4.2 סימטריה

מטרות

- העמקה בתכונות של פונקציות
- הכרת תכונת הזוגיות והאי-זוגיות של פונקציה, והקשר לתכונת הסימטריה של גרפים
- הצגת קשרים בין זוגות פונקציות הסימטריות לישר, ובמיוחד הכרת פונקציות הפוכות זו לזו
- שימוש והעמקה בביטויים אלגבריים ובגרפים ובקשר ביניהם

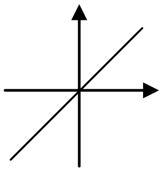
אמצעי עזר

תוכנה גרפית (*Geogebra*),

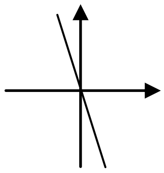
פתיחה

במליאה מבקשים מהתלמידים להתאים גרפים לפונקציות ולנמק את בחירתם. הנימוקים יכולים לכלול את סוג הפונקציה (קווית, ריבועית, מנה...), נקודות מפגש עם הצירים, תחום ההגדרה, תחומי עליה וירידה ועוד.

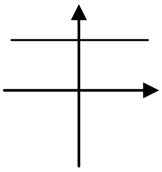
$y = x$



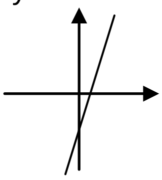
$y = -3x$



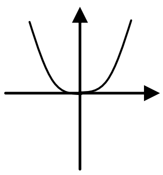
$y = 5$



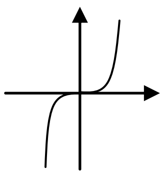
$y = 2x - 3$



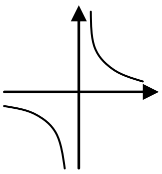
$y = x^2$



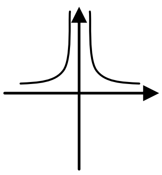
$y = x^3$



$y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$



$y = \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$



אפשר לבקש מן התלמידים למיין את הפונקציות לפי בחירתם. מיונים אפשריים:

- על-פי סוג הגרף: פונקציות קוויות – הגרפים ישרים, ופונקציות אחרות.
- על-פי תכונת הסימטריה: גרפים סימטריים לציר y, גרפים סימטריים לגבי נקודת הראשית וגרפים שאינם סימטריים.
- על-פי תכונת העלייה והירידה: פונקציות עולות בכל התחום, פונקציות יורדות בכל התחום, פונקציות שעולות בחלק מהתחום ויורדות בחלק אחר ופונקציות קבועות.
- על-פי התחום: פונקציות שתחומן מכיל את כל המספרים, ופונקציות שנקודות מסוימות אינן בתחומן.
- על-פי חיתוך עם הצירים: גרפים שעוברים דרך ראשית הצירים, גרפים שאין להם נקודות חיתוך עם הצירים, וגרפים אחרים

פתרונות והערות

בייצוג האלגברי של כל פונקציה, מחליפים כל x ב- $-x$.

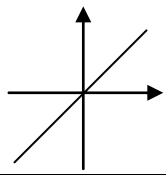
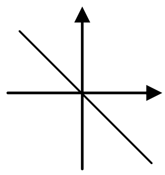
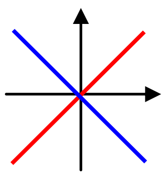
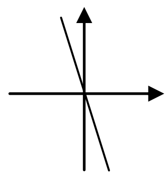
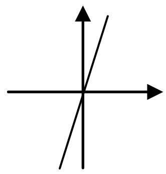
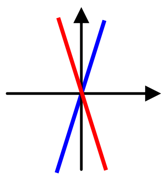
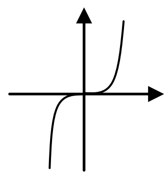
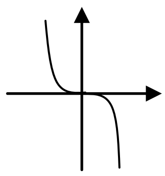
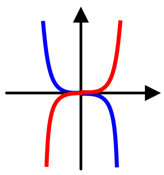
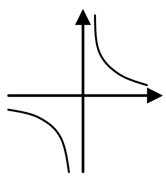
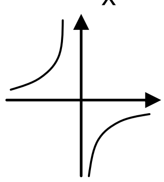
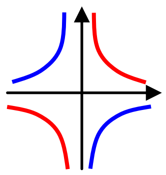
1. א. $y=-x$, $y=3x$, $y=5$, $y=-2x-3$, $y=x^2$, $y=-x^3$, $y=-\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$

ב. השינוי אינו משפיע על הפונקציות הבאות: $y=5$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x^2}$

ג. כל הגרפים של הפונקציות האלה סימטריים לגבי ציר ה- y.

