7.5 متّجهات

تعلَّمنا في الفعّاليّات الأربع الأخيرة عن مصطلحات في مجموعات أعداد، وتعلَّمنا عن صفات العمليّات في الأعداد.

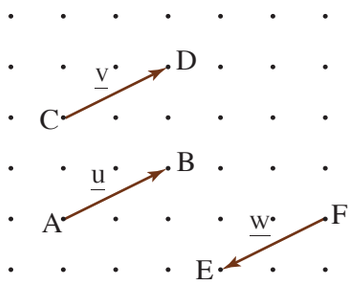
نبحث عملية ثنائيّة من نوع آخر: عملية بين كائنات رياضيّة ليست أعدادًا.

ملاحظة: نحتاج في هذه الفعّاليّة إلى ورقة عليها نقاط أو ورقة مقسمة إلى تربيعات كبيرة.

ما هو المتّجه؟

تعريف:

نمثِّل المتّجه في المستوى بواسطة طول واتّجاه، ونرمز له بحرفين يشيران إلى نقطتين في ذنب السهم ورأسه ($\overrightarrow{AB}$) أو بواسطة حرف صغير ($\underline{u}$) .



اِنتبهوا! عند كتابة $\overrightarrow{AB}$ من المهمّ التّشديد على ترتيب الحروف.

نسجِّل، في الطّرف الأيسر، الحرف الّذي يقع في ذنَب السّهم، وفي الطّرف الأيمن نسجِّل الحرف الّذي يقع في رأس السّهم.

مثال: المتّجه $\underline{w}$ نرمز له أيضًا بالرّمز $\overrightarrow{FE}$ (وليس $\overrightarrow{EF}$).

المتّجهان اللّذان لهما **نفس الطول والاتّجاه** نسمِّيهما "**متّجهان متساويان**".

مثال: $\underline{u}$ وَ $\underline{v}$ هما متّجهان متساويان. لذا نرمز لهما: $\underline{u} = \underline{v}$

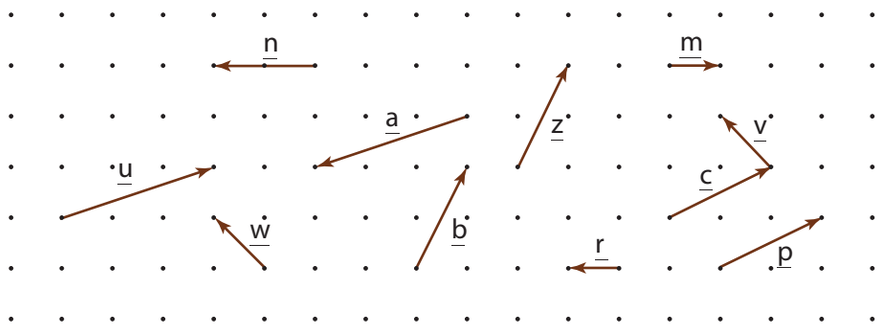
إذا كان متّجهان **متساويان في الطّول**، لكنّهما **متضادان في الاتّجاه**، نسمِّيهما "**متّجهان متضادّان**".

مثال: $\underline{u}$ وَ $\underline{w}$ هما متّجهان متضادّان. لذا نرمز لهما: $\underline{w} = -\underline{v}$

نسمِّي المتّجه الّذي يبدأ وينتهي في نفس النّقطة "**متّجه الصّفر**"، ونرمز له: $\underline{0}$

1. معطى في الرّسمة الآتية متّجهات.

أ. جِدوا أزواجًا من المتّجهات المتساوية.



ب. جِدوا أزواجًا من المتّجهات المتساوية في الطّول، لكنّها مختلفة في الاتّجاه.

ت. جِدوا أزواجًا من المتّجهات المتساوية في الاتّجاه، لكنّها مختلفة في الطّول.

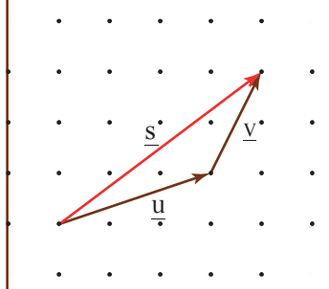
ث. جِدوا أزواجًا من المتّجهات المتضادّة.

جمع متّجهات

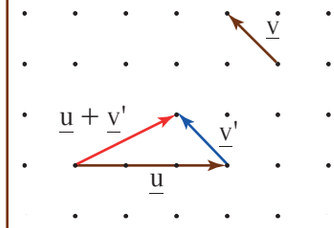
تصف المتّجهات حركة مستقيمة باتّجاه معيّن ومسافة معيّنة.

تعريف:

نعرّف عمليّة **الجمع + بين متّجهات على أنّها مجموع حركة**.



عندما نجمع المتّجهين $\underline{u}$ وَ $\underline{v}$، وهذا يعني كي نحصل على المتّجه $\underline{u}+\underline{v}$، فإنّنا نتقدّم في البداية حسب طول واتّجاه $\underline{u}$، وبعد ذلك نتحرّك حسب طول واتّجاه $\underline{v}$. نتيجة العمليّة هي متّجه $\underline{s}$ الذي يبيّن مجموع حركتنا، من نقطة بداية المتّجه الأول حتّى نقطة نهاية المتّجه الثّاني (دون أنْ نذكر نقاطًا وسطيّة وتوجّهات مررنا بها في الطّريق).



إن لم يقع المتّجه $\underline{v}$ على امتداد المتّجه $\underline{u}$ فإنّه يمكن إزاحة المتّجه $\underline{v}$ (دون أنْ نغيّر طوله أو اتّجاهه)، بحيث يكون استمرارًا للمتّجه $\underline{u}$.
هذا يعني أنّه في هذه الحالة، يمكن أنْ نرسم المتّجه $\underline{v}'$ الّذي يساوي $\underline{v}$، بحيث يكون ذنبه في رأس المتّجه $\underline{u}$.
في هذه الحالة: $\underline{u}+\underline{v}=\underline{u}+\underline{v}'$

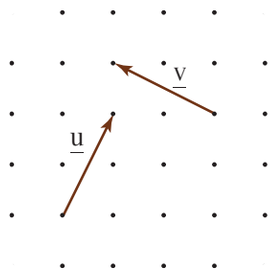
2. معطى خمس متّجهات وأربعة تمارين جمع متّجهات.

$\underline{u}+\underline{z}$ $\underline{w}+\underline{w}$ $\underline{z}+\underline{b}$ $\underline{w}+\underline{u}$

أ. حلّوا على ورقة عليها نقاط أو ورقة مقسمة إلى تربيعات كبيرة.
أُرسموا، في كلّ تمرين، زوجًا من المتّجهات الّتي جُمعت ونتيجة عمليّة الجمع.

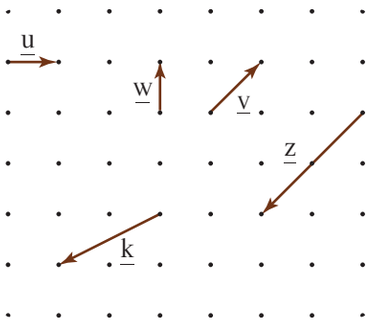
ب. جِدوا، لكلّ زوج متّجهات في بند أ، متّجهًا مساويًا لنتيجة الجمع من بين المتّجهات المعطاة.

3. اِجمعوا المتّجهين $\underline{v}$ + $\underline{u}$ على ورقة النّقاط.



4. معطى في الرّسمة خمس متّجهات.
عبِّروا، إذا كان الأمر ممكنًا، عن المجاميع الآتية بمساعدة المتّجهات المعطاة، أو المضادّة لها.

مثال: $\underline{u} + \underline{w} = \underline{v}$



أ. $\underline{k} + (-\underline{v}) =$

ب. $\underline{z} + (\underline{v}) =$

ت. $\underline{z} + \underline{w} =$

ث. $\underline{v} + \underline{w} =$

ج. $(\underline{z} + \underline{v}) + \underline{v} =$

ح. $(\underline{z} + \underline{w}) + \underline{u} =$

خ. $\underline{z} + (\underline{w} + \underline{u}) =$

5. أُرسموا متّجهًا معينًّا في دفاتركم أو على ورقة عليها نقاط. أُرسموا ثلاثة أزواج من المتّجهات، بحيث يكون مجموع كلّ زوج مساويًا للمتّجه الّذي رسمتموه.

6. معطى تمرين لعمليتيْ جمع وثلاثة متّجهات.
هل يمكن - حسب رأيكم - أنْ نرسم متّجه النّتيجة مباشرةً دون أنْ نرسم، في البداية، مجموع اثنين منهما؟ اِشرحوا.

7. أ. أُرسموا المتّجهين $\underline{a}$ وَ $\underline{b}$ على ورقة عليها نقاط.
ب. أُرسموا المجموع $\underline{a} + \underline{b}$ والمجموع $\underline{b} + \underline{a}$.
ماذا وجدتم؟

هل هذه زُمرة؟

للتذكير

إذا كانت مجموعة الحدود مع عملية ثنائية معرَّفة على حدودها فإنّها زُمرة تبادليّة للعمليّة إذا تحقّقت الشّروط الآتية.

- المجموعة مغلقة للعمليّة، -وهذا يعني أنّ نتيجة العمليّة على كلّ حدّين في المجموعة هي حدّ في المجموعة أيضًا.
- العمليّة تجميعيّة.
- يوجد في المجموعة حدّ محايد للعمليّة.
- لكلّ حدّ في المجموعة مقلوب العدد (حدّ) في المجموعة، حيث أنّ العمليّة بين كلّ حدّ ومقلوبه تعطينا الحدّ المحايد كنتيجة.
- العمليّة تباديليّة.

8. هل مجموعة كلّ المتجّهات **في المستوى** مع عمليّة الجمع بين المتجّهات هي زُمرة تباديليّة؟
اشرحوا كل مرحلة في فحصكم بالكلمات أو/ و بمساعدة رسمة.
إذا لم تتحقّق بعض الشروط فأعضوا أمثلة مضادّة.

9. معطى مجموعة كلّ المتجّهات **على محور الأعداد** ومعطى عمليّة الجمع بين المتجّهات.
هل هذه المجموعة هي زُمرة تباديليّة؟
اِشرحوا كلّ مرحلة في فحصكم بالكلمات أو/ و بمساعدة رسمة.
إذا لم تتحقّق بعض الشروط فأعطوا أمثلة مضادّة.