8.3 סיור לימודי

מטרות

- עיסוק בסיטואציית בעיה מן המציאות
- חיזוק הקשר בין המציאות לבין כלים מתמטיים שביכולתם לסייע לקבלת החלטות כלכליות
- שימוש והעמקה בביטויים אלגבריים ובגרפים ובקשר ביניהם
- העמקת הטיפול בתחום הצבה המתאים לתוכן הבעיה

אמצעי עזר

תוכנה גרפית (למשל, *Geogebra*),

פתיחה

קוראים את הפתיח עם התלמידים ומבקשים דוגמה להזמנת כלי רכב שמקיימת את כל האילוצים, ואת המשתמע ממנה לגבי מספר התלמידים שיוכלו לנסוע, ומחיר ההזמנה.
אפשר לבקש גם דוגמאות להזמנות של כלי רכב שאינן מקיימות אילוץ מסוים.

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת בסיטואציית בעיה של תכנון שהמודל המתמטי שלה הוא פונקציה לינארית בשני משתנים. בבעיה זו, מחפשים לפונקציה ערך מקסימלי וערך מינימלי, בהתחשב באילוצים מסוימים. התלמידים משרטטים את *התחום האפשרי* במחשב או באופן ידני, ונעזרים בו כדי לבדוק אפשרויות שונות. בפעילות זו, לעומת הפעילויות הקודמות הערכים הקיצוניים של פונקציית המטרה אינם נמצאים דווקא בקצוות של התחום האפשרי, אלא בתוכו.
בפעילות יש התייחסות נפרדת לתחום האפשרי ולפונקציית המטרה.

1. א-ב. מסמנים ב- x את מספר האוטובוסים שהוזמנו וב- y את מספר המיניבוסים שהוזמנו.

מערכת האילוצים:

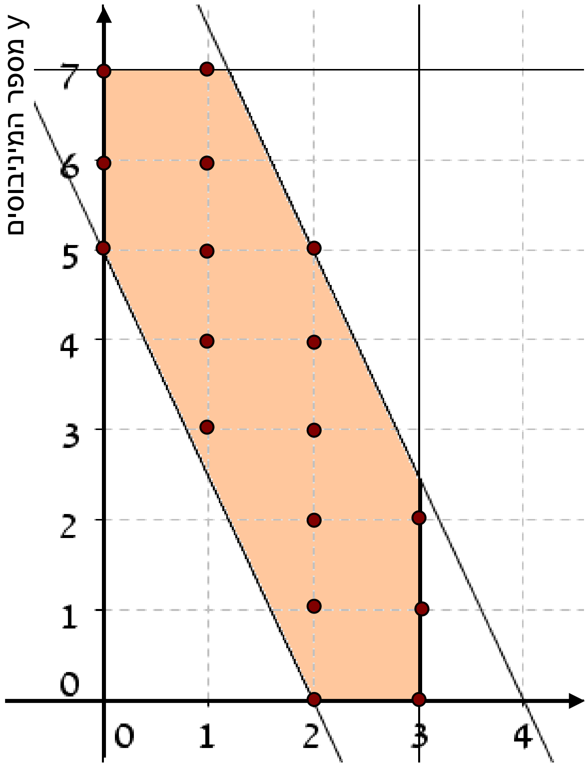
$0 \le x \le 3$

$0 \le y \le 7$

$100 \le 50x + 20y \le 200$

התחום האפשרי הוא 17 הנקודות ששיעוריהן שלמים בתחום הצבוע (כולל הקצוות)

התחום האפשרי:



ג. דוגמאות:

