8.2 על קווי גובה

מטרות

- עיסוק בסיטואציית בעיית תכנון מן המציאות
- שימוש והעמקה באי-שוויונות בשני משתנים ובגרפים שלהם
- טיפול באילוצים ומציאת התחום המשותף לכל האילוצים
- חשיפה לפונקציה בשני משתנים ומציאת ערך קיצון עבורה בהתחשב בתחום האילוצים.

אמצעי עזר

תוכנה גרפית (למשל, *Geogebra*),

דף לצילום

פתיחה

קוראים את הפתיח עם התלמידים והם מבצעים את המשימה שבפתיח. את הפעילות ניתן לבצע עם מחשב או בלעדיו על-ידי שרטוט ידני. כדי לחסוך בזמן בשיעור ללא מחשב אפשר לתת לתלמידים דף מצולם מן הדף שבסוף הפעילות. במהלך כל השיעור התלמידים יעבדו על דף זה.

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת בסיטואציית בעיה של תכנון שהמודל המתמטי שלה הוא פונקציה לינארית בשני משתנים. בבעיה זו, מחפשים לפונקציה ערך מקסימלי וערך מינימלי, בהתחשב באילוצים מסוימים. התלמידים משרטטים את *התחום האפשרי* במחשב או באופן ידני, ונעזרים בו כדי לבדוק אפשרויות שונות. בפעילות מוגדרים המושגים פונקציית מטרה וקו גובה, זאת לאחר שהתלמידים מבינים את משמעות המושגים האלה.

בפעילות יש מספר שלבים.

שלב ראשון (משימות 1-3) – שרטוט התחום האפשרי והבנת משמעותו לגבי הסיטואציה.

שלב שני (משימות 4-6) – התיחסות לפונקציית המטרה, וההבנה שנתינת ערך לפונקציה יוצרת משוואה לינארית. הייצוג הגרפי של כל המשוואות המתקבלות בדרך זו הם ישרים מקבילים.

שלב שלישי – (משימות 7-10) התייחסות לשלוש פונקציות מטרה שונות ומציאת הערך המקסימלי של כל פונקציה. בשתי הפונקציות הראשונות מתקבל המקסימום בנקודת קודקוד של התחום האפשרי (פתרון יחיד), ובפונקציה השלישית הוא מתקבל על צלע של התחום האפשרי (מספר פתרונות)

.

2-1. מערכת האילוצים

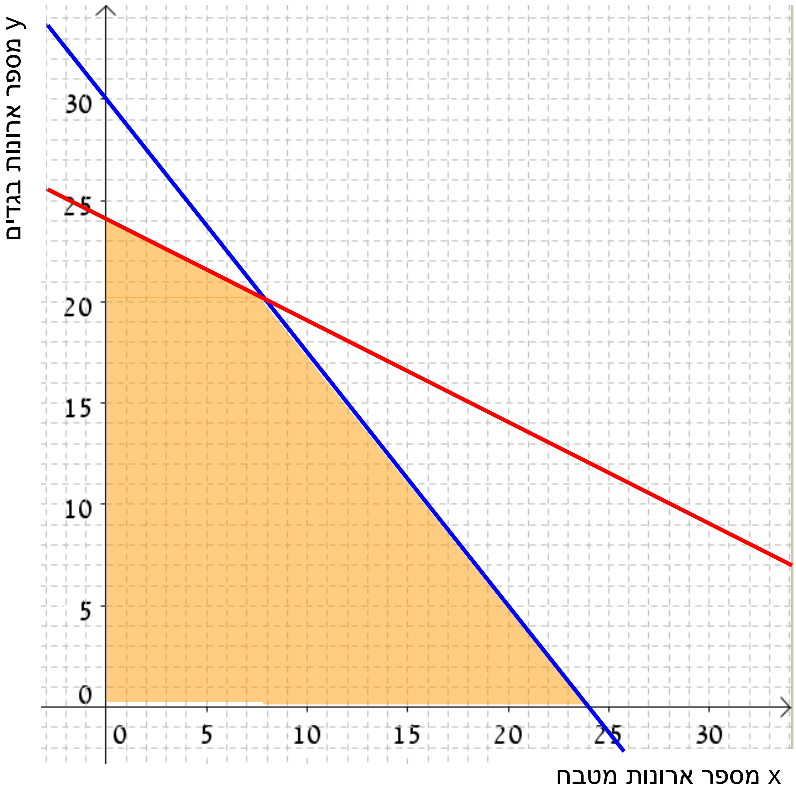
$x \geq 0$

$y \geq 0$

$5x + 4y \leq 120$

$10x + 20y \leq 480$

התחום האפשרי:



הישר הכחול מתאים לאילוץ של **כמות העץ**, **והישר האדום** מתאים לאילוץ של **שעות העבודה**.

