6.4 מרחקים לצלעות מצולע

מטרות

- לקרב את התלמידים לעריכת חקירה
- לחזק את הצורך של התלמידים בהוכחה של ממצאי החקירה.
- לחזק את הבנת תפקיד הדוגמה הנגדית
- לעודד שימוש בכלים שונים לחקירה (גאומטריים, אלגבריים, גרפיים ומספריים)

אמצעי עזר

היישומון **מרחקים לצלעות משולש שווה-צלעות** באתר מתמטיקה משולבת, מדור מצויינות רחובות, או לפי הקישור: http://ggbtu.be/mi9GlVoFO

היישומון **מרחקים לצלעות משולש שווה-צלעות** באתר מתמטיקה משולבת, מדור מצויינות רחובות, או לפי הקישור: http://ggbtu.be/mCBV4Ba3V

פתיחה

פותחים בעזרת הצגת המשולשים שבפתיחה. אוספים השערות לגבי סכום המרחקים מבלי להגיב.

מפנים לפעילות חקירה בעזרת המחשב (מדידה - משימה 1) או בעזרת שיקולים וחישובים (משימה 2).

בשני המקרים מבקשים להוכיח את המסקנה (במחשב - משימה 1 ובפעילות החילופית - משימה 3).

פתרונות והערות

החלק הראשון של היחידה, משימות 1 – 4, מתייחס למרחק של נקודה מהצלעות, תחילה במשולש שווה-צלעות ואחר כך במשולש כלשהו. מהלך זה מאפשר הן חקירה כולל הוכחה, והן הפרכה על-ידי דוגמה נגדית (משימה 4).

בחלק השני, חוקרים מרחקים של נקודה על הגובה ליתר במשולש ישר-זווית שווה-שוקיים, מצלעות המשולש. בחקירה זו מעורב שימוש בגרף (משימות 5 – 8). רצוי לבצע את בדיקת הגרף בגרסת המחשב.

משימה 9 פותחת דלת לחקירה נוספת, כאשר בה עוברים מחקירה של משולש למרובע. חוקרים מרחקים מצלעות המלבן. מקרה זה פשוט, אך הוא מפתיע. אם במשולש נמצא סכום מרחקים קבוע רק למשולש משוכלל (שווה צלעות), בכל מלבן גם אם אינו ריבוע הסכום קבוע. חקירות נוספות ברוח זו משולבות גם ב"שומרים על כושר".

נקודה בתוך משולש שווה-צלעות

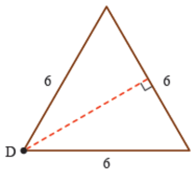
1. התלמידים בודקים את השערתם לגבי השתנות סכום המרחקים של נקודה בתוך או על צלעות משולש שווה-צלעות. ההשתנות של שלושת המרחקים של נקודה, בהתאם למיקומה, מחזקת את ההשערה שגם סכום המרחקים משתנה.

רישום הסכום הסופי של המרחקים על-ידי המחשב, מעלה מסקנה מפתיעה, כי הסכום קבוע ואינו תלוי במיקום הנקודה. ההפתעה יוצרת צורך בהסבר המסקנה, כלומר הוכחה.

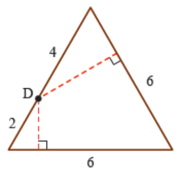
ראו הוכחה בתשובה למשימה 3.

2. בשלושת המשולשים החופפים המופיעים **בספר לתלמיד**, אפשר לחשב את סכום המרחקים בס"מ. מהחישוב נמצא שהוא **קבוע** ושווה **לגובה** המשולש. בכל המקרים ניעזר במשולשים ישרי-הזווית שיוצרים האנכים. מתקבלים משולשים ישרי-זווית בהם אחת הזוויות בת 60° לכן הצלע מול 30° שווה לחצי היתר.

בכל משולש כזה הניצב מול 60° הוא $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}$ (כך גם הגובה במשולש שווה צלעות).



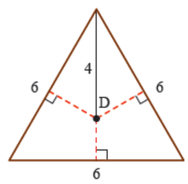
במשולש משמאל הנקודה בקדקוד. לכן סכום המרחקים משתי צלעות הוא 0. המרחק מהצלע השלישית בס"מ שווה לגובה: $\sqrt{6^2-3^2}=5.2$ או $\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$



במשולש האמצעי הנקודה על צלע. המרחק מצלע זו הוא 0 ס"מ. שאר המרחקים:

$\sqrt{4^2-2^2}=3.46$ או $\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{2^2-1^2}=1.73$ או $\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

סכום שלושת המרחקים בס"מ: $0+3.46+1.73=5.19$ או $2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

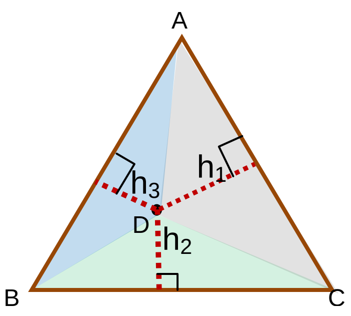


במשולש הימני הנקודה נמצאת על הגובה. לכן שניים מהמרחקים הם: 2 ס"מ

המרחק השלישי הוא הגובה פחות 4 ס"מ: $\sqrt{6^2-3^2}-4=1.2$ או $3\sqrt{3}-4$

סכום המרחקים בס"מ: $2\cdot2+1.2=5.2$ או $2\cdot2+3\sqrt{3}-4=3\sqrt{3}$

3. אורך הגובה במשולש Δ ABC הוא H, ואורך הצלע a.



שטח המשולש $\frac{H\cdot a}{2}$

שטחי המשולשים הקטנים הם: $\frac{h_1\cdot a}{2}$, $\frac{h_2\cdot a}{2}$, $\frac{h_3\cdot a}{2}$

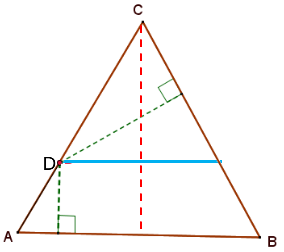
שטח המשולש הגדול שווה לסכום שטחי המשולשים הקטנים:

$$\frac{H\cdot a}{2}=\frac{h_1\cdot a+h_2\cdot a+h_3\cdot a}{2}$$

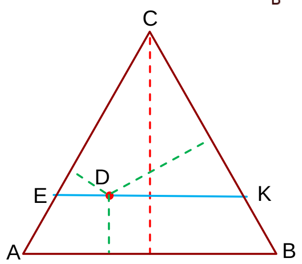
לכן: $H=h_1+h_2+h_3$

הערה: מעקב אחרי שלושת האפשרויות: הנקודה D **קדקוד** של המשולש, **על צלע** המשולש והנקודה D **בתוך** המשולש, מאפשרת להוכיח בשלבים את המשפט מבלי להשתמש בחישוב שטחים.

- **הנקודה D היא קדקוד** המשולש. המרחק של D משתיים מהצלעות הוא 0 ומהצלע השלישית שווה לגובה.



- **הנקודה D על צלע** נעביר מקביל דרך D לאחת הצלעות. נעביר גובה במשולש לאותה הצלע. נקבל משולש שווה צלעות וטרפז בהם המרחקים (ירוק) שווים לחלקי הגובה של המשולש המקורי (אדום).



- **בתוך המשולש** נעביר דרך D מקביל EK לצלע AB. גובה הטרפז שווה לחלקי הגובה של המשולש בטרפז. חלק הגובה במשולש העליון, שווה לסכום המרחקים של D מהצלעות (כי D על הצלע EK).

נקודה בתוך משולש כלשהו

.4 במשולש שונה צלעות סכום המרחקים של הנקודה משלושת הצלעות אינו קבוע.
אפשר להוכיח זאת בדרכים שונות. כמו:

- מספיק למדוד, במשולש אחד, את אורכי המרחקים של שתי נקודות מכל הצלעות. אם סכומי המרחקים משתי הנקודות אינם שווים זה לזה (כמו בספר) זו דוגמה נגדית.

