9.3 קסמים

מטרות

- זיהוי ושימוש בחוקיות ותכונות של מכפלות וחזקות בסדרת פיבונצ'י
- הכרת קשרים בין סדרת פיבונצ'י לתופעות בטבע.

אמצעי עזר

שקף המסביר את "תעלומת הריבוע החסר"

שקף המדגים יצירת ספירלה הקשורה למספרי פיבונצ'י

גיליון אלקטרוני (למשל, *Excel*)

פתיחה

פעילות הפתיחה היא בעצם החידה שבפעילות הקודמת. עושים את הפעילות ביחד עם התלמידים. קשה להניח שנקבל מהתלמידים הסבר מדויק לסוד היווצרות המשבצת הנוספת. נקבל אולי השערות כי השרטוט אינו מדויק או שהקו הנראה כאלכסון המלבן אינו קו ישר. כעת יוכלו התלמידים להמשיך במשימות 1-3 ויוכלו להסביר את הקסם.
כהסבר הנדסי ל"תעלומת הריבוע" נוכל להשתמש בשקף (ראו בסוף המדריך לפעילות זאת).

פתרונות והערות

הפעילות מורכבת משני שלבים.

בשלב הראשון (משימות 1-3) מוצאים את הקשר בין מכפלות של מספרי פיבונצ'י במקומות זוגיים או במקומות אי-זוגיים סמוכים, לבין ריבוע המספר שביניהם.

אם n זוגי $a_{n-1}\cdot a_{n+1}=a_n^2+1$ כלומר, מכפלה של שני מספרי פיבונצ'י במקומות אי-זוגיים **גדולה** ב- 1 מריבוע המספר שביניהם (שמקומו זוגי)

אם n אי-זוגי $a_{n-1}\cdot a_{n+1}=a_n^2-1$ כלומר, מכפלה של שני מספרי פיבונצ'י במקומות זוגיים **קטנה** ב- 1 מריבוע המספר שביניהם (שמקומו אי-זוגי)

הקשר הזה מסביר את קסם המשבצת הנוספת בפתיח. אורכי הצלעות של המלבן בפתיח הם מספרים במקומות אי-זוגיים לכן המלבן הוא בעל המשבצת הנוספת (ראו שוויון ראשון שלעיל – עבור n זוגי).
אם נשרטט מלבן שאורכי צלעותיו מספרים במקומות זוגיים ניווכח שהריבוע יהיה בעל המשבצת הנוספת.

בשלב השני (משימות 4-6) מצמידים בכל פעם ריבועים שאורכי צלעותיהם מספרי פיבונצ'י ומקבלים מלבנים ההולכים וגדלים. חיבור קודקודי הריבועים בקשתות של רבעי מעגלים יוצר ספירלה, שאת מופעיה אפשר למצוא בטבע.

1. א.

ריבועי מספרים	כתיב מספרי	כתיב אלגברי
$a_2^2=1$	$1\cdot 2=2$	$a_1\cdot a_3$
$a_3^2=4$	$1\cdot 3=3$	$a_2\cdot a_4$
$a_4^2=9$	$2\cdot 5=10$	$a_3\cdot a_5$
$a_5^2=25$	$3\cdot 8=24$	$a_4\cdot a_6$
$a_6^2=64$	$5\cdot 13=65$	$a_5\cdot a_7$
$a_7^2=169$	$8\cdot 21=168$	$a_6\cdot a_8$

ב. $a_9\cdot a_{11}=a_{10}^2+1=3026$ $\qquad$ $a_{10}\cdot a_{12}=a_{11}^2-1=7920$

ג. נבחין בין שני מקרים:

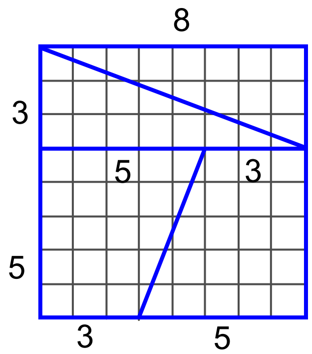
- מכפלת מספרים במקומות אי-זוגיים סמוכים בסדרת פיבונצ'י גדולה ב-1 מריבוע המספר שביניהם.
- מכפלת מספרים במקומות זוגיים סמוכים בסדרת פיבונצ'י קטנה ב-1 מריבוע המספר שביניהם.

