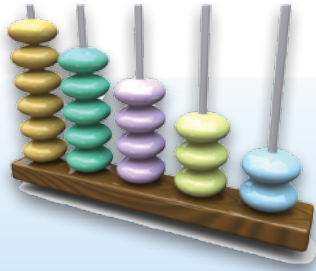
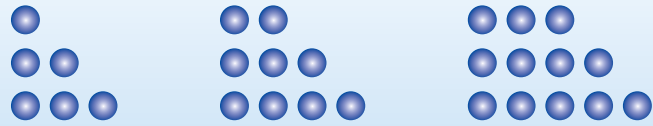


יחידה 28: הכללות והנמקות באלגברה

שיעור 1. סדרות של מספרים עוקבים



לפניכם סדרה של מבנים מנקודות.



כמה נקודות במבנה השני? כמה נקודות במבנה הרביעי? כמה נקודות במבנה העשירי?

נחקר תכונות של סדרת מספרים עוקבים.

שלושה מספרים עוקבים

1. א. רשמו סדרות של שלושה מספרים עוקבים וחשבו את הסכום של כל שלשה.

$$9 + 10 + 11 = 30 \quad \text{זלמה:}$$

ב. **דורון** אמר: הסכום של שלושה מספרים עוקבים הוא פי 3 מהמספר האמצעי. האם **דורון** צודק? אם כן, הסבירו. אם לא, הראו דוגמה נגדית.

ג. **גרשון** אמר: בכל שלשה של מספרים עוקבים, המספר האמצעי הוא הממוצע החשבוני של שלושת המספרים.

האם **גרשון** צודק? אם כן, הסבירו. אם לא, הראו דוגמה נגדית.

ד. מצאו תכונה נוספת של סדרות של שלושה מספרים עוקבים והוכיחו אותה.

2. במשימה 1 ראינו שסכום 3 מספרים עוקבים הוא כפולה של 3. היעזרו במבני הנקודות במשימת הפתיחה והוכיחו תכונה זו בהוכחה ויזואלית (חזותית) לכל שלושה מספרים חיוביים עוקבים.

3. לפניכם רשימה של מספרים: 12 45 67 105 24. אילו מבין המספרים האלה אפשר לכתוב כסכום של שלושה מספרים עוקבים? כתבו את המספרים שמצאתם כסכומים מתאימים. הסבירו מדוע המספרים האחרים אינם ניתנים לכתובה כזו.

חמישה מספרים עוקבים

4. א. רשמו סדרות של חמישה מספרים עוקבים וחשבו את הסכום של כל סדרה.

ב. נסחו טענה אודות הסכום של סדרת חמישה מספרים עוקבים.

הדגימו את הטענה שלכם על הדוגמאות שרשמתם, והוכיחו אותה.

ג. נסחו טענה אודות המספר האמצעי בסדרה של חמישה מספרים עוקבים.

הדגימו את הטענה והוכיחו אותה.

5. לפניכם רשימה של מספרים: 73 15 2145 94 50
 אילו מבין המספרים האלה אפשר לכתוב כסכום של חמישה מספרים עוקבים?
 כתבו את המספרים שמצאתם כסכומים מתאימים.
 הסבירו מדוע המספרים האחרים אינם ניתנים לכתובה כזו.

ארבעה מספרים עוקבים

6. א. האם סכום של ארבעה מספרים עוקבים מתחלק ב-4? אם כן, הוכיחו. אם לא, הראו דוגמה נגדית.
 ב. האם סכום של ארבעה מספרים עוקבים הוא מספר זוגי? אם כן, הוכיחו. אם לא, הראו דוגמה נגדית.
 ג. נסחו טענה אודות סכום של ארבעה מספרים עוקבים.

7. לפניכם רשימה של מספרים: 26 54 100 1414 216
 אילו מבין המספרים האלה אפשר לכתוב כסכום של ארבעה מספרים עוקבים?
 כתבו את המספרים שמצאתם כסכומים מתאימים.
 הסבירו מדוע המספרים האחרים אינם ניתנים לכתובה כזו.



