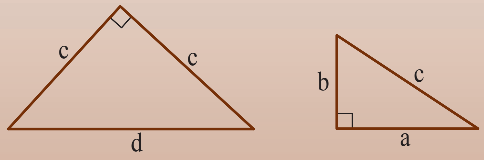
3.4 יוצרים שלשות פיתגוריות

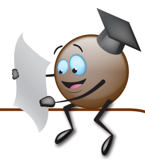
הרכיבו טרפז שווה-שוקיים משישה משולשים לפי הנתונים שבשרטוט:
ארבעה משולשים ישרי-זווית ושוני-צלעות
ושני משולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים.

שימו לב, הצלעות המסומנות ב- c הן באותו אורך.
הסבירו מדוע נוצר טרפז.



נכיר דרכים למציאת שלשות פיתגוריות, כלומר, שלשות של מספרים טבעיים שהם אורכי צלעות של משולשים ישרי-זווית.

1. הוכיחו את משפט פיתגורס על-ידי השוואת שטח הטרפז לסכום שטחי ששת המשולשים המרכיבים אותו.
כלומר, *סכום שטחי המשולשים = שטח הטרפז לפי נוסחה*



הגדרה: שלשה של מספרים טבעיים המקיימת את משפט פיתגורס נקראת **שלשה פיתגורית**.
אם לשלושת המספרים אין גורם משותף (פרט ל- 1), השלשה נקראת **שלשה פיתגורית יסודית**.
דוגמה: השלשה 3, 4, 5 היא שלשה פיתגורית יסודית.
אך השלשה 6, 8, 10 היא שלשה פיתגורית שאינה יסודית.

שלשות באמצעות כפולות

2. א. הראו כי:
אם a, b, c היא שלשה פיתגורית, גם na, nb, nc (n מספר טבעי) היא שלשה פיתגורית.
ב. מצאו שלשות פיתגוריות שונות השייכות לאותה שלשה יסודית.
ג. מצאו שלשה פיתגורית שהמספר הגדול בה 200.

שלשות באמצעות מספר טבעי ומספר הגדול ממנו ב-2

3. א. בחרו שני מספרים טבעיים, כך שאחד המספרים גדול ב- 2 מן השני.
הוכיחו שהשלשה הנוצרת על-ידי:
– סכום המספרים שבחרתם
– מכפלת המספרים
– מכפלת המספרים בתוספת 2
היא שלשה פיתגורית.

ב. הוכיחו כי כל שלשה הנוצרת בדרך זו, באמצעות שני מספרים שהפרשם 2 היא שלשה פיתגורית.

ג. צרו בדרך זו שלשות פיתגוריות אחדות ומצאו באילו מקרים מתקבלת שלשה יסודית.

ד. מהם שני המספרים היוצרים את השלשה הפיתגורית 20, 99, 101?

שלשות באמצעות שני מספרים טבעיים כלשהם

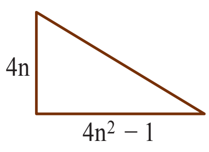
4. א. בחרו שני מספרים טבעיים.
הראו שהשלשה הנוצרת על-ידי:
– מכפלת המספרים שבחרתם המוכפלת ב-2,
– הפרש הריבועים בין המספר הגדול לקטן,
– סכום ריבועי המספרים,
היא שלשה פיתגורית.

ב. הראו באופן כללי
שאם x ו- y מייצגים שני מספרים טבעיים $(x > y)$
אז השלשה
$$2xy$$
$$x^2 - y^2$$
$$x^2 + y^2$$
היא שלשה פיתגורית.

ג. צרו בדרך זו שלשות פיתגוריות אחדות ומצאו באילו מן השלשות שמצאתם התקבלה שלשה יסודית.

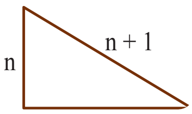
ד. מהם המספרים היוצרים את השלשה 20, 21, 29?

שלשות שבהן כפולה אחת של 4



5. בשלשה היסודית 20, 21, 29 אחד המספרים הוא כפולה של 4.
א. $4n$ מייצג את אורך אחד הניצבים במשולש ישר-זווית,
ו- $4n^2 - 1$ מייצג את אורך הניצב השני.
רשמו ביטוי אלגברי לאורך היתר.
ב. מצאו שלשות פיתגוריות עבור ערכים שונים של n.

שלשות שבהן שני מספרים עוקבים



6. בשלשה היסודית 5, 12, 13 שניים מבין שלושת המספרים הם מספרים עוקבים.

א. n מייצג את האורך של אחד הניצבים במשולש ישר-זווית, ו- $n+1$ מייצג את האורך של היתר. רשמו ביטוי אלגברי לניצב השני.

ב. מצאו בדרך זו שלשות פיתגוריות עבור ערכים שונים של n.

7. בחרו שתיים מן הדרכים שבהן יצרתם שלשות פיתגוריות.

א. השתמשו בגיליון אלקטרוני (למשל, *Excel*), כדי ליצור כ- 20 שלשות פיתגוריות בכל אחת מן הדרכים.

ב. הראו באמצעות הגיליון כי השלשות שיצרתם הן אכן שלשות פיתגוריות.

ג. לכל דרך שבחרתם, מצאו מאפיינים לשלשות הפיתגוריות שקיבלתם.

שלשות פיתגוריות הן שלשות של מספרים טבעיים המקיימות את השוויון $a^2+b^2=c^2$.

האם יש שלשות המקיימות שוויון דומה שבו מעריכים גבוהים יותר (למשל, $a^5+b^5=c^5$)?

השאלה הזאת נוסחה על-ידי המתמטיקאי פייר דה פרמה (Pierre de Fermat,1601-1665) ונקראת בשם *המשפט האחרון של פרמה*. הוא טען כי למשוואה $a^n+b^n=c^n$ $(n>2)$ אין אפילו פתרון יחיד במספרים טבעיים.

פרמה רשם את המשפט בשולי הספר שקרא, וציין:

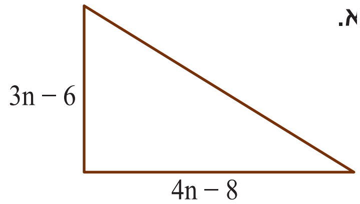
"גיליתי הוכחה נפלאה למשפט זה, אך שוליים אלו צרים מלהכילה."

במשך כ- 350 שנה דרבנה הערה זו מתמטיקאים וחובבי מתמטיקה לחפש הוכחה לטענתו של פרמה. המשפט הוכח לבסוף על-ידי אנדרו ויילס (Andrew Wiles) בשנת1995.

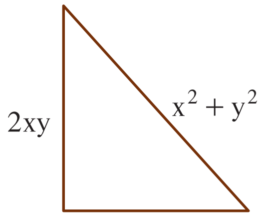
שומרים על כושר

1. הביטויים הרשומים על שתי צלעות של כל משולש מייצגים את אורכי הצלעות האלה.
מצאו את הביטוי המייצג את אורך הצלע השלישית.

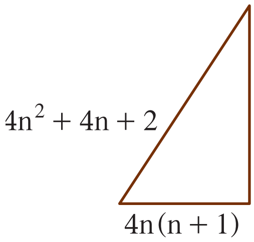
א.



ב.



ג.



2. לכל משולש במשימה 1 מצאו אילו ערכים של n או של (x, y) יוצרים את השלשה הפיתגורית
$6, 8, 10$.

חידה

החליטו ללא מחשבון האם 5555 , 4444 , 3333 היא שלשה פיתגורית.