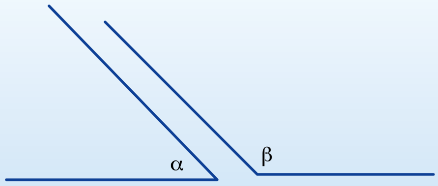
יחידה 32: יחס סדר והוכחות בדרך השלילה

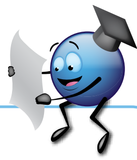
שיעור 1. זווית חיצונית למשולש

נתונות שתי זוויות α ו- β.



האם אפשר לבנות משולש, כך ש- α ו- β הן שתיים מזוויותיו החיצוניות?

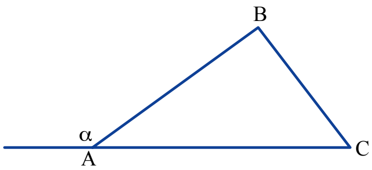
נחקור קשרים בין זווית פנימית במשולש לזוויות חיצוניות למשולש.



תזכורת

זווית הצמודה לאחת מזוויות המשולש נקראת **זווית חיצונית למשולש.**

לדוגמה: בשרטוט α היא זווית חיצונית למשולש ABC.



1. בכל סעיף שַרטטו משולש מתאים.

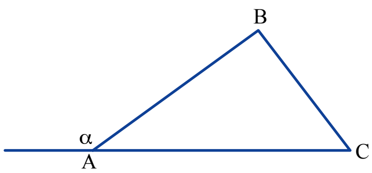
א. הזווית החיצונית גדולה מהזווית הפנימית הצמודה לה.

ב. הזווית החיצונית שווה בגודלה לזווית הפנימית הצמודה לה.

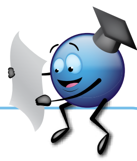
ג. הזווית החיצונית קטנה מהזווית הפנימית הצמודה לה.

2. א. *משפט* זווית חיצונית למשולש שווה בגודלה לסכום הגדלים של שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

רִשמו מה נתון ומה צריך להוכיח במשפט והוכיחו.



ב. **מסקנה:** זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה. הַסבירו את המסקנה.



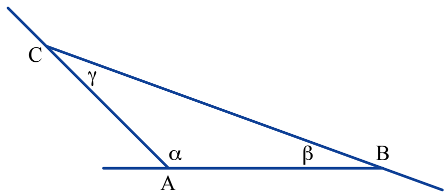
משפט זווית חיצונית למשולש שווה בגודלה לסכום הגדלים של שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

מסקנה מהמשפט: זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה.

3. במשולש ABC משורטטת זווית חיצונית אחת ליד כל קדקוד.

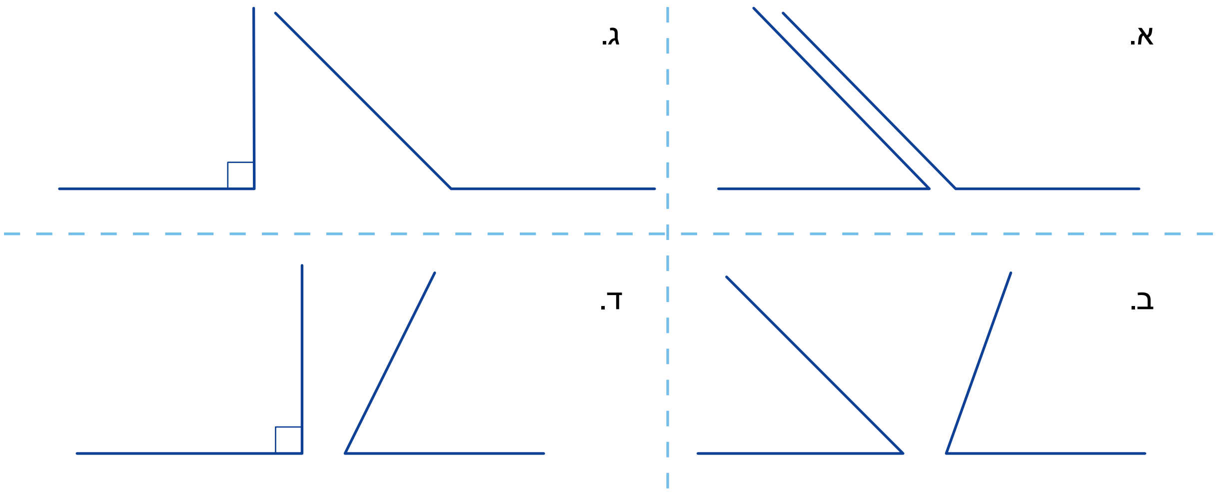
א. בַּטאו כל זווית חיצונית באמצעות הזווית הפנימית הצמודה לה.