- 2 אוטובוסים ו- 3 מיניבוסים

מספר הנוסעים 160 $(= 50 \cdot 2 + 20 \cdot 3)$

עלות השכירה 1,400 ש"ח $(= 400 \cdot 2 + 200 \cdot 3)$

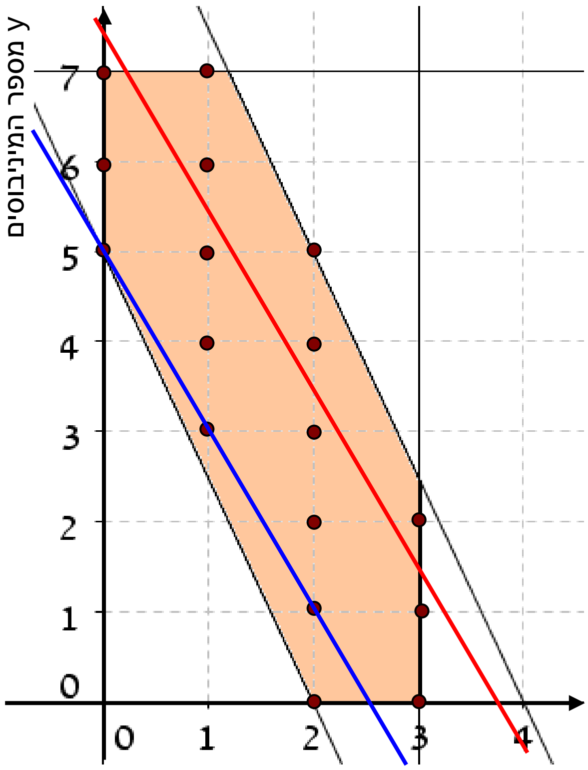
- 6 מיניבוסים

מספר הנוסעים 120 $(= 50 \cdot 0 + 20 \cdot 6)$

עלות השכירה 1,200 ש"ח $(= 400 \cdot 0 + 200 \cdot 6)$

2. א. פונקציית המטרה היא f(x , y) = 400x + 200y

זו אותה הפונקציה לשתי המטרות. עבור המטרה של חברת *טיולי הארץ* מחפשים לפונקציה מקסימום ועבור המטרה של בית-הספר מחפשים לה מינימום.



ב. דוגמאות:

- משוואה המייצגת עלות של 1,000 ש"ח,

400x + 200y = 1,000

הגרף המתאים לה הוא הישר הכחול.

שלוש הזמנות מתאימות לעלות זאת:

- 2 אוטובוסים ומיניבוס אחד או
- אוטובוס אחד ו- 3 מיניבוסים או
- 5 מיניבוסים.

- משוואה המייצגת עלות של 1,500 ש"ח.

400x + 200y = 1,500

הגרף המתאים לה הוא הישר האדום.

אין הזמנה המתאימה לעלות זאת כי ישר זה אינו עובר דרך נקודות שערכיהן מספרים שלמים.

ג. החברה תציע לשלוח 2 אוטובוסים ו- 5 מיניבוסים או אוטובוס אחד ו- 7 מיניבוסים. העלות בשני המקרים תהיה 1800 ש"ח.

ד. בית-הספר יזמין 2 אוטובוסים. העלות תהייה 800 ש"ח.

3. א. התחום האפשרי השתנה.

בנוסף לכל האילוצים האחרים קיים האילוץ

$50x+20y\geq 170$

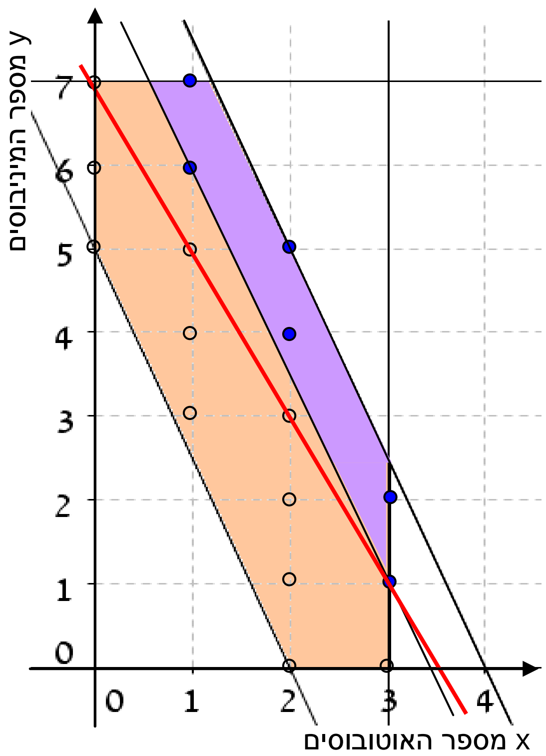
התחום האפשרי כולל עתה את כל הנקודות הכחולות.