- אם במשולש שונה-צלעות נבחר את D בקדקוד של המשולש, סכום המרחקים יהיה באורך הגובה מקדקוד זה. אם נבחר קדקוד אחר, סכום המרחקים יהיה כאורך הגובה מהקדקוד האחר. כיון שהגבהים במשולש שונה צלעות שונים, סכומי המרחקים בשתי הנקודות שונים, ולכן הסכום אינו קבוע (ראו בספר שני המשולשים הקיצוניים).

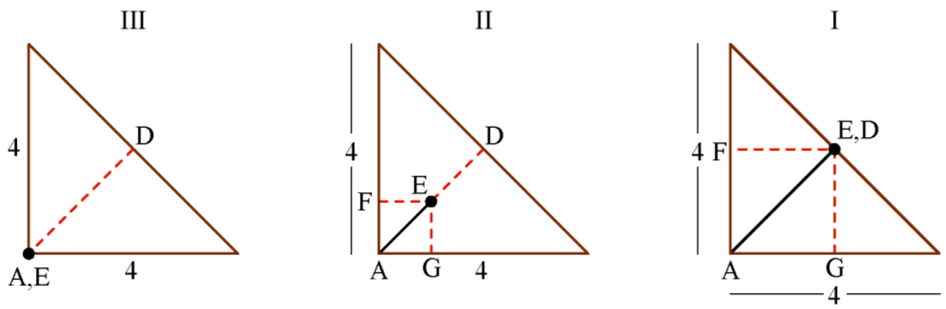
נקודה על הגובה ליתר במשולש ישר זווית ושווה שוקיים

.5 א. סכום המרחקים אינו יכול להיות 0.

אם נקודה D אינה מתלכדת עם E $DE > 0$ ולכן $ED+FE+GE > 0$

אם נקודה D מתלכדת עם E סכום המרחקים הוא: $2+2+0 > 0$

ב.



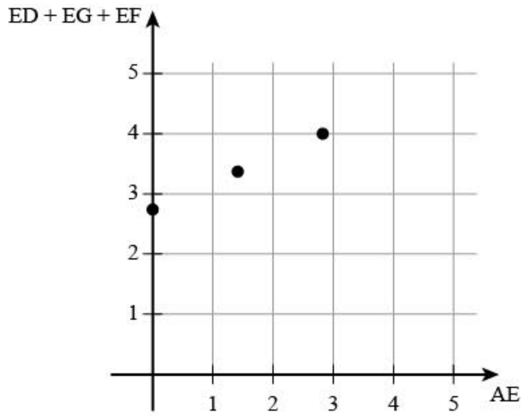
הערה: בשרטוט II אף על פי שנקודה E היא באמצע הקטע, היא נראית קרובה יותר לנקודה A.

I אם D = E, AE = 2.8, DE = 0, EF = EG = 2 הסכום: 4 = 2+2+0

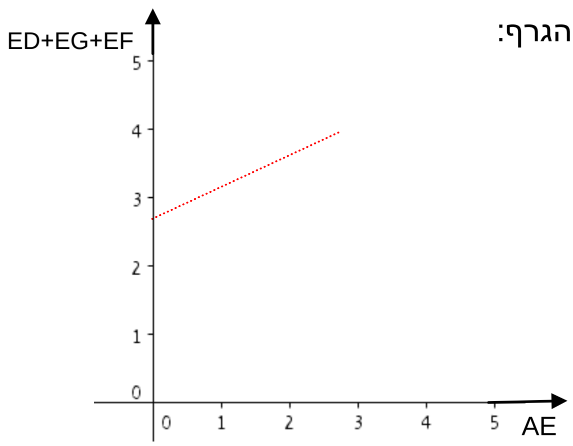
II אם ED = AE, 1.4 = DE = 1.4,AE, EF = EG = 1

