

7.2 פעולות נוספות

יעל מצאה דף עם תרגילי חשבון מוזרים.

$$3 \bowtie 6 = 6$$

$$7 \bowtie -3 = 1$$

$$8 \bowtie 3 = 8$$

$$-4 \bowtie 1 = -6$$

$$2 \bowtie 5 = 4$$

$$0 \bowtie 13 = 10$$

זהו את הפעולה: $a \bowtie b = \underline{\hspace{2cm}}$

1. פתרו את התרגילים הבאים.

ה. $\frac{1}{2} \bowtie -\frac{1}{6} =$

ג. $-3 \bowtie -2 =$

א. $0 \bowtie -1 =$

ו. $-5.2 \bowtie 8 =$

ד. $\frac{1}{2} \bowtie 2\frac{1}{4} =$

ב. $2 \bowtie 2 =$

2. פתרו את המשוואות הבאות.

ה. $7 \bowtie x = 7$

ג. $-3 \bowtie x = 3$

א. $0 \bowtie x = 8$

ו. $2x \bowtie 8 = 6$

ד. $3 \bowtie x = 4$

ב. $x \bowtie 2 = 6$

בפעילות הקודמת הכרנו פעולות בינאריות חדשות ותכונות שלהן. הכרנו גם שתי תכונות של פעולות בינאריות: **חילופיות ואיבר ניטרלי**.

תזכורת:

פעולה בינארית בין מספרים היא פעולה בין שני מספרים שנותנת כתוצאה מספר יחיד.

פעולה חילופית היא פעולה בינארית שבה סדר המספרים אינו משפיע על התוצאה.

איבר ניטרלי של פעולה בינארית הוא מספר שפעולה בינו לבין כל מספר נוסף נותנת כתוצאה את המספר הנוסף.

כל הפעולות שהכרנו היו פעולות בינאריות. בשלב זה נתייחס לאיברים ניטרליים רק בפעולות חילופיות.

3. האם הפעולה $\bowtie$ היא פעולה בינארית? נמקו.

האם הפעולה $\bowtie$ היא חילופית? נמקו.

האם לפעולה $\bowtie$ יש איבר ניטרלי? אם כן, פרטו מהו. אם לא, נמקו.

סגירות

מיכאל התלבט בשאלה: האם פעולת החיסור הרגיל היא חילופית - עבור קבוצת המספרים הטבעיים.

$$\text{הוא בדק את הדוגמה: } 7 - 3 = 4 \quad 3 - 7 = -4$$

ושם לב כי התוצאה של אחד התרגילים איננה מספר טבעי.

הגדרה:

קבוצת מספרים נקראת **סגורה** לגבי פעולה בינארית, אם תוצאת הפעולה בין כל שני מספרים שבקבוצה גם כן שייכת לאותה הקבוצה.

משפט: קבוצת המספרים הטבעיים היא קבוצה סגורה לגבי פעולת החיבור הרגיל, כי סכום של כל שני מספרים טבעיים הוא תמיד מספר טבעי - כלומר, גם הוא שייך לקבוצה. לעומת זאת, קבוצת המספרים הטבעיים איננה סגורה לגבי פעולת החיסור הרגיל, כי התוצאה של חיסור שני מספרים טבעיים היא לא תמיד מספר טבעי. למשל, תוצאת החיסור של $3 - 7$ איננה מספר טבעי.

4. בכל סעיף, בדקו האם קבוצת המספרים הטבעיים (ללא המספר אפס) סגורה לגבי הפעולה הנתונה.

אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. כפל

ב. חילוק

ג. חזקה

ד. ממוצע חשבוני (תזכורת: משמעות הפעולה "ממוצע חשבוני של שני מספרים" היא מחצית סכומם).

5. א. האם קבוצת המספרים הטבעיים היא קבוצה סגורה לגבי הפעולה $\times$ שהכרנו בתחילת הפעילות? אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

ב. מצאו קבוצה שהיא סגורה לגבי הפעולה $\times$.

רוני ודנה התבקשו לפתור שני תרגילי חיבור ושני תרגילי חיסור:

א. $(112 + 28) + 52 =$ ג. $(117 - 17) - 7 =$

ב. $112 + (28 + 52) =$ ד. $117 - (17 - 7) =$

רוני טענה: מספיק לפתור תרגיל חיבור אחד ותרגיל חיסור אחד.

דנה טענה: מספיק לפתור תרגיל חיבור אחד, אבל צריכים לפתור את שני תרגילי החיסור. מי מהן צודקת? הסבירו.

הגדרה

פעולה בינארית היא **פעולה קיבוצית** אם היא מקיימת את חוק הקיבוץ, כלומר, סדר הביצוע בשרשרת של אותה פעולה פעמיים אינו משנה את התוצאה.

פעולה $*$ היא קיבוצית עבור קבוצת מספרים, אם **לכל** שלושה מספרים a, b, c שבקבוצת המספרים המתאימים לפעולה, מתקיים השוויון: $(a * b) * c = a * (b * c)$

מש/3: פעולת החיבור הרגיל היא קיבוצית בקבוצת המספרים הטבעיים, כי

לכל שלושה מספרים טבעיים מתקיים: $(a + b) + c = a + (b + c)$

לעומת זאת, פעולת החיסור הרגיל איננה קיבוצית בקבוצת המספרים הטבעיים.

למשל, $(10 - 5) - 3 = 2$ אבל $10 - (5 - 3) = 8$

6. האם הפעולה $\bowtie$ שהכרנו בתחילת הפעילות היא קיבוצית בקבוצת המספרים השלמים? נמקו את תשובתכם.

7. נתונות שלוש פעולות בינאריות שהכרנו בפעילות הקודמת.

$a \star b = a^2 + b$ $a \spadesuit b = \frac{a+b}{2}$ $a \blacktriangle b = 2 \cdot a + b$

התייחסו לכל פעולה וקבעו אם היא קיבוצית. אם כן, הסבירו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית (כלומר, דוגמה שבה משנים את סדר הביצוע בשרשרת של הפעולה ומקבלים תוצאות שונות).



8. נתייחס לקבוצת המספרים **השלמים** על ציר המספרים.
נגדיר פעולה M בין שני מספרים שלמים a ו- b באופן הבא:
 $a M b$ שווה **למרחק** על ציר המספרים בין a ל- b . שימו לב! מרחק הוא תמיד מספר חיובי.
א. האם הפעולה M היא פעולה בינארית? הסבירו.
ב. האם קבוצת המספרים השלמים סגורה לגבי הפעולה M ?
ג. האם הפעולה M היא חילופית? נמקו.
ד. האם הפעולה M היא קיבוצית?
ה. הסבירו מדוע לפעולה M אין איבר נטרלי.
ו. מצאו קבוצת מספרים סגורה לגבי הפעולה M , שבה יש לפעולה זו איבר נטרלי.