3. א. המפעל **אינו יכול** לייצר 15 ארונות מטבח ו- 15 ארונות בגדים, כי לא תספיק לו כמות העץ. ניתן לראות בשרטוט כי הנקודה (15 , 15) נמצאת מימין לקו הכחול, ואפשר לאשר בחישוב: $5 \cdot 15 + 4 \cdot 15 > 120$.

ב. המפעל **יכול** לייצר 15 ארונות מטבח ו- 10 ארונות בגדים. ניתן לראות בשרטוט כי הנקודה (10 , 15) נמצאת בתוך התחום האפשרי. אפשר גם לאשר בחישוב: $5 \cdot 15 + 4 \cdot 10 \leq 120$ $10 \cdot 15 + 20 \cdot 10 \leq 480$.

ג. המפעל **אינו יכול** לייצר 10 ארונות מטבח ו- 20 ארונות בגדים, כי שני האילוצים לגבי כמות העץ ושעות העבודה אינם מתקיימים. ניתן לראות בשרטוט כי הנקודה (20 , 10) נמצאת מימין לקו הכחול, ומימין לקו האדום. אפשר לאשר בחישוב: $5 \cdot 10 + 4 \cdot 20 > 120$ וגם $10 \cdot 10 + 20 \cdot 20 > 480$.

ד. המפעל **יכול** לייצר 12 ארונות מטבח ו- 15 ארונות בגדים. ניתן לראות בשרטוט כי הנקודה (15 , 12) נמצאת בתוך התחום האפשרי, על הקו הכחול ומשמאל לקו האדום.
אפשר גם לאשר בחישוב: $5 \cdot 12 + 4 \cdot 15 \leq 120$ $10 \cdot 12 + 20 \cdot 15 \leq 480$.

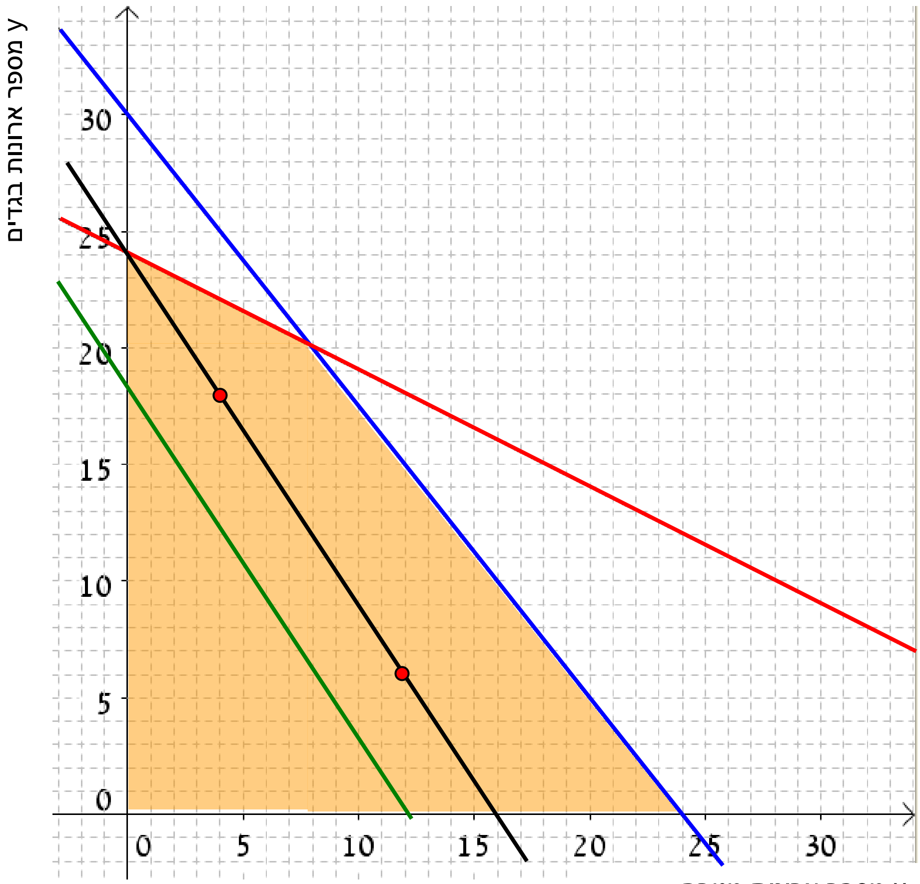
ה. המפעל **אינו יכול** ליצר 5 ארונות מטבח ו- 22 ארונות בגדים כי לא יספיקו לו שעות העבודה. ניתן לראות בשרטוט כי הנקודה (22 , 5) נמצאת מימין לקו האדום, ואפשר לאשר בחישוב: . $10 \cdot 5 + 20 \cdot 22 > 480$