ד. למשל, הגרף של $y=x^4$ גם כן סימטרי לגבי ציר ה- y.

2. א. כתוצאה של הצבת $-x$ במקום x הפונקציות $y=x$, $y=-3x$, $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$ הופכות לפונקציות נגדיות.

הפונקציה לפני השינוי	הפונקציה אחרי השינוי	שתי הפונקציות יחד
$y=x$ 	$y=-x$ 	
$y=-3x$ 	$y=3x$ 	
$y=x^3$ 	$y=-x^3$ 	
$y=\frac{1}{x}$ 	$y=-\frac{1}{x}$ 	

ב. לכל הגרפים של הפונקציות האלה יש סימטריה סיבובית לגבי נקודת הראשית.

תלמידים שאינם מכירים את המושגים הללו יוכלו לתאר את תכונות משותפות אחרות. למשל,

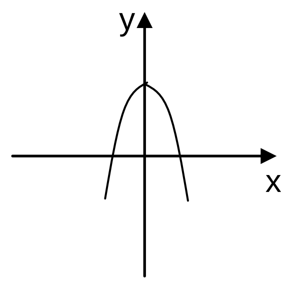
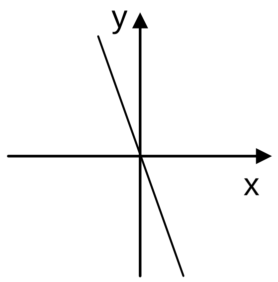
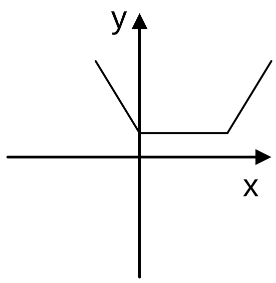
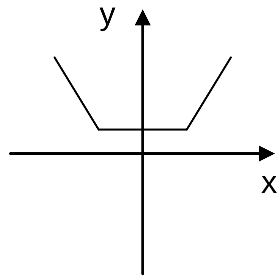
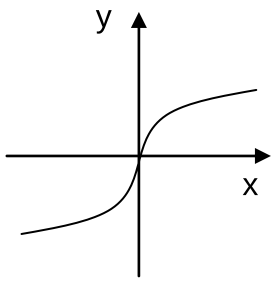
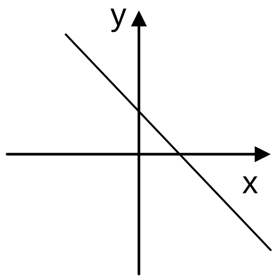
- אם יש לגרף המקורי נקודת חיתוך עם ציר ה-y, אז היא ראשית הצירים.
- כשמשרטטים את שתי פונקציות במערכת צירים אחת, הם סימטריים זה לזה ביחס לשני הצירים.
- תחומי העלייה והירידה מתהפכים ביחס לשתי הפונקציות

ג. למשל, לפונקציה $y=-x^3$ יש אותן תכונות.

3.

פונקציות זוגיות	פונקציות אי-זוגיות	פונקציות אחרות
$f(x)=\frac{3}{x^2+1}$ כל x $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x^2}$ $x\neq 0$	$f(x) = x\lvert x\rvert$ כל x $f(x)=\frac{x}{\lvert x\rvert}$ $x\neq 0$ $f(x)=\frac{1}{x}-x$ $x\neq 0$	$f(x) = x^2 + x^3$ כל x $f(x)=\frac{3}{x^3+1}$ $x\neq -1$ $f(x) = \lvert x\rvert + x$ כל x

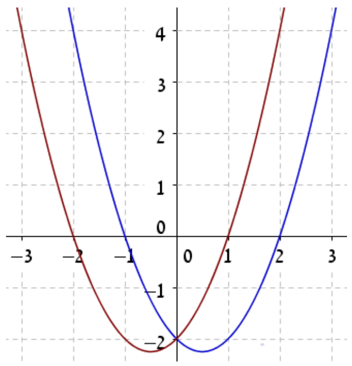
4.