8. א. לפניכם סדרה של ארבעה מספרים עוקבים: 12, 13, 14, 15. מהו הממוצע של שני המספרים האמצעיים בסדרה? מהו ממוצע כל הסדרה?
 ב. נסחו טענה אודות הממוצע של סדרת ארבעה מספרים עוקבים והוכיחו אותה.

9. לפניכם רשימה של מספרים: 26 26.5 26.25 37.5
 אילו מבין המספרים האלה אפשר לכתוב כממוצע של ארבעה מספרים עוקבים?
 כתבו את הסדרות המתאימות לממוצעים שמצאתם. הסבירו מדוע המספרים האחרים אינם מתאימים.



1. א. בדקו את נכונות השוויונות הבאים:

$$3 + 5 = 2 \cdot 4$$

$$4 + 6 = 2 \cdot 5$$

$$9 + 11 = 2 \cdot 10$$

- ב. תנו דוגמאות נוספות לשלושה מספרים עוקבים המקיימים את התכונה:
 סכום שני המספרים החיצוניים גדול פי 2 מהמספר האמצעי.



2. א. קבעו לגבי כל מספר אם אפשר לכתוב אותו כסכום של 3 מספרים עוקבים. אם כן, כתבו את המספרים. אם לא, הסבירו מדוע.

13 33 63

ב. קבעו לגבי כל מספר אם אפשר לכתוב אותו כסכום של 5 מספרים עוקבים. אם כן, כתבו את המספרים. אם לא, הסבירו מדוע.

85 98 215

ג. קבעו לגבי כל מספר אם אפשר לכתוב אותו כסכום של 4 מספרים עוקבים. אם כן, כתבו את המספרים. אם לא, הסבירו מדוע.

94 146 310



3. לפניהם מספרים: 15, 30, 60

א. נסו לכתוב כל אחד מהמספרים האלה (אם אפשר) כסכום של 3 מספרים עוקבים.

ב. נסו לכתוב כל אחד מהמספרים האלה (אם אפשר) כסכום של 5 מספרים עוקבים.

ג. תנו דוגמה נוספת למספר שאפשר לכתוב אותו גם כסכום של 3 עוקבים וגם כסכום של 5 עוקבים.

ד. אילו מספרים אפשר לכתוב גם כסכום של 3 עוקבים וגם כסכום של 5 עוקבים? הסבירו.



4. א. רשמו שתי סדרות של שבעה מספרים עוקבים. חשבו את הסכום של כל סדרה.

ב. **דורון** אמר: הסכום של שבעה מספרים עוקבים הוא מספר המתחלק ב-7.

הסבירו את הטענה של **דורון** והוכיחו אותה (תוכלו להיעזר בביטויים אלגבריים).

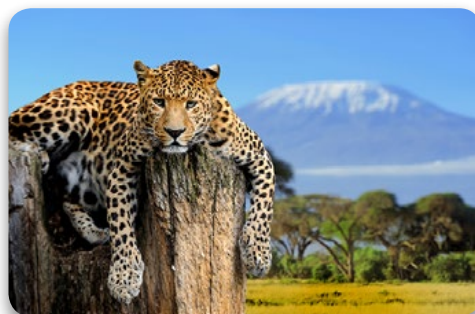
ג. **גרשון** אמר: בכל סדרה של שבעה מספרים עוקבים, המספר האמצעי הוא הממוצע החשבוני של שבעת המספרים.

הסבירו את הטענה של **גרשון** והוכיחו אותה.



5. א. מהו המספר הקרוב ביותר ל-600 שאפשר לכתוב אותו כסכום של 3 מספרים עוקבים וגם כסכום של 5, 7 ו-9 מספרים עוקבים?

ב. כתבו את המספר שמצאתם בסעיף א כסכומים מתאימים.



שיעור 2: תכונות מספריות



בדקו את נכונות השוויונות הבאים:

$$0.6^2 + 0.4 = 0.4^2 + 0.6$$

$$(-3)^2 + 4 = 4^2 + (-3)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

שערו תכונות משותפות לכל זוגות המספרים המקיימים את השוויון: $a^2 + b = b^2 + a$

נחקרו תכונות מספריות.

במשימות 1 ו-2 נתייחס לדוגמאות ממשימת הפתיחה.

1. א. אלקנה ניסה למצוא את התנאי לכך שזוג מספרים a ו- b ($a \neq b$)

$$a^2 + b = b^2 + a \quad \text{יקיים את השוויון}$$

$$a^2 - b^2 = a - b \quad \text{הוא כתב:}$$

$$(a - b)(a + b) = a - b \quad / : (a - b)$$

המשיכו את הפתרון של **אלקנה** וכתבו תנאי לכך שזוג מספרים a ו- b יקיים את השוויון הנתון.

ב. האם הטענה נכונה גם במקרים שבהם $a = b$? הסבירו.

ג. כתבו דוגמה נוספת לזוג מספרים המקיים את השוויון.

2. מצאו את פתרון המשוואות.

$$x^2 + (1 - x) = (1 - x)^2 + x \quad \text{א.}$$

$$(2x - 3)^2 + (4 - 2x) = (4 - 2x)^2 + (2x - 3) \quad \text{ב.}$$

3. א. בדקו את נכונות השוויונות הבאים:

$$21 \cdot 22 - 20 \cdot 23 = 2$$

$$100 \cdot 101 - 99 \cdot 102 = 2$$

$$78 \cdot 79 - 77 \cdot 80 = 2$$

ב. כתבו דוגמה נוספת לאותה חוקיות ובדקו נכונות.

ג. כתבו הכללה לחוקיות שמצאתם. הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.

4. מצאו את פתרון המשוואה. הסבירו.

$$(x + 6)(x + 7) - (x + 5)(x + 8) = 2$$

5. א. בכל תרגיל מעורבים ארבעה מספרים עוקבים. בדקו את נכונות החישובים.

$$5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 2 + 3 + 4 + 5$$

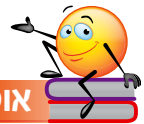
$$21 \cdot 20 - 19 \cdot 18 = 18 + 19 + 20 + 21$$

ב. כתבו דוגמה נוספת לאותה חוקיות ובדקו נכונות.

ג. כתבו הכללה לחוקיות שמצאתם. הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.



אוסף משימות



1. א. בדקו את נכונות השוויונות הבאים:

$$10^2 - 9^2 = 10 + 9$$

$$22^2 - 21^2 = 21 + 22$$

$$88^2 - 87^2 = 88 + 87$$

ב. כתבו דוגמה נוספת לאותה חוקיות, ובדקו נכונות.
ג. כתבו הכללה לחוקיות שמצאתם. הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.



2. בכל סעיף נתון סכום של זוג מספרים עוקבים.

כתבו כל סכום כהפרש ריבועים של שני מספרים עוקבים (ראו משימה 1).

א. $8 + 7$ ב. $16 + 15$ ג. $75 + 74$



3. בכל סעיף כתבו את המספר הנתון כהפרש ריבועים של שני מספרים עוקבים (ראו משימה 1).

א. 7 ב. 25 ג. 47



4. לפניכם רשימת מספרים: 9, 14, 17, 25, 36

א. אילו מספרים אפשר לכתוב כהפרש ריבועים של שני מספרים עוקבים?
ב. כתבו את המספרים שבחרתם כהפרש ריבועים של שני מספרים עוקבים.



5. א. בדקו את נכונות השוויונות.

$$(2^2 + 5^2) - (3^2 + 4^2) = 4$$

$$(8^2 + 11^2) - (9^2 + 10^2) = 4$$

ב. כתבו דוגמה נוספת לאותה חוקיות ובדקו נכונות.
ג. כתבו הכללה לחוקיות שמצאתם. הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.



6. א. בדקו את נכונות השוויונות.

$$5^2 - 4 \cdot 6 = 1$$

$$9^2 - 8 \cdot 10 = 1$$

$$11^2 - 10 \cdot 12 = 1$$

ב. כתבו דוגמה נוספת לאותה חוקיות ובדקו נכונות.
ג. כתבו הכללה לחוקיות שמצאתם. הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.

שיעור 3. אלגברה וגאומטרייה

הוכחות בעזרת שרטוטים



טענה: הסכום של מספר חיובי והמספר ההופכי לו

הוא מספר גדול מ-2 או שווה ל-2.

$$\text{כלומר, לכל } x > 0 \text{ מתקיים: } x + \frac{1}{x} \geq 2$$

בחרו מספרים חיוביים כרצונכם ובדקו אם הטענה מתקיימת.
נסו להסביר מדוע הטענה נכונה.

נוכיח טענות אלגבריות בעזרת שרטוטים.

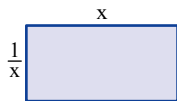
במשימות 1 ו-2 נתייחס לטענה ממשימת הפתיחה.

1. נוכיח בעזרת שרטוט את האי-שוויון ממשימת הפתיחה.

א. בשרטוט מלבן שאורכי צלעותיו x ו- $\frac{1}{x}$ (x ביחידות אורך, $x > 0$).

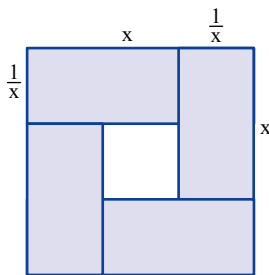
יוכי אמר: לכל המלבנים האלה אותו שטח.

האם **יוכי** צודק? אם כן, מהו שטח המלבן? אם לא, מצאו מלבנים מתאימים בעלי שטחים שונים.



ב. נצמיד ארבעה מלבנים זהים כאלו, כמו בשרטוט.

איזו צורה נוצרה בעקבות הצמדת המלבנים? הסבירו.



ג. כתבו אי-שוויון המתאר את הטענה: שטח הריבוע החיצוני גדול מסכום השטחים של ארבעת המלבנים.

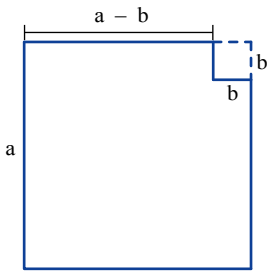
ד. הסבירו את הקשר בין האי-שוויון שכתבתם בסעיף ג למשימת הפתיחה.

2. מהו סכום המספרים כאשר מתקיים $x = \frac{1}{x}$?

שרטטו שרטוט מתאים וכתבו הכללה מתאימה.



מבט גאומטרי על נוסחת הכפל



3. נוכיח בעזרת שרטוט את נוסחת הכפל המקוצר: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

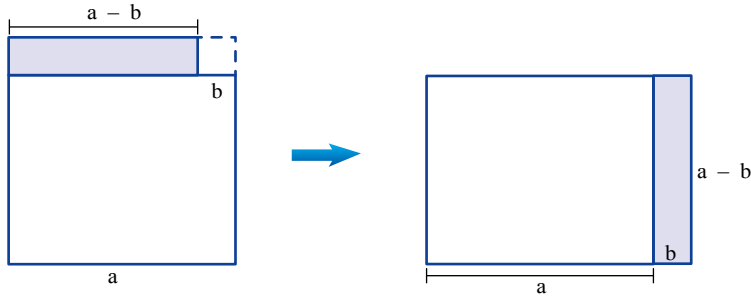
א. תנו דוגמאות מתאימות לשוויון זה.

ב. בשרטוט ריבוע שאורך צלעו a והסירו ממנו ריבוע קטן,

שאורך צלעו b (b < a) ביחידות אורך).

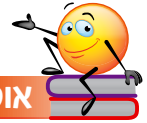
אילו ערכים מתאימים ל-a ואילו ערכים מתאימים ל-b לפי השרטוט?

ג. גזרו את המלבן הצבוע והצמידו אותו לצד הריבוע הגזור, כמו בשרטוט.



הביעו את שטח המשושה המקורי (שלפני הגזירה) ואת שטח המלבן שהתקבל (לאחר גזירה והצמדה) בעזרת a ו-b.

ד. הסבירו את הקשר בין נוסחת הכפל המקוצר שבתחילת המשימה ובין שטחי הצורות שבשרטוט.



אוסף משימות



1. א. בדקו אם השוויונות הבאים מתקיימים:

$$(2 + 5)^2 \geq 4 \cdot 2 \cdot 5$$

$$(7 + 3)^2 \geq 4 \cdot 7 \cdot 3$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$

ב. כתבו דוגמאות נוספות לאותה חוקיות.

ג. כתבו הכללה לחוקיות המתבטאת בשוויונות הנתונים.

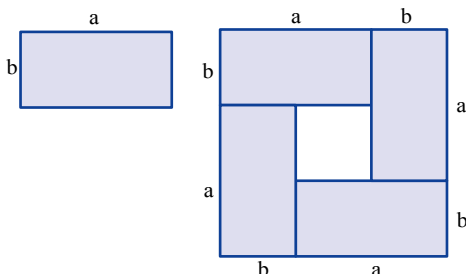
ד. נוכיח את הטענה בעזרת שרטוט.

בשרטוט מלבן שאורכי צלעותיו a ו-b

($a > 0$, $b > 0$, b ו-a ביחידות אורך).

נצמיד ארבעה מלבנים זהים כאלו, כמו בשרטוט.

איזו צורה נוצרה בעקבות הצמדת המלבנים? הסבירו.



ה. כתבו אי-שוויון המתאר את הטענה: שטח הריבוע הייצוני גדול מסכום השטחים של ארבעת המלבנים.

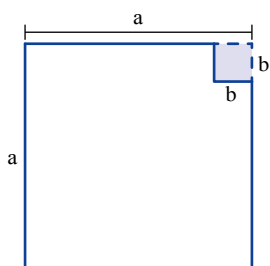
ו. הסבירו את הקשר בין האי-שוויון שכתבתם בסעיף ה להכללה שכתבתם בסעיף ג.

ז. האם האי-שוויון מתקיים כאשר $a = b$?

שרטטו שרטוט מתאים וכתבו הכללה מתאימה.



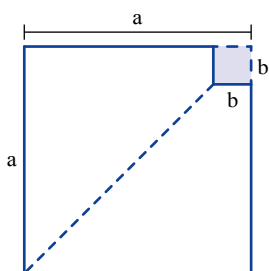
2. נוכיח בעזרת שרטוט (בדרך נוספת) את נוסחת הכפל המקוצר $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ($a > b > 0$).



א. תנו דוגמאות מתאימות לשוויון זה.

ב. בשרטוט ריבוע שאורך צלעו a, והסירו ממנו ריבוע קטן שאורך צלעו b (a ו-b ביחידות אורך).

אילו ערכים מתאימים ל-a, ואילו ערכים מתאימים ל-b לפי השרטוט?



ג. העבירו אלכסון במשושה כמו בשרטוט.

איתי אמר: האלכסון מחלק את המשושה לשני טרפזים ישרי-זווית חופפים. הסבירו את דבריו של איתי.

ד. הביעו את שטח המשושה המקורי ואת שטחי שני הטרפזים בעזרת a ו-b.

ה. הסבירו את הקשר בין נוסחת הכפל המקוצר שבתחילת המשימה ובין שטחי הצורות.



3. באוסף המשימות של השיעור הקודם הוכחתם טענה: $(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$.

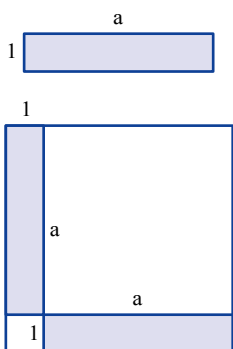
א. בחרו מספרים חיוביים והראו שהטענה מתקיימת.

ב. נוכיח טענה זו בעזרת שרטוט.

בשרטוט מלבן שאורך צלע אחת שלו a ס"מ ($a > 0$) ואורך הצלע השנייה 1 ס"מ. נצמיד בקדקודיהם שני מלבנים זהים כאלו ונשלים לריבוע, כמו בשרטוט.

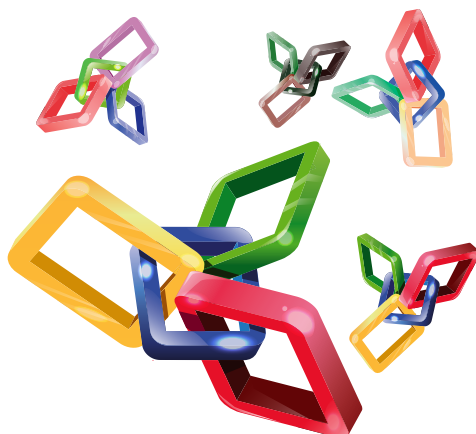
הביעו את שטח הריבוע החיצוני ואת שטחי המלבנים

והריבועים הפנימיים בעזרת a ו-b.



ג. הסבירו את הקשר בין השוויון שבפתיחת המשימה ובין

שטחי המרובעים שבשרטוט.





שומרים על כושר

משוואות ריבועיות

1. פתרו את המשוואות.

א. $x^2 - 4x + 3 = 0$

ב. $2x^2 - 5x = 0$

ג. $-x^2 + 3x - 2 = 0$

ד. $(x + 2)(x - 5) = 0$

ה. $(x - 2)^2 - x(x + 1) = 0$

ו. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

ז. $(x + 6)(2x - 1) = 0$

ח. $(x + 4)(x - 2) - x^2 = 0$

2. פתרו את המשוואות וסדרו את האותיות המתאימות לתוצאות על ציר מספרים כמו זה שלפניכם.

ל. $x^2 + 4x - 5 = 0$

א. $(x - 12)(x - 5) = 0$

ג. $x^2 + 28 = 11x$

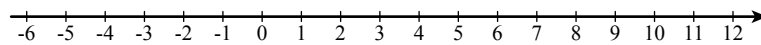
א. $\frac{x-9}{3} = 0$

ק. $x \neq 9, \frac{3}{x-9} = 0$

י. $x(x^2 - 5x - 24) = 0$

מ. $(x + 2)(2x - 22) = 0$

י. $x \neq -4, \frac{x^2 + 3x - 18}{x + 4} = 0$



3. פתרו את המשוואות.

א. $x^2 - 2x - 4 = x + 6$

ב. $(x + 2)^2 = 20 - x^2$

ג. $46 - 5(8 - x) = x^2$

ד. $2x^2 - 2x = (x + 3)(x - 10)$

4. בחרתי מספר. הוספתי למספר 4. החסרתי 2 מהמספר שבחרתי. כפלתי את התוצאות שקיבלתי בשני השלבים הקודמים וקיבלתי 72.

סמנו את המספר שבחרתי ב- x .

א. אילו ערכים מתאימים ל- x לפי תנאי הבעיה? הסבירו.

ב. איזה מספר בחרתי? כמה אפשרויות יש? הסבירו.

5. שטח המלבן שבשרטוט 374 סמ"ר.

(השרטוט הוא להדגמה, מידות האורך נתונות בס"מ, $x > 0$).

א. אילו ערכים מתאימים ל- x לפי תנאי הבעיה? הסבירו.

ב. חשבו את אורכי צלעות המלבן ואת היקפו.

6. אורך הצלע הארוכה של מלבן גדול ב-3 ס"מ מכפליים אורך הצלע הקצרה.

שטח המלבן שווה ל-119 סמ"ר.

א. אילו ערכים מתאימים לאורכי צלעות המלבן?

ב. מצאו את אורכי צלעות המלבן.

