

### 7.3 פעולות עם תוצאות מחזוריות

#### קבוצות פעולות ותכונות

- חזרו בקצרה **בזוגות** על המושגים והתכונות שעסקנו בהם בשיעורים הקודמים. חלקו ביניכם את המושגים והתכונות והסבירו אותם במילים שלכם.
- פעולה **בינארית**
  - קבוצה **סגורה** לגבי פעולה בינארית
  - פעולה **בינארית חילופית**
  - איבר **ניטרלי** לגבי פעולה בינארית (נתייחס לאיבר ניטרלי רק בפעולה חילופית)
  - פעולה **בינארית קיבוצית**

1.  $a$  ו- $b$  הם שני מספרים שלמים, ו- $*$  היא פעולה ביניהם. נסו לרשום בעזרת אותיות ומעט מילים את התכונות שבמסגרת.
2. אילו מן התכונות שבמסגרת מתקיימות לגבי המספרים הטבעיים והפעולות הבאות:
  - א. חיבור
  - ב. ממוצע חשבוני (תזכורת: ממוצע חשבוני של שני מספרים הוא מחצית סכומם).
  - ג. חזקה
  - ד. כפל

#### מספר הופכי

##### הגדרה:

$b$  הוא מספר הופכי ל- $a$  בפעולת הכפל הרגילה, אם  $a \cdot b = 1$ .

$$\text{דוגמה: } \frac{2}{5} \text{ הופכי ל-} 2\frac{1}{2}, \text{ כי } \frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{2} = 1.$$

מכיוון שהכפל הוא פעולה חילופית, גם  $2\frac{1}{2}$  הופכי ל- $\frac{2}{5}$ .

שימו לב: 1 (תוצאת המכפלה של מספרים הופכיים) הוא המספר הניטרלי של פעולת הכפל.

באופן כללי,  $b$  נקרא **מספר הופכי** ל- $a$  בפעולה חילופית  $*$  שיש לה איבר ניטרלי  $e$ , אם  $a * b = e$ . מכיוון שהפעולה חילופית, גם  $a$  הופכי ל- $b$ .

כלומר,  $a$  ו- $b$  הופכיים זה לזה.

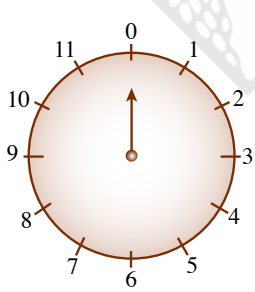
3. א. השלימו במחברת במילים את ההגדרה:  
 מספרים הופכיים זה לזה עבור פעולה מסוימת הם מספרים ש...  
 ב. מהו המספר ההופכי ל-5 בפעולת החיבור הרגיל? האם יש לו שם מקובל אחר ביחס ל-25?
4. א. האם בקבוצת המספרים השלמים עם פעולת הכפל הרגיל, יש מספר הופכי לכל מספר? הסבירו או תנו דוגמה נגדית.  
 ב. מצאו קבוצת מספרים עם פעולת הכפל הרגיל, כך שלכל מספר בה יש מספר הופכי שגם הוא שייך לקבוצה (זהירות, אפס!).



דני הביט בשעון בחדרו. אביו יצא לתורנות ואמר שיחזור בעוד 10 שעות. דני ניסה להבין איזה שעה יראה השעון כשאביו יחזור. **נסה לעזור לדני להבין כיצד לבצע פעולות על השעון, ונכיר תכונות של פעולות דומות.**

### חיבור מחזורי

**הגדרה:**  
 נתונות 12 נקודות על מעגל המסומנות במספרים, ונתון מחוג המכוון ל-0.



נגדיר פעולה  $a \oplus_{12} b$  בין כל זוג מספרים בקבוצה  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ , כך:  
 סובבו את המחוג a תחנות בכיוון השעון.  
 ואחר-כך המשיכו לסובב באותו כיוון b תחנות נוספות.  
 תוצאת הפעולה היא מספר התחנה שהגעתם אליה.

*זמא/ת:*

$7 \oplus_{12} 10 = 5$        $10 \oplus_{12} 4 = 2$        $6 \oplus_{12} 3 = 9$

### 5. חשבו:

- א.  $10 \oplus_{12} 3 =$       ג.  $8 \oplus_{12} 5 =$       ה.  $8 \oplus_{12} 11 =$   
 ב.  $3 \oplus_{12} 9 =$       ד.  $4 \oplus_{12} 3 =$       ו.  $7 \oplus_{12} 7 =$

6. העתיקו למחברת והשלימו.

א.  $10 \oplus_{12} \blacksquare = 3$       ב.  $7 \oplus_{12} \blacksquare = 3$       ג.  $\blacksquare \oplus_{12} 8 = 7$

7. חברו שני תרגילים לכל תוצאה.

א.  $\blacksquare \oplus_{12} \blacksquare = 0$       ב.  $\blacksquare \oplus_{12} \blacksquare = 1$       ג.  $\blacksquare \oplus_{12} \blacksquare = 5$

נבדוק תכונות של הפעולה  $\oplus_{12}$  בקבוצה  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ .

8. סמנו נכון/לא נכון והסבירו.

א. הקבוצה הנתונה סגורה לגבי הפעולה  $\oplus_{12}$ .

ב. הפעולה  $\oplus_{12}$  היא פעולה חילופית.

ג. הפעולה  $\oplus_{12}$  היא פעולה קיבוצית.

ד. האיבר הניטרלי של הפעולה  $\oplus_{12}$  הוא 0.

ה. 8 ו-4 הם מספרים הופכיים זה לזה לגבי הפעולה  $\oplus_{12}$ .

9. מצאו את ההופכיים למספרים: 0, 11, 3 לגבי הפעולה  $\oplus_{12}$ .  
האם יש מספר נוסף שההופכי שלו שווה לו?

### כפל מחזורי

10. א. הציעו הגדרה לכפל מחזורי בקבוצה  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . סמנו פעולה זאת כך:  $a \odot_5 b$ .

ב. פתרו לפי הגדרתכם

$3 \odot_5 2 =$        $3 \odot_5 4 =$        $2 \odot_5 3 =$        $4 \odot_5 3 =$

ג. התייחסו לתכונות שבמסגרת בראשית הפעילות. בדקו אילו מן התכונות מתקיימות לגבי הפעולה  $\odot_5$  שהגדרתם בקבוצה הנתונה

#### הגדרה:

נגדיר פעולת  $a \odot_5 b =$  כפעולת כפל מחזורי בקבוצה  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , כך:

כופלים את a ב-b בכפל רגיל ומחסרים מהמכפלה כפולות של 5, עד שהתוצאה קטנה מ-5.

זוהי תוצאת הפעולה.

למשל:  $3 \odot_5 3 = 4$        $4 \odot_5 4 = 1$

11. א. העתיקו למחברת והשלימו את הלוח של הפעולה  $\odot_5$ .

$\odot_5$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3				4	
4					1

ב. הסבירו כיצד רואים בלוח

- שהקבוצה סגורה לגבי הפעולה
- את המספר הניטרלי לגבי הפעולה
- שהפעולה היא חילופית
- זוגות של מספרים הופכיים זה לזה.

ג. האם לכל מספר בקבוצה יש הופכי? הסבירו.

ד. הסבירו מדוע אי-אפשר לראות בלוח אם הפעולה קיבוצית.

12. נגדיר באופן דומה פעולה  $a \odot_4 b$  בקבוצה  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

הוכיחו כי ל-2 אין הופכי לגבי פעולה זו בקבוצה הנתונה.

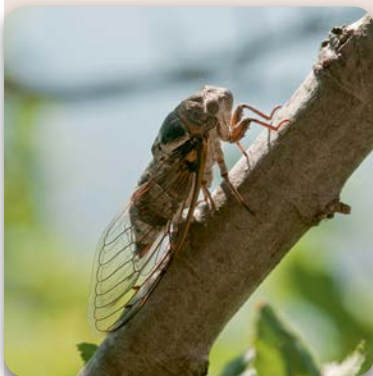
### תופעות מחזוריות בחיינו

נורית ומיכל גרות זו מזו. כל אחת מהן מגדלת כלב בדירתה. נורית מוציאה את הכלב שלה לטיול כל 8 שעות, ואילו מיכל מוציאה את הכלב שלה לטיול כל 9 שעות.

13. ביום ראשון יצאו נורית ומיכל עם הכלבים לטיול משותף בשעה 7:00.

א. כל כמה שעות ייפגשו נורית ומיכל במהלך טיוליהם עם הכלבים?

ב. באיזה יום ובאיזו שעה יתקיים הטיול המשותף הבא של נורית, מיכל והכלבים?



הציקדה (משמעות המילה Cycada בלטינית היא "צרצר עץ") היא חרק מזמזם המזכיר ארבה. ישנם כ-2,500 מינים שונים של ציקדות. שניים מן המינים הללו חיים רוב הזמן מתחת לפני האדמה, ורק פעם אחת במשך כל תקופת חייהם, הם עולים אל מעל פני השטח - האחד כל 17 שנים, והשני כל 13 שנים. לכן באזורים מסוימים בעולם (למשל, בארה"ב) הציקדות ממינים אלו מופיעות מעל פני האדמה, בקבוצות גדולות מאוד כל 17 (או 13) שנים.

שני מיני הציקדות הללו יוצרים תופעות מחזוריות: האחד כל 17 שנים, והאחר כל 13 שנים.

כל כמה שנים יופיעו שני מיני הציקדה מעל פני האדמה בעת ובעונה אחת?