פונקציות זוגיות	פונקציות אי-זוגיות	פונקציות אחרות
		
		

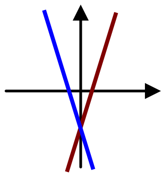
5.

א-ב. למשל, $f(x) = (x - 2)(x + 1)$ ו- $f(-x)$

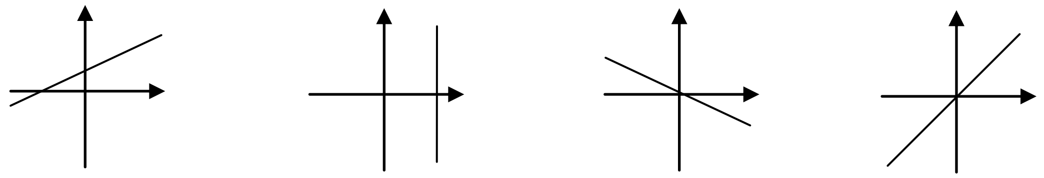
ג. הגרפים של f(x) ו- f(–x) סימטריים לגבי ציר ה- y.



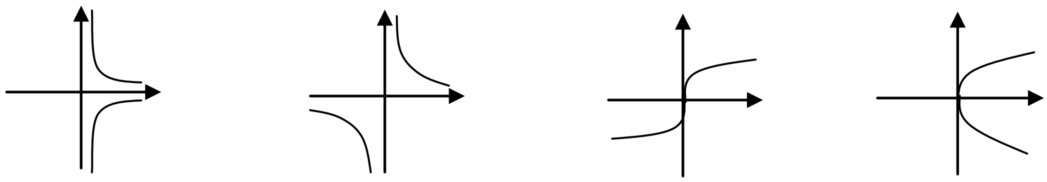
ד. דוגמה נוספת: $g(x) =- 3x -2$ ו- $g(-x)$



6. א-ב. $x = y$ $\quad x = -3y$ $\quad x = 5$ $\quad x = 2y - 3$



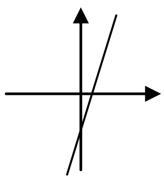
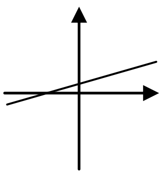
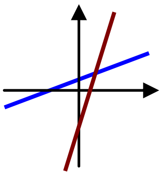
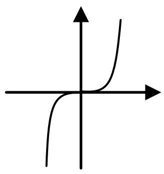
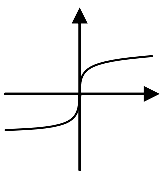
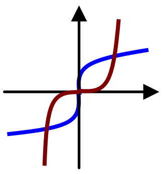
$x = y^2$ $\quad x = y^3$ $\quad x = \frac{1}{y}$ $\quad x = \frac{1}{y^2}$



ג. השינוי אינו משפיע על הפונקציות: $y = x$, $y = \frac{1}{x}$

ד. הגרפים של המשוואות $x = 5$, $x = \frac{1}{y^2}$, $x = y^2$ אינם גרפים של פונקציה, כי בפונקציות המקוריות לאותו ערך של y מתאים יותר מערך אחד של x . לכן לאחר החלפת x ב- y לערך אחד של x מתאים יותר מערך אחד של y.

ה.-ז.

הפונקציה לפני השינוי	הפונקציה אחרי השינוי	שתי הפונקציות יחד
$y = 2x - 3$ 	$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 	
$y = x^3$ 	$y = \sqrt[3]{x}$ 	

בכל מקרה הגרפים של הפונקציה המקורית והפונקציה לאחר השינוי סימטריים זה לזה לגבי הישר $y = x$.

7. א. ראו תשובה למשימה 6א.

ב. הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ (גרף II), לא השתנתה לאחר ההחלפה.

ג. הפונקציה $y = x^2$ הפכה לאחר ההחלפה להתאמה שאינה פונקציה, כי בפונקציה המקורית לאותו ערך של y מתאים יותר מערך אחד של x . לכן לאחר החלפת x ב- y לערך אחד של x מתאים יותר מערך אחד של y.

ד. בכל אחד משני המקרים האחרים, הגרף של הפונקציה המקורית והגרף של הפונקציה שלאחר השינוי, סימטריים זה לזה לגבי הישר $y = x$.

8. פונקציה היא הפוכה לעצמה אם היא אינה משתנה לאחר החלפה בין x ל- y. למשל $y=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$

שומרים על כושר

1. א-ב

פונקציה מקורית	א. פונקציה חדשה	סוג הפונקציה	ב. פונקציה חדשה	סוג הפונקציה
$y = x$	$y = x^2$	ריבועית	$y=\frac{1}{x}$	לא ריבועית ולא קווית
$y = -3x$	$y = -3x^2$	ריבועית	$y=-\frac{3}{x}$	לא ריבועית ולא קווית
$y = 5$	$y = 5$	קווית	$y = 5$	קווית
$y = 2x - 3$	$y = 2x^2 - 3$	ריבועית	$y=\frac{2}{x}-3$	לא ריבועית ולא קווית
$y = x^2$	$y = x^4$	לא ריבועית ולא קווית	$y=\frac{1}{x^2}$	לא ריבועית ולא קווית
$y = x^3$	$y = x^6$	לא ריבועית ולא קווית	$y=\frac{1}{x^3}$	לא ריבועית ולא קווית
$y=\frac{1}{x}$	$y=\frac{1}{x^2}$	לא ריבועית ולא קווית	$y = x$	קווית
$y=\frac{1}{x^2}$	$y=\frac{1}{x^4}$	לא ריבועית ולא קווית	$y = x^2$	ריבועית

כתב ראי הוא צורת כתיבה, שבה, כשמתבוננים דרך מראה, ניתן לקרוא באופן טבעי ורגיל את ההשתקפות של הכתב

למסיימים

1. קראו את המשפט: כל פונקציה f(x) (המוגדרת בתחום סימטרי ל- 0) ניתנת לכתיבה כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית, באופן הבא:

נגדיר שתי פונקציה חדשות על-סמך f(x)

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

א. הוכיחו כי h(x) היא פונקציה זוגית , כלומר היא אינה משתנה בהצבת x– במקום כל x.

ב. הוכיחו כי g(x) היא פונקציה אי-זוגית, כלומר היא הופכת לנגדית בהצבת x– במקום כל x.

ג. הוכיחו כי h(x) + g(x) = f(x)

2. אם ברשותכם מחשב עם תוכנה גרפית (למשל גאוגברה) אשרו (על-ידי שרטוט) את המשפט עבור הפונקציה $f(x)=2^x$, או עבור כל פונקציה שתבחרו.

תשובות

1. א. נציב x– במקום כל x ב- h(x)

$$h(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=h(x)$$

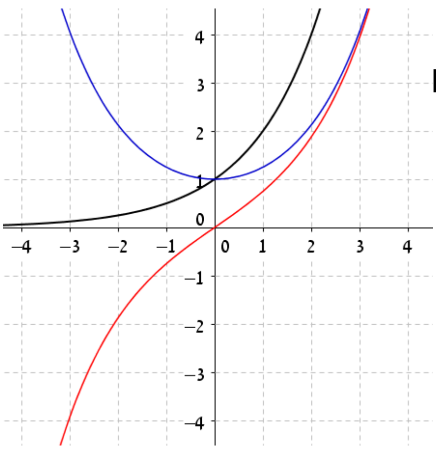
לכן h היא פונקציה זוגית.

ב. נציב x– במקום כל x ב- g(x)

$$g(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-g(x)$$

לכן g היא פונקציה אי-זוגית.

ג. $$h(x)+g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{2f(x)}{2}=f(x)$$



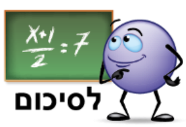
2. ראו שרטוט משמאל.

הגרף של $f(x)=2^x$ שחור.

$h(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$, והגרף שלה (**הכחול**) סימטרי לציר ה- y.

$g(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$, והגרף שלה (**האדום**) סימטרי לנקודת הראשית.

אפשר לראות כי עבור כל x הסכום של ערכי y של הפונקציות h ו- g שווה לערך y של הפונקציה f באותה נקודה.



לסיכום

- בודקים אם יש פונקציות שיש להן יותר מתכונה אחת של סימטריה. ואם כן, מה משותף להן.
- דנים על היתרונות שיש ב"קריאת" התכונות האלה של הפונקציות מהביטוי האלגברי שלהן.