

5.2 טענות באלגברה



חן ורחל שיחקו במשחק הבא:

- בכל תור בוחרים שני מספרים טבעיים שונים.
- שחקן אחד או שחקנית אחת מחשבים את הממוצע החשבוני של ריבועי המספרים. שחקן אחר או שחקנית אחרת מחשבים את ריבוע הממוצע החשבוני של המספרים.
- אם מקבלים תוצאה גדולה יותר באותו תור, זוכים בנקודה.

שערו, האם המשחק הוגן?

נשתמש באלגברה כדי להוכיח טענות וחוקיות.

1. א. שחקו בזוגות את המשחק מספר פעמים.
ב. השוו את התוצאות שקיבלתם לאלה של זוגות אחרים.
ג. הסיקו מסקנה לגבי הוגנות המשחק.
ד. הוכיחו טענתכם.
רמז: אפשר לייצג ב- a ו- b את שני המספרים ולהראות זהות או אי-שוויון בין הביטויים המתאימים.

2. משפט:
אם מכפילים ב- 2 את סכום הריבועים של שני מספרים טבעיים כלשהם, אפשר לכתוב את התוצאה כסכום של שני מספרים שלמים ריבועיים.
כלומר: לכל שני מספרים טבעיים a ו- b , אפשר למצוא שני מספרים טבעיים c ו- d כך ש-

$$2(a^2 + b^2) = c^2 + d^2$$

- א. בדקו מספר דוגמאות.
- ב. חפשו קשר בין המספרים a ו- b (המספרים הנתונים) ובין המספרים c ו- d (המחוברים בסכום הריבועים המתאים).
- ג. הוכיחו את המשפט.



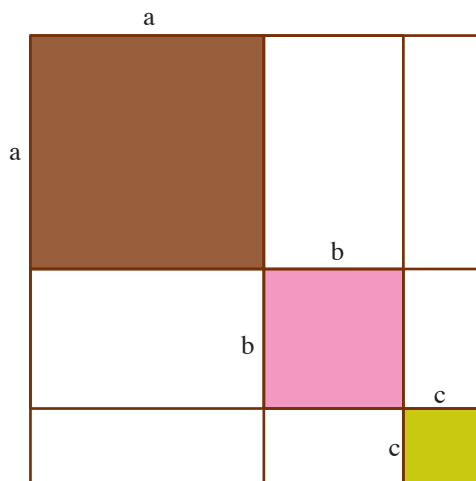
את הבעיה במשימה 2 כתב הבריטי צ'ארלס דודג'סון (Charles Dodgson, 1832-1898) שהיה פילוסוף, ממציא, צלם, לוגיקן, מתמטיקאי וסופר, והוא מוכר עד היום בשם העט לואיס קרול (Lewis Carroll).

יצירתו הידועה ביותר כסופר היא "הרפתקאות עליסה בארץ הפלאות". קרול למד מתמטיקה ולימודים קלסיים ובשנת 1855 הפך למרצה למתמטיקה באוקספורד. התנאי להיות מרצה מן המניין באותה תקופה, היה להפוך לכומר ולא להינשא, וקרול הסכים לתנאים אלה והתמנה לכומר בגיל 23.

3. בשרטוט הבא אורכי הצלעות של הריבועים הצבועים הם a , b , c בהתאמה.

א. השתמשו בשיקולים שקשורים לשטחים וכתבו נוסחה ל- $(a + b + c)^2$.

ב. בדקו את הנוסחה שמצאתם על-ידי כפל ופתיחת סוגריים.



4. אם $a + b + c = 4$

$ab + bc + ca = 6$

$abc = 3$

א. מה הערך של הביטוי האלגברי $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

ב. מה הערך של הביטוי האלגברי $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$?

ג. מה הערך של הביטוי האלגברי $a^2 + b^2 + c^2$?

רמז: היעזרו בנוסחה לביטוי האלגברי $(a + b + c)^2$.

5. בחרו מספר אי-זוגי, העלו אותו בריבוע, הפחיתו ממנו 1 וחשבו.

בחרו מספרים נוספים כאלה ופעלו עליהם אותה פעולה.

האם אתם מבחינים בתופעה מיוחדת?

אם כן, הוכיחו שהיא קיימת תמיד.

6. א. הוכיחו את הזהות $1 - x^4 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3)$.
 ב. שערו איך אפשר לפרק לגורמים את $1 - x^5$ והוכיחו שהשערתכם נכונה.



7. א. העתיקו לגיליון אלקטרוני (למשל Excel) את הנוסחאות הבאות:

	A	B	C	D	E	F
1	1	= A1 * A1	= B1 * A1	= C1 * A1	= 1 + A1 + B1 + C1	= E1 * (A1 - 1) + 1
2						

- ב. מלאו בעמודה A מספרים טבעיים.
 ג. גררו את הנוסחאות.
 ד. האם אתם מבחינים בחוקיות? אם כן, נסחו אותה והוכיחו אותה.



8. א. הראו כי כל אחד מן הסכומים הבאים הוא ריבוע של מספר שלם.

$$2^2 + 3^2 + 6^2$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2$$

$$4^2 + 5^2 + 20^2$$

- ב. מצאו את הקשר בין שלושת המספרים שאת ריבועיהם מחברים, ואת הקשר בינם לבין המספר השלם שריבועו הוא התוצאה.

ג. הכלילו: $n^2 + (\text{_____})^2 + (\text{_____})^2 = (\text{_____})^2$.

- ד. הוכיחו את נכונות השוויון.



שומרים על כושר

1. העתיקו למחברת והשלימו את לוח החיבור. פתחו סוגריים.

+	$(a+b)^2$	$(a-b)^2$	$(a+b)(a-b)$
$(a+b)^2$			
$(a-b)^2$			
$(a+b)(a-b)$			

2. העתיקו למחברת והשלימו את לוח הכפל. פתחו סוגריים.

•	$a+b$	$-a-b$	$a-b$	$b-a$
$a+b$				
$-a-b$				
$a-b$				
$b-a$				

חידה



בחרתי מספר דו-ספרתי.

- העליתי אותו בריבוע.
- החלפתי את סדר הספרות של המספר שבחרתי, והעליתי גם את המספר החדש בריבוע.
- להפתעתי, הפרש הריבועים של המספר והיפוכו היה גם כן ריבוע של מספר שלם. מהו המספר שבחרתי?