4. א. 900x + 600y = 14,400.

ב. אם $x = 5$ $y = \frac{14400 - 900 \cdot 5}{600} = 16.5$ על 5 ארונות מטבח ו- 17 ארונות בגדים הרווח הוא 14,700 ש"ח.

אם $x = 10$ $y = \frac{14400 - 900 \cdot 10}{600} = 9$ על 10 ארונות מטבח ו- 9 ארונות בגדים הרווח הוא 14,400 ש"ח.

ג.



הישר השחור בשרטוט עובר דרך כל הנקודות המייצגות רווח של 14,400 כי הוא גרף המשוואה $900x + 600y = 14{,}400$ המייצגת רווח זה:

הנקודות האדומות בשרטוט מייצגות שתי דוגמאות שהרווח בהן הוא 14,400ש"ח:

4 ארונות מטבח ו- 18 ארונות בגדים

12 ארונות מטבח ו- 6 ארונות בגדים

5. א. למשל, $900x + 600y = 10{,}000$. הישר המתאים הוא **הישר הירוק** בשרטוט מהמשימה הקודמת.

ב. אפשר לתת שני נימוקים:

- אם נעביר את הישרים לצורה $y = ax + b$, נגלה שיש להם אותו שיפוע $-1.5 = -\frac{900}{600}$.
- מכיוון שהמקדמים של x ו- y שווים אבל האיבר החופשי שונה, הצבה של כל זוג מספרים שמקיים את המשוואה האחת לא יקיים את המשוואה האחרת. כלומר אין לישרים נקודה משותפת, ולכן הם מקבילים.

6. א. כל הישרים הם בעלי אותו שיפוע וכולם מקבילים. הנימוקים במשימה 5.

ב. הישר p מייצג את הרווח הגדול ביותר, כי ככל שהישר יותר ימני (או יותר גבוה) שיעורי הנקודות שעליו יותר גבוהים והצבתם בביטוי האלגברי $900x + 600y$ תיתן תוצאה גדולה יותר. תוצאה זו היא הרווח.

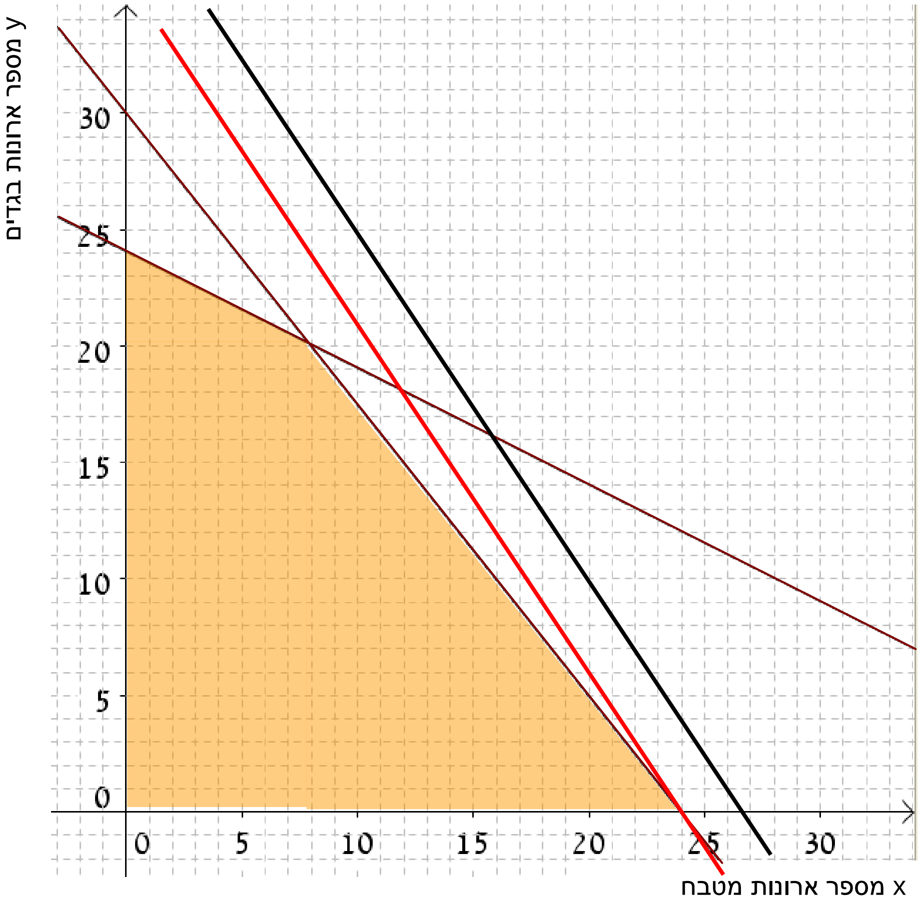
ג. מספיקה הצבה של נקודה אחת על הישר כדי לדעת את הרווח כי הצבת כל נקודה שעל הישר בביטוי הנ"ל נותנת אותה תוצאה, והתוצאה הזאת היא הרווח.

הישר k מייצג רווח של 12,000 ש"ח $(= 900 \cdot 0 + 600 \cdot 20)$.

הישר m מייצג רווח של 14,400 ש"ח $(= 900 \cdot 16 + 600 \cdot 0)$

הישר p מייצג רווח של 17,400 ש"ח $(= 900 \cdot 16 + 600 \cdot 5)$

ד.



הישר השחור הוא גרף המשוואה 900x + 600y = 25,000 והוא אינו מייצג רווח של המפעל כי אין לו נקודות משותפות עם התחום האפשרי.

7. א. הישר המייצג את הרווח המקסימלי הוא **הישר האדום** שבשרטוט במשימה הקודמת.

ב. כדי לקבל את הרווח המקסימלי – 21,600 ש"ח, על המפעל לייצר 24 ארונות מטבח ולא לייצר ארונות בגדים.

ג. האפשרות הרשומה בסעיף ב היא האפשרות היחידה לקבל את הרווח המקסימלי כי בתחום האפשרי יש רק נקודה אחת של הישר המייצג רווח זה.

.8 א. פונקציית הרווח החדשה היא

$f(x , y) = 900x + 800y$

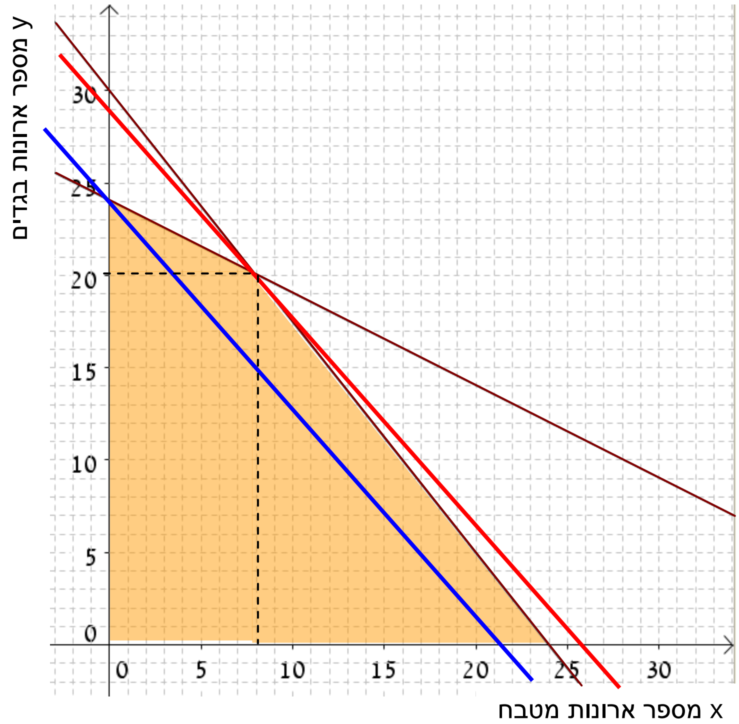
ב. הישר הכחול מייצג רווח של 20,000 ש"ח.

ג. הישר האדום מייצג את הרווח המקסימלי. כדי לקבל את הרווח הזה על המפעל לייצר 8 ארונות מטבח ו- 20 ארונות בגדים.

ד. הרווח המקסימלי הוא:

23,200ש"ח $(= 900 \cdot 8 + 800 \cdot 20)$

ה. האפשרות הרשומה בסעיף ג היא האפשרות היחידה לקבל את הרווח המקסימלי, כי יש רק נקודה אחת של הישר המייצג רווח זה בתחום האפשרי.



.9 א. רושמים את פונקציית הרווח החדשה:

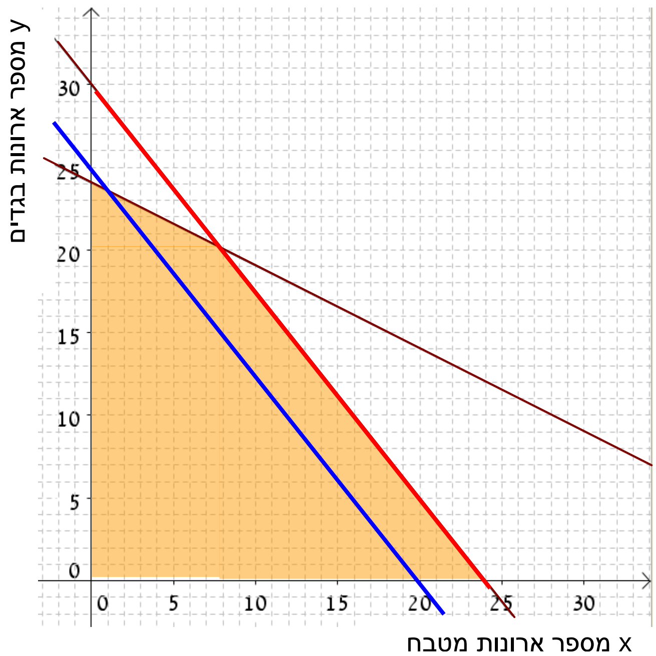
$f(x , y) = 1{,}000x + 800y$

משרטטים גרף עבור רווח מסוים למשל, 20,000 ש"ח: מתקבל הישר הכחול.

מזיזים את הישר בכיוון של הגדלת הרווח עד שהוא המקום האחרון שחלקו עדיין בתחום האפשרי: הישר האדום.

מגלים שהוא מתלכד עם הגבול של התחום האפשרי.

כל הנקודות בעלות שיעורים שלמים שנמצאות על הקטע שבתחום האפשרי מייצגות רווח מקסימלי. למשל, הנקודה (12 , 15) שמייצגת 12 ארונות מטבח ו- 15 ארונות בגדים.



ב. הרווח המקסימלי הוא:

24,000 ש"ח $(= 1{,}000 \cdot 12 + 800 \cdot 15)$.

ג. יש 5 אפשרויות לקבל את הרווח המקסימלי.

אפשרויות אלו מיוצגות על-ידי הנקודות (8 , 20) , (12 , 15) , (16 , 10) , (20 , 5) , (24 , 0).

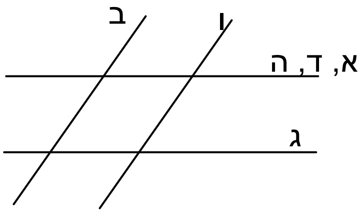
10. א. יש לבחור פונקציה כזו שהזזת גרף הרווח עד לקצה התחום האפשרי תביא אותו למפגש עם הנקודה (0 , 25).
השיפוע צריך להיות שלילי וגדול מ- -0.5, למשל $f(x , y) = 400x + 1{,}000y$. הרווח המקסימלי יהיה בנקודה (0 , 25) כלומר 25,000 ש"ח $(400 \cdot 0 + 1{,}000 \cdot 25 =)$

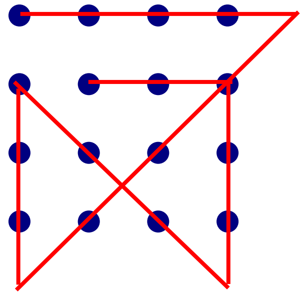
ב. יש אינסוף פונקציות כאלה.

11. אם נחשב את הרווח בכל נקודה המייצגת את מספרי הארונות משני הסוגים, ונחבר בקו את כל הנקודות המייצגות זוגות מספרים המתאימים לאותו רווח, נקבל אוסף של ישרים שהם "המפה הטופוגרפית" של הרווח. אם נעלה אנכים למישור עד לגובה הרווח, ונחבר את ראשי האנכים, נקבל משטח שהוא בעצם מישור משופע. ככל שהוא גבוה יותר הרווח גדול יותר.

