים לטענות ולטענות ההפוכות שהוכחו בשיעור ומסכמים אותן
- מתייחסים להוכחה אלגברית המאפשרת להוכיח בבת אחת משפט ומשפט הפוך.
- מביאים את הטבלה הבאה כדרך שיטתית למציאת כל הפרשי הריבועים בדרכים שונות.

הפרש **3** בין המספרים	הפרש **2** בין המספרים	הפרש **1** בין המספרים	הפרש ריבועי המספרים
		1^2-0^2	1
			2
		2^2-1^2	3
	2^2-0^2		4
		3^2-4^2	5
			6
		4^2-3^2	7
	3^2-1^2		8
3^2-0^2		5^2-4^2	9