העלויות השתנו.

ב. הישר האדום מייצג עלות מינימלית.

ההזמנה היא של 3 אוטובוסים ומיניבוס אחד,

והעלות היא 1400 ש"ח $(=400\cdot 3+200\cdot 1)$.



4. א. התחום האפשרי השתנה.

בנוסף לכל האילוצים האחרים קיים האילוץ

$50x+20y\geq 180$

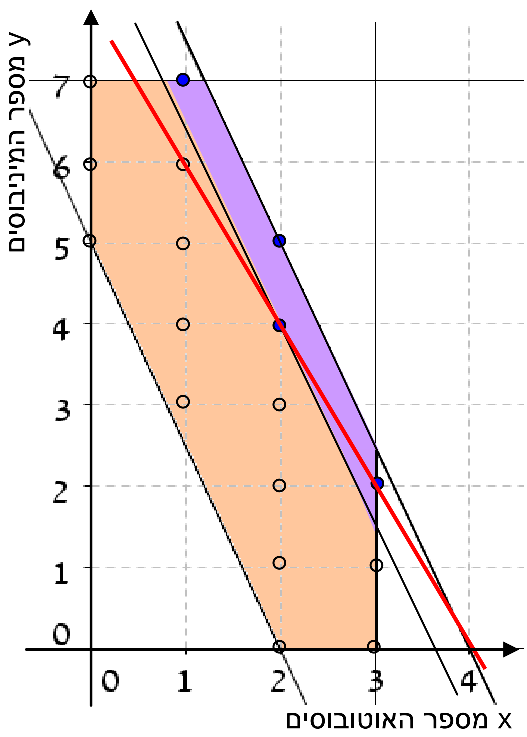
התחום האפשרי כולל עתה רק 4 נקודות.

ב. הישר האדום מייצג עלות מינימלית.

ההזמנה היא של 3 אוטובוסים ו- 2 מיניבוסים

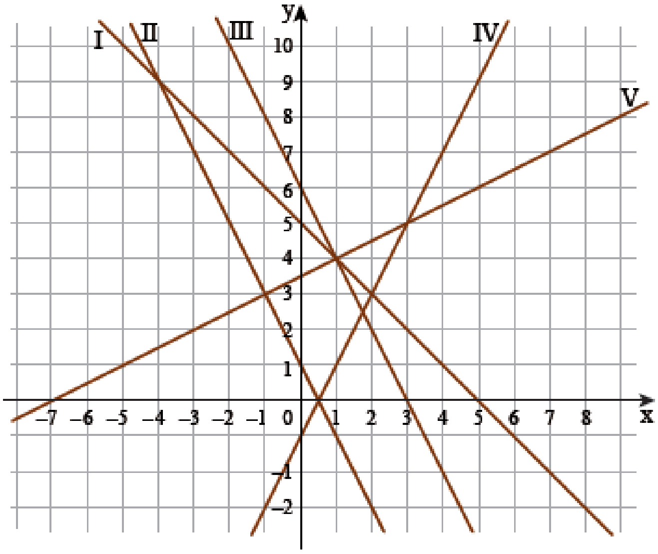
או 2 אוטובוסים ו- 4 מיניבוסים, והעלות היא

1600 ש"ח $(=400\cdot 3+200\cdot 2=400\cdot 2+200\cdot 4)$.



שומרים על כושר

1. הדרך היעילה ביותר להתאים משוואות לגרפים היא להעבירן לצורה $y = ax + b$, ולקבוע את ההתאמה על-פי a – השיפוע, או על-פי b – נקודת החיתוך עם ציר ה- y.



א. $2x - y = 1$ מתאים לישר IV

ב. $x - 2y = -7$ מתאים לישר V

ג. $2x + y = 6$ מתאים לישר III

ד. $x + y = 5$ מתאים לישר I

ה. $10x + 5y = 5$ מתאים לישר II

2. א. $(1 , 4)$ ג. $(-1 , 3)$ ה. אין פתרון

ב. $(0.5 , 0)$ ד. $(-4 , 9)$ ו $(2 , 3)$

חידה

משרטטים מערכת צירים שבה הצירים מסמנים את זמן הגעתה של כל מכשפה לתחנת הרכבת בהתאמה.

ראשית הצירים – 0 מסמן את השעה 12:00 ו- 1 מסמן את השעה 1:00. 10 דקות הן $\frac{1}{6}$ שעה.

מערכת האילוצים עבור מפגש המכשפות היא:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ x - y \le \frac{1}{6} \\ y - x \le \frac{1}{6} \end{cases}$$

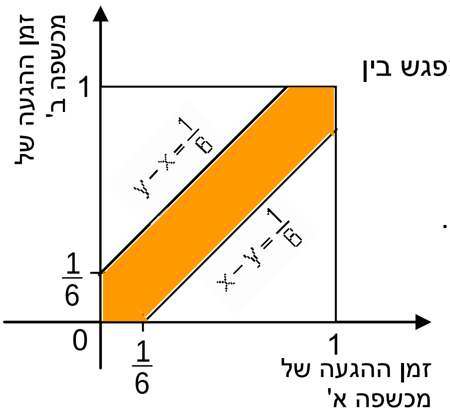
משרטטים במערכת הצירים את השטח המתאים לזמנים האפשריים של מפגש בין המכשפות.

ההסתברות למפגש הוא היחס בין השטח הצבוע לשטח הכולל.

השטח הצבוע הוא ההפרש בין השטח הכולל לשטחי המשולשים החופפים.

$$1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36}$$

ההסתברות למפגש בין המכשפות היא בערך $\frac{1}{3}$ $(\frac{11}{36} : 1 \approx)$



למסיימים

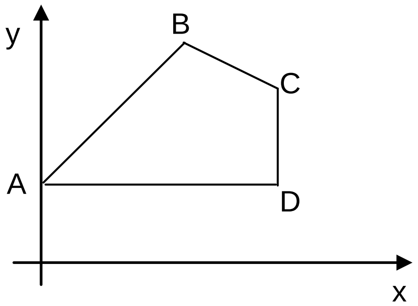
1. פנים המרובע ABCD (ראה שרטוט) וקווי הגבול שלו מתארים את התחום המתקבל ממערכת האילוצים הבאה.

$y \le x + 3$

$y \ge 3$

$y \le -\frac{1}{2}x + 12$

$x \le 10$



א. מצאו את שיעורי הקודקודים A, B, C, D .

תשובה

A(0, 3) כי A נקודת חיתוך בין ציר ה- y לישר $y = 3$

B(6, 9) כי B נקודת חיתוך בין הישרים $y = x + 3$ ו- $y = -\frac{1}{2}x + 12$

C(10, 7) כי C נקודת חיתוך בין הישרים $x = 10$ ו- $y = -\frac{1}{2}x + 12$

D(10, 3) כי D נקודת חיתוך בין הישרים $x = 10$ ו- $y = 3$

ב. פונקציית המטרה, $f(x, y) = mx + 10y$, מקבלת בתחום ערך מקסימלי לאורך כל הקטע BC.

חשבו את m.

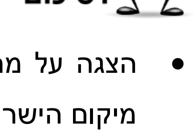
תשובה

$m = –5$

כדי שפונקציית המטרה תקבל ערך קיצוני לאורך הקטע BC, הצבה של כל מספר במקום $f(x, y)$ צריכה לתת ישר המקביל ל- BC.

נציב למשל $f(x, y) = mx + 10y = 0$. כלומר, $10y = –mx$ או $y = -\frac{m}{10}$.

הישרים מקבילים אם השיפועים שווים: $-\frac{1}{2} = -\frac{m}{10}$ כלומר, $m = 5$



לסיכום

- הצגה על מחשב (*גאוגברה*) של תנועת/הזזת הישרים המייצגים את פונקצית המטרה. רואים את הקשר בין מיקום הישרים והערך של פונקציית המטרה המתקבל.