III אם A = E, AE = 0, DE = 2.8, EF = EG = 0 הסכום: 2.8 = 0+0+2.8

6. סימון הנקודות בגרף



7. גרירת הנקודה E לאורך הגובה ליתר יוצרת את הגרף:

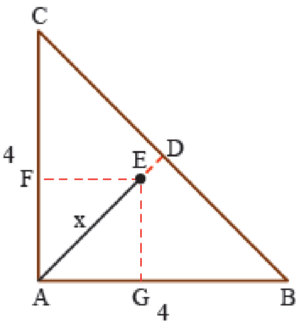


8. א. D = 2.8 – x   EG = EF = x : 1.4 (לפי משפט פיתגורס, $\sqrt{2} \approx 1.4$)

סכום שניהם: 2·x : 1.4 = 1.4x

הפונקציה היא: y = 2.8 – x + 1.4x   כלומר: y = 0.4x + 2.8

ב. הפונקציה של סכום המרחקים היא ליניארית והגרף שלה הוא קו ישר.

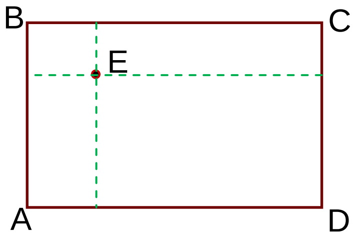


9. נוריד מ- E אנכים לכל אחת מהצלעות,

סכום המרחקים של E מהצלעות BC ו- AD שווה לאורך הצלע AB.

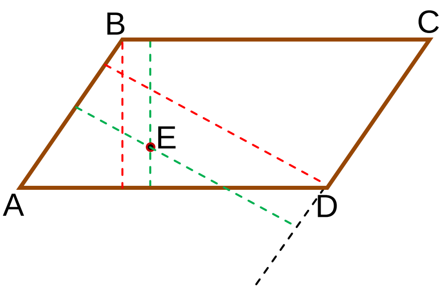
סכום המרחקים של E מהצלעות AB ו- CD שווה לאורך הצלע AD.

כלומר, הסכום **קבוע** ושווה לחצי היקף המלבן (אורכי שתי צלעות סמוכות).



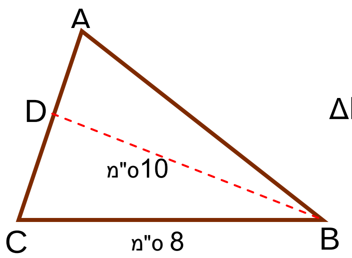
שומרים על כושר

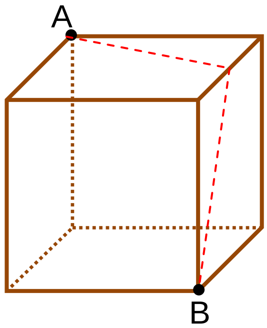
1. סכום המרחקים של E מהצלעות AB ו- CD, שווה לאורך הגובה מ- D לצלע AB (מרחק בין קווים מקבילים).
   סכום המרחקים של E מהצלעות BC ו- AD, שווה לאורך הגובה מ- B לצלע AD (מרחק בין קווים מקבילים)
   לכן סכום המרחקים של E מצלעות המקבילית, **קבוע** ושווה לסכום אורכי הגבהים במקבילית.
   הערות: האנך מ- E לצלעות יכול לעבור מחוץ למקבילית.
   הגבהים מסומנים באדום, המרחקים בירוק.



2. מעוין הוא מקרה פרטי של מקבילית. לכן גם הסכום של מרחקי נקודה E הנמצאת בתוך המעוין קבוע, והוא שווה לפעמיים אורך הגובה של המעוין.

3. מידות האורך הנתונות אינן אפשריות, כי מתקבל משולש ישר זווית ΔBCD בו הניצב BD (הגובה ל- AC) שאורכו 10 ס"מ גדול מהיתר BC (צלע המשולש הנתון) שאורכו 8 ס"מ.



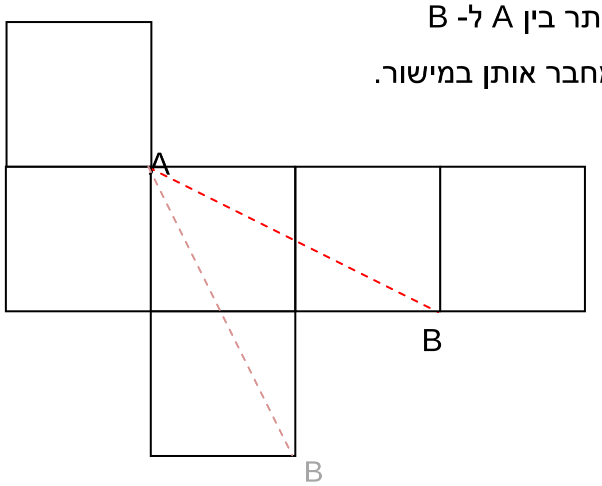


המסלול הקצר ביותר של הנמלה מ- A ל- B, מחבר בקו ישר את קדקוד A של הקובייה ל**אמצע צלע ש- A לא קצה שלה**, וממשיך משם לקדקוד B.

כדי להצדיק דרך זו נשרטט את פריסת הקובייה

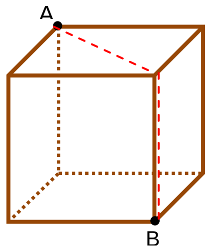
הקו הקצר ביותר בין A ל- B

הוא הישר המחבר אותן במישור.

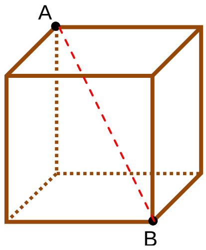


שגיאות נפוצות:

א. הליכה לקדקוד הנגדי, ומשם לאורך הצלע

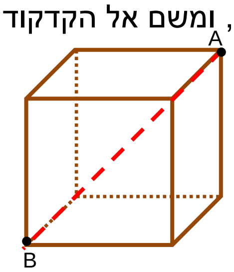


ב. חיבור הקדקודים בקו ישר. כאילו השרטוט מישורי



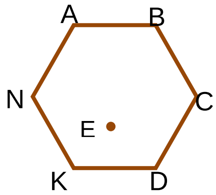
בשרטוט של שגיאה ב יתכן שהתלמיד שגה (כי התכוון לקו ישר אחד) אך מבחינה חזותית זה עלול להתפרש כתשובה נכונה (הליכה עד אמצע הצלע הנגדית של הפאה העליונה, ומשם אל הקדקוד B).

אם בוחרים קדקודים נגדיים אחרים (ראו שרטוט משמאל) אפשר להבחין בשגיאה.



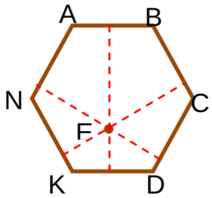
למסיימים

1. E נקודה כלשהי בתוך **משושה משוכלל,** או על צלעותיו.
האם סכום המרחקים של הנקודה E מהצלעות משתנה, כשמשנים את מקומה של E בתוך המשושה? נמקו.



תשובה אפשרית

הנקודה E נמצאת במשושה משוכלל. במשושה יש שלושה זוגות של צלעות מקבילות.
סכום המרחקים של E משתי צלעות מקבילות, שווה למרחק בין הצלעות.
לכן סכום המרחקים מכל צלעות המשושה המשוכלל **קבוע**, והוא פי שלושה מהמרחק בין זוג צלעות **מקבילות** במשושה המשוכלל.



לסיכום

- נדון במליאה בממצאים שהפתיעו. נשאל את התלמידים מה הרגישו כאשר ההשערה לא התאמתה.
- נשאל האם לדעתם בכל מרובע סכום המרחקים של נקודה מצלעות המרובע הוא קבוע. אם כן נבקש נימוק, אם לא דוגמה נגדית.