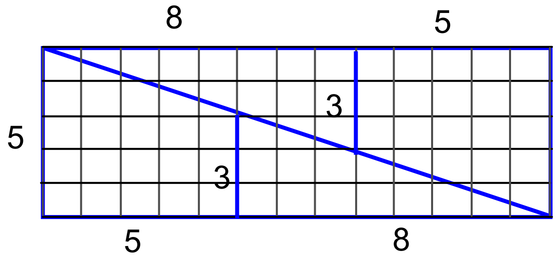
ד. החוקיות בכתיב אלגברי:

אם n זוגי $\qquad a_{n-1}\cdot a_{n+1}=a_n^2+1$

אם n אי-זוגי $\qquad a_{n-1}\cdot a_{n+1}=a_n^2-1$

2. בפתיח יש ריבוע ומלבן.





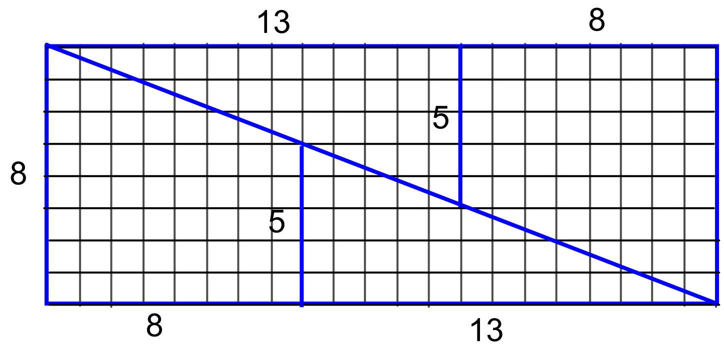
אורכי צלעות המלבן הם שני מספרים במקומות אי-זוגיים סמוכים מסדרת פיבונצ'י - 5 יח' ו- 13יח'. ולכן מכפלת מספרים אלו היא שטח המלבן – 65 יח' ריבועיות.

אורך צלע הריבוע הוא מספר פיבונצ'י שבין שני המספרים הנ"ל – 8 יח', לכן ריבוע מספר זה הוא שטח הריבוע – 64 יח' ריבועיות.

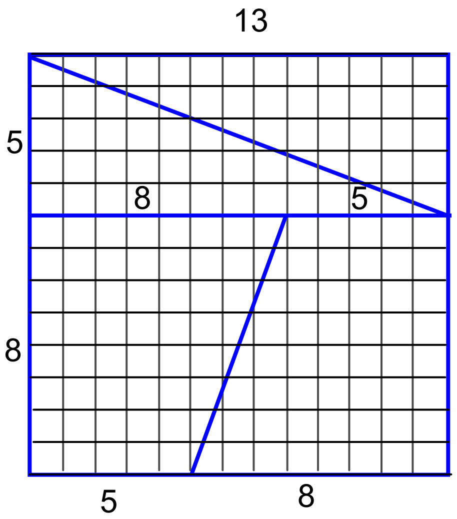
ראינו ש- $a_5\cdot a_7=a_6^2+1$, לכן יש בשטח המלבן משבצת נוספת על שטח הריבוע.

.3 נבחר למשל את המקומות 6 ו- 8 בסדרת מספרי פיבונצ'י.

המספרים הם 8 ו- 21, והמספר שביניהם – 13.



שטח המלבן: 168 יח"ר ($=8\cdot21$)



שטח הריבוע 169 יח"ר ($=13^2$)

כלומר שטח המלבן "מסתיר" משבצת אחת.

ואמנם לפי התכונה שמצאנו עבור מספרי פיבונצ'י במקומות זוגיים סמוכים $a_6\cdot a_8=a_7^2-1$

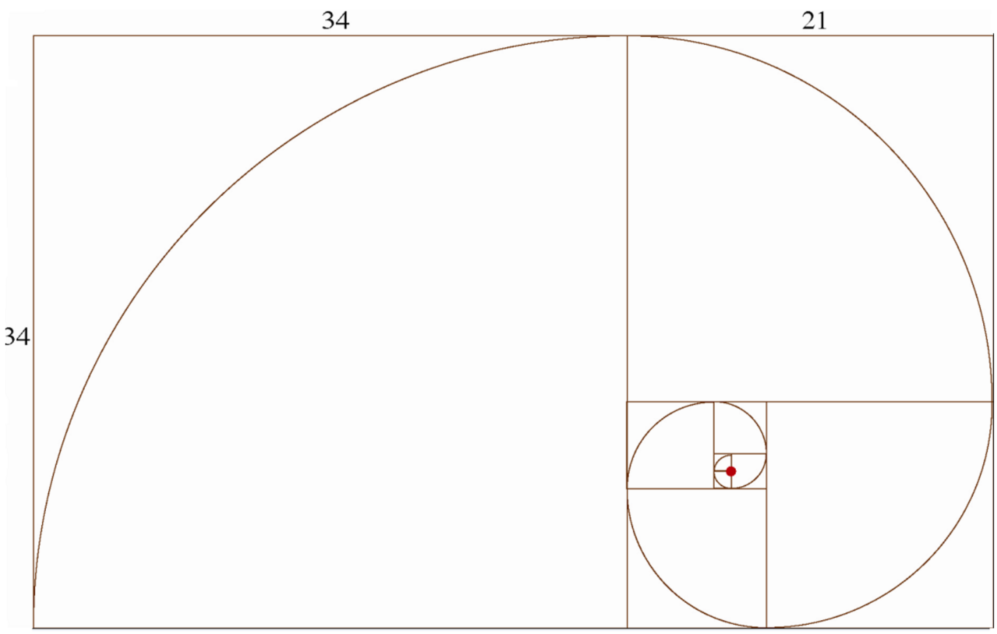
.4 השרטוט נמצא בדף לתלמיד.

.5 א. $34\cdot55=1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2+13^2+21^2+34^2$

ב. $55\cdot89=1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2+13^2+21^2+34^2+55^2$

ג. $1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+...+a_{n-1}^2+a_n{}^2=a_n\cdot a_{n+1}$

.6



שומרים על כושר

1. א. השוויונות מתקיימים.

$$2+4+6+8=\frac{8\cdot6-4\cdot2}{2}=20$$

$$5+7+9+11=\frac{11\cdot9-7\cdot5}{2}=22$$

ב. התופעה קיימת גם במקרים דומים. למשל,

$$1+3+5+7=\frac{7\cdot5-3\cdot1}{2}=16$$

$$4+6+8+10=\frac{10\cdot8-6\cdot4}{2}=28$$

ג. $$n+(n+2)+(n+4)+(n+6)=\frac{(n+6)(n+4)-(n+2)n}{2}$$

ד. הוכחה:

$$\frac{(n+6)(n+4)-(n+2)n}{2}=$$

$$\frac{n^2+10n+24-n^2-2n}{2}=$$

$$\frac{8n+24}{2}=4n+12$$

$$n+(n+2)+(n+4)+(n+6)=$$

$$4n+12$$

2. א. השוויונות מתקיימים.

$$1+4+7+10=\frac{10\cdot7-4\cdot1}{3}=22$$

$$6+9+12+15=\frac{15\cdot12-9\cdot6}{3}=42$$

ב. התופעה קיימת גם במקרים דומים. למשל,

$$3+6+9+12=\frac{12\cdot9-6\cdot3}{3}=30$$

$$2+5+8+11=\frac{11\cdot8-5\cdot2}{3}=26$$

ג. $$n+(n+3)+(n+6)+(n+9)=\frac{(n+9)(n+6)-(n+3)n}{3}$$

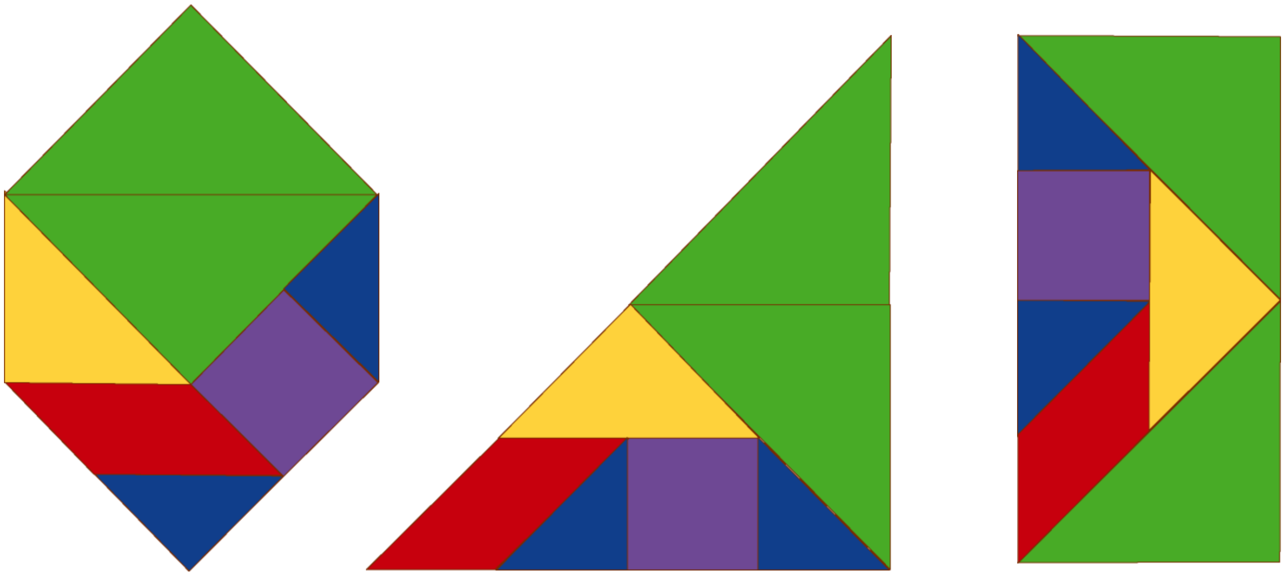
ד. הוכחה:

$$\frac{(n+9)(n+6)-(n+3)n}{2}=$$

$$\frac{n^2+15n+54-n^2-3n}{2}=$$

$$\frac{12n+54}{3}=4n+18$$

$$n+(n+3)+(n+6)+(n+9)=$$
$$4n+18$$



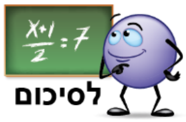
למסיימים

1. בסדרת פיבונצ'י אפשר למצוא תופעות מעניינות. למשל, כל מספר שלישי הוא זוגי.
בנו בגיליון אלקטרוני את סדרת פיבונצ'י עד למספר הארבעים וגלו תופעות דומות.

תשובה

דוגמאות:

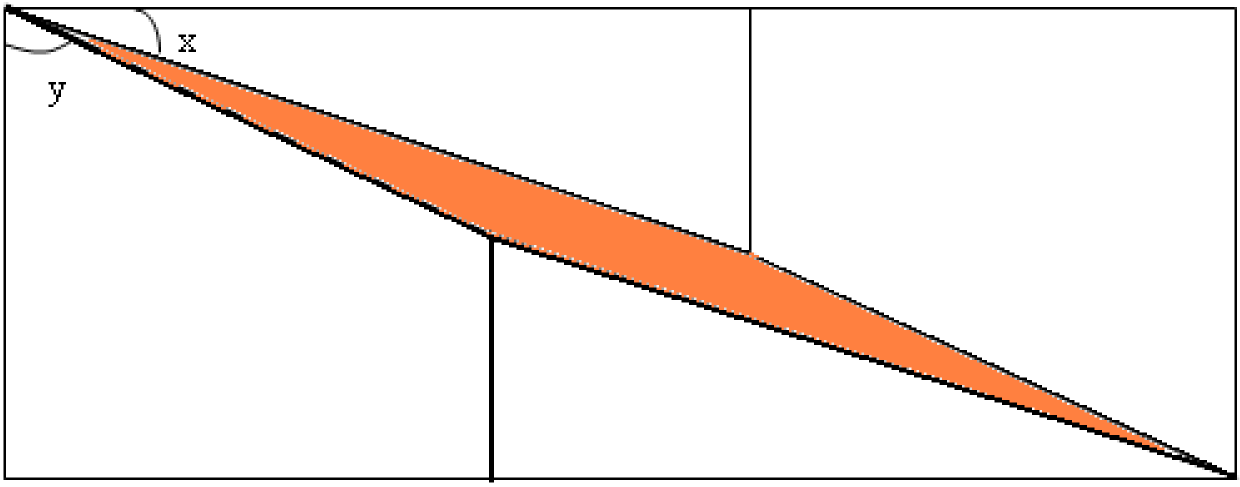
- כל מספר רביעי בסדרה הוא כפולה של 3
- כל מספר שישי בסדרה הוא כפולה של 4
- כל מספר חמישי בסדרה הוא כפולה של 5



- דנים בהסבר הגיאומטרי ל"תעלומת המשבצת החסרה"
- מתייחסים לקשר בין מספרי פיבונצי והספירלה הנוצרת, לבין תופעות בטבע

שקף, הסבר גיאומטרי לקסם המשבצת החסרה

כאשר מחברים את ארבעת חלקי הריבוע (שאורך צלעותיו הוא מספר פיבונצ'י שמקומו זוגי), למלבן, מתקבל שרטוט דומה לשרטוט הבא.



השרטוט מציג בצורה מוגזמת את המקבילית הנוצרת בין ארבעת החלקים.

מכיוון ששטחה של המקבילית הזאת הוא יחידה אחת, אין מבחינים בה בהרכבת החלקים למלבן.

חישובים טריגונומטריים מראים כי $\angle x = 20.55^0$ ו- $\angle y = 68.20^0$.

מכאן נוכל להסיק כי הזווית החדה של המקבילית היא בת 1.25^0.

אם אורך צלע הריבוע הוא מספר פיבונצ'י הנמצא במקום אי-זוגי, הרכבת המלבן יוצרת יחידת שטח אחת עודפת.

כלומר שני חלקי המלבן חופפים זה את זה על שטח מזערי שגם הפעם אין מבחינים בו.

שקף: מלבנים שאורך צלעותיהם מספרי פיבונצ'י סמוכים