1. א. מתלכדים
ב. מקבילים
ג. נחתכים
ד. מקבילים
ה. נחתכים
ו. מתלכדים

2. הישרים א ד ו- ה מתלכדים
הישרים א ו- ג מקבילים
הישרים ב ו- ו מקבילים
הישרים א ו- ב נחתכים
הישרים א ו- ו נחתכים
לכן יש ארבע נקודות מפגש.





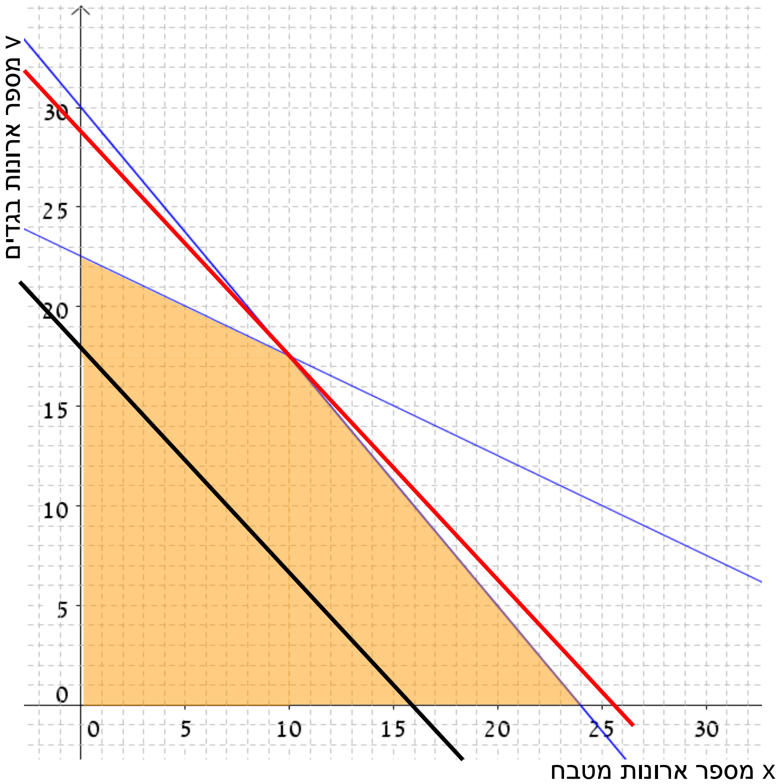
למסיימים

1. בחודש מסוים עמדו לרשות המפעל רק 450 (במקום 480) שעות עבודה. זה היה בחודש שבו הרווח לארון מטבח היה 900 ש"ח והרווח לארון בגדים היה 800 ש"ח.
כמה ארונות מטבח וכמה ארונות בגדים על המפעל לייצר כדי לקבל את הרווח המקסימלי?

תשובה: כדאי לציין כי התנאים החדשים משנים גם את התחום האפשרי וגם את פונקציית המטרה.

פונקציית המטרה היא $f(x , y) = 900x + 800y$.

הקו השחור בשרטוט הוא גרף המשוואה $900x + 800y = 14{,}400$. זהו ישר המייצג רווח של 14,400 ש"ח.



הישר האדום הוא הזזה של הקו השחור עד למפגש הגבולות של התחום האפשרי. אבל לנקודת מפגש זו אין שיעורים שלמים לכן אינה נמצאת בתחום האפשרי. צריך לבדוק מי מבין הנקודות הקרובות לנקודת המפגש ומקיימת את כל האילוצים, נותנת את הרווח המקסימלי.

הנקודות הכי קרובות המקיימות את כל האילוצים הן: (17 , 10) , (16 , 11) , (15 , 12).

מביניהן הנקודה (15 , 12) נותנת את הרווח המקסימלי – 22,800 ש"ח $(900\cdot 12+800\cdot 15=)$

לסיכום

- מתייחסים לרעיון של הזזת הישר כדי למצוא את הרווח המקסימלי.
- מתייחסים לאפשרויות השונות לקבלת הרווח המקסימלי – נקודת מפגש בין גבולות, וקטע גבול. ומאתגרים את התלמידים בשאלה: מה קורה אם ערכי נקודת המפגש אינם שלמים (ראו שאלה למסיימים).