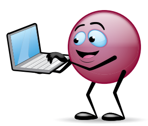
ב. מִצאו את סכום הגדלים של שלוש הזוויות החיצוניות.



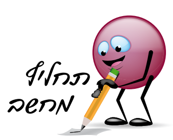
4. נחזור למשימת הפתיחה ונרחיב אותה.

בכל סעיף קִבעו אם שתי הזוויות המשורטטות, יכולות להיות שתי זוויות חיצוניות לאותו משולש. נַמקו.

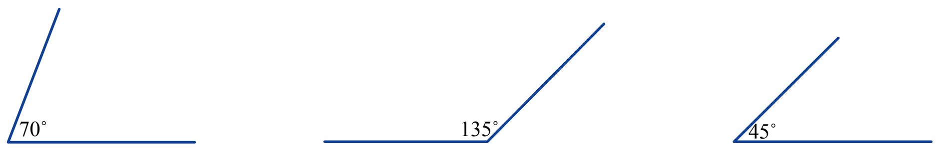




5. באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות באמצעות מחשב", תמצאו את הפעילות "משולש לפי זוויות חיצוניות". בפעילות תבנו משולש לפי זוויות חיצוניות נתונות וצלע נתונה. בַּצעו את הפעילות לפי ההוראות.



6. נתונות שלוש זוויות.



א. רק שתיים מהזוויות האלה יכולות להיות זוג זוויות חיצוניות לאותו משולש. אילו הן? הַסבירו.

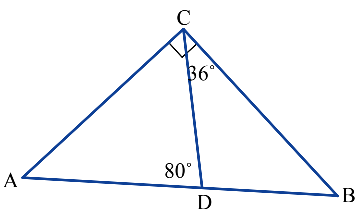
ב. בְּנו ΔABC כך ששתי הזוויות החיצוניות הן בגודל הזוויות החיצוניות שבחרתם בסעיף א.

אוסף משימות

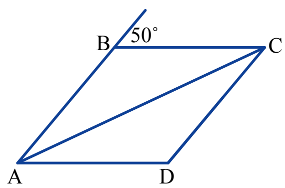
באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות באמצעות מחשב", תמצאו משימות חלופיות לחלק מהמשימות שבאוסף זה. המשימות מסומנות ב- *, מתחתן רשום שם המשימה החלופית באתר.

1. בכל סעיף חַשבו את הגדלים של כל הזוויות.

א.

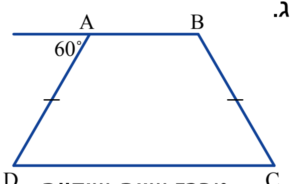


ב.



ABCD מעוין

ג.



טרפז שווה-שוקיים

2. במשימה מתייחסים לזווית חיצונית אחת ליד כל קדקוד של המשולש.
חַשבו את הגדלים של זוויות המשולש, אם אפשר. אם אי-אפשר הַסבירו.

א. המשולש ישר-זווית, ואחת מזוויותיו החיצוניות בת $125°$.

ב. המשולש בעל זווית אחת בת $42°$ וזווית חיצונית אחת בת $80°$.

ג. המשולש בעל זווית חיצונית אחת בת $95°$ וזווית חיצונית שנייה בת $112°$.

ד. המשולש בעל זווית אחת בת $140°$ וזווית חיצונית אחת בת $40°$.

3. במשימה מתייחסים לזווית חיצונית אחת ליד כל קדקוד של המשולש.
קִבעו אם הטענות נכונות, והַסבירו.

א. אם למשולש יש זווית חיצונית קהה, אז המשולש חד-זווית.

ב. אם למשולש יש שתי זוויות חיצוניות קהות, אז המשולש חד-זווית.

ג. אם למשולש יש שלוש זוויות חיצוניות קהות, אז המשולש חד-זווית.

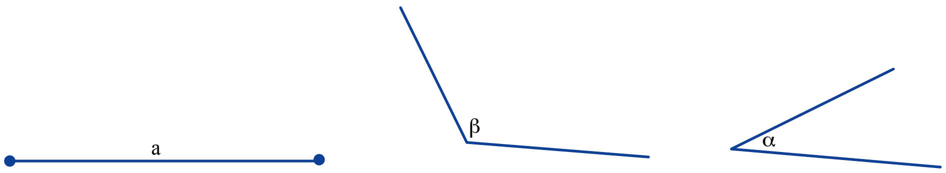
4. במשימה מתייחסים לזווית חיצונית אחת ליד כל קדקוד של המשולש.
קִבעו אם הטענות נכונות, והַסבירו.

א. סכום הגדלים של שתי זוויות חיצוניות למשולש **שווה** ל- $180°$.

ב. סכום הגדלים של שתי זוויות חיצוניות למשולש **גדול** מ- $180°$.

ג. סכום הגדלים של שתי זוויות חיצוניות למשולש **קטן** מ- $180°$.

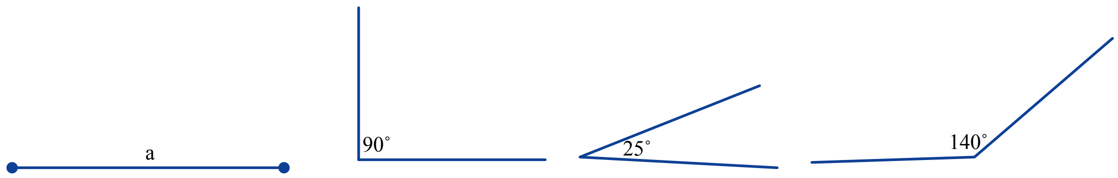
5*. נתונות זוויות α ו- β, וקטע a.



בְּנו ΔABC שבו אורך הצלע BC כאורך הקטע a, גודל $\sphericalangle B$ כגודל אחת הזוויות הנתונות וגודל הזווית החיצונית בקדקוד C כגודל הזווית הנתונה השנייה.
קִבעו תחילה איזו משתי הזוויות היא הזווית הפנימית ואיזו הזווית החיצונית, והַסבירו.

שם המשימה החלופית באתר: "זווית פנימית, זווית חיצונית וצלע"

6*. נתונות שלוש זוויות וקטע. שתיים מהזוויות האלה הן זוויות חיצוניות למשולש ABC.

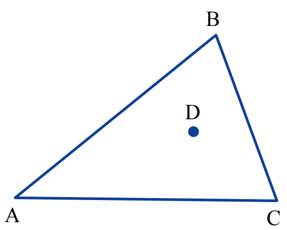


א. רק שתיים מהזוויות האלה יכולות להיות שתי זוויות חיצוניות לאותו משולש. אילו הן? הַסבירו.

ב. בְּנו ΔABC שבו אורך הצלע BC כאורך הקטע a, ושתי הזוויות החיצוניות בקדקודים B ו- C הן בגדלים של הזוויות החיצוניות שבחרתם בסעיף א.
כמה משולשים המתאימים לנתונים אפשר לבנות? הַסבירו.

שם המשימה החלופית באתר: "שתי זוויות חיצוניות וצלע"

7. נתיב D נקודה כלשהי בתוך משולש ABC.

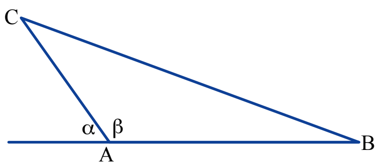


האם $\sphericalangle ADC$ גדולה מ- $\sphericalangle B$, קטנה מ- $\sphericalangle B$, או שווה בגודלה ל-$\sphericalangle B$?

הוכיחו.

(**רמז:** שַׂרטטו ישר דרך הנקודות B, D.)

8. נתיב משולש ABC.



α זווית חיצונית הצמודה ל- $\sphericalangle CAB$

בכל סעיף קִבעו: $>$, $<$, $=$ ונַמקו.

א. $\alpha \bigcirc \sphericalangle B + \sphericalangle C$ ב. $\alpha \bigcirc \sphericalangle B$ ג. $\alpha \bigcirc \sphericalangle C$

9. נתון משולש ABC

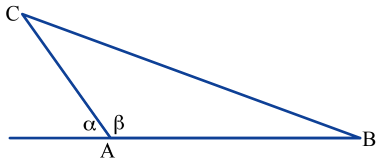
α זווית חיצונית הצמודה ל- $\sphericalangle A$

קִבעו נכון או לא נכון ונַמקו.

א. $\alpha + \beta = 180°$

ב. $\alpha + \sphericalangle B = 180°$

ג. $\alpha = \sphericalangle B + \sphericalangle C$



10. נתון במשולש ABC

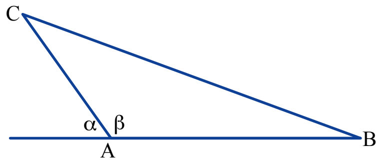
α זווית חיצונית הצמודה ל- $\sphericalangle A$

קִבעו נכון או לא נכון ונַמקו.

א. $\beta > 180° - \alpha$

ב. $180° + \beta = \sphericalangle B + \sphericalangle C$

ג. $\alpha - \sphericalangle B = \sphericalangle C$



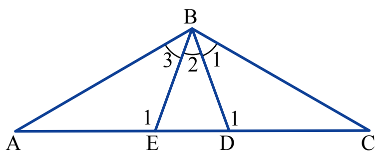
11. נתון משולש ABC

$\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_3$

$\sphericalangle D_1 = \sphericalangle E1$

א. **הוכיחו**: משולש BED שווה-שוקיים

ב. מהו סוג המשולש ABC? **הוכיחו**.



12. נתון $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_3$

$\sphericalangle B_1 = \alpha$

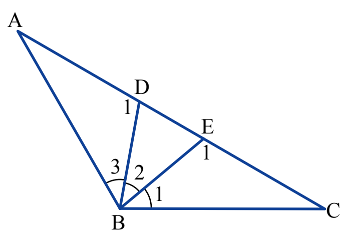
$\sphericalangle D_1 = \sphericalangle E_1$

א. רק אחד מהמקרים הבאים אפשרי. איזה הוא? הַסבירו.

(1) $\sphericalangle E_1 = 2\alpha$ (2) $\sphericalangle E_1 = 1.5\alpha$ (3) $\sphericalangle E_1 = 2.5\alpha$

ב. מהו הערך של α המתאים למקרה האפשרי?

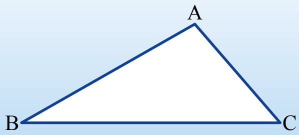
ג. חַשבו את הגדלים של זוויות המשולש ABC.



שיעור 2. יחס סדר בין אורכי צלעות של משולש לגודל זוויתיו

נתון: $AB \neq AC$

האם אפשר להסיק: $\sphericalangle C \neq \sphericalangle B$?

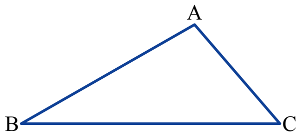


נעסוק בקשרים בין אורכי צלעות במשולש ובין גודל זוויותיו.

1. נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה.

נתון $AB \neq AC$

צ"ל $\sphericalangle B \neq \sphericalangle C$



הוכחה: נניח שהמשפט **אינו נכון**, כלומר: $\sphericalangle C = \sphericalangle B$

א. הַסבירו מדוע הנחה זו היא בסתירה לנתון.

ב. האם אפשר להסיק מכך: $\sphericalangle C \neq \sphericalangle B$?

משפט אם במשולש שתי צלעות **שונות** באורכן, אז הזוויות שמולן **שונות** בגודלן.

במשימה 1 הוכחנו משפט זה **בדרך השלילה**.

בהוכחה בדרך השלילה עובדים לפי השלבים הבאים:

- בודקים את האפשרות שהמשפט **אינו** נכון.
- בודקים מה התוצאות של אפשרות כזו.
- אם תוצאה כלשהי מובילה לסתירה, אז מסיקים שההנחה (שהמשפט **אינו** נכון) אינה נכונה.

דרך ההוכחה הזו נקראת **הוכחה בדרך השלילה** כי אנו שוללים את האפשרות שהמשפט **אינו** נכון.

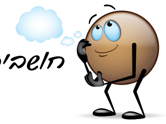
2. בכל סעיף קִבעו אם הטענה הרשומה נכונה **והוכיחו**.

א. אם במשולש שתי צלעות שונות באורכן, אז המשולש אינו שווה-שוקיים.

ב. אם במשולש שתי זוויות שונות בגודלן, אז הצלעות מול הזוויות האלה שונות באורכן.

ג. אם במשולש שתי זוויות שונות בגודלן, אז המשולש אינו שווה-שוקיים.

ד. אם במשולש כל הצלעות שונות באורכן, אז כל הזוויות במשולש שונות זו מזו בגודלן.

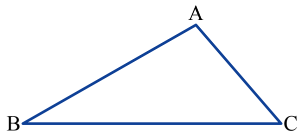


חושבים על...

3. במשימה 1 הוכחנו שבמשולש מול צלעות **שונות** באורכן נמצאות זוויות **שונות** בגודלן.
ננסח כמשפט ונוכיח כי במשולש מול הצלע הארוכה יותר נמצאת הזווית הגדולה יותר.

משפט

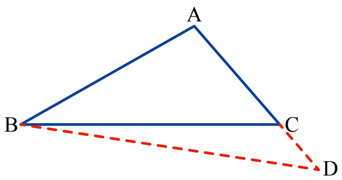
אם במשולש צלע אחת **ארוכה** מצלע שנייה, אז הזווית שמול הצלע הארוכה יותר **גדולה** מהזווית שמול הצלע הקצרה יותר.



נתון $AB > AC$

צ"ל $\sphericalangle C > \sphericalangle B$

הוכחה: הַעתיקו את השרטוט, הַמשיכו את AC עד נקודה D כך ש: $AB = AD$, וְחַברו בקו את D עם B.

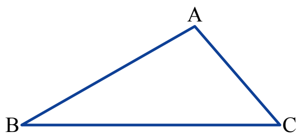


א. לפניכם ההוכחה. הוסיפו נימוקים.

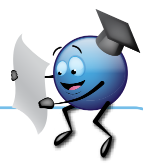
טענה	נימוק
$\sphericalangle D = \sphericalangle ABD$	______
$\sphericalangle ACB > \sphericalangle D$	______
$\Downarrow$	
$\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABD$	
$\sphericalangle ABD > \sphericalangle ABC$	
$\Downarrow$	
$\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABC$	______

ב. נַסחו משפט הפוך למשפט שהוכחתם בסעיף א.

ג. רִשמו מה נתון ומה צריך להוכיח במשפט ההפוך, והוכיחו.
(**רמז:** ההוכחה בדרך השלילה.)



נניח שהמשפט **אינו** נכון. כלומר $AB = AC$ או $AB < AC$
הַסבירו מדוע האפשרויות האלה סותרות את הנתון.



אם במשולש צלע אחת **ארוכה** מצלע שנייה, אז הזווית מול הצלע הארוכה יותר **גדולה** מהזווית מול הצלע הקצרה יותר.	*הפוכים זה לזה*	אם במשולש זווית אחת **גדולה** מזווית שנייה, אז הצלע מול הזווית הגדולה יותר **ארוכה** מהצלע מול הזווית הקטנה יותר.

4. *משפט* במשולש ישר-זווית האורך של כל ניצב קטן מאורך היתר.
בעבר הוכחנו משפט זה באמצעות משפט פיתגורס.
הוכיחו את המשפט שנית, כמסקנה מהמשפטים שהוכחנו כאן.

5. באתר ״מתמטיקה משולבת״, במדור ״פעילויות באמצעות מחשב״, תמצאו את הפעילות ״צלעות מול זוויות במשולש״. בַּצעו את הפעילות לפי ההוראות.

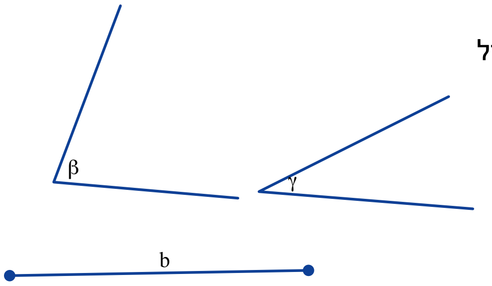
תרגול מחשב

6. נתון קטע b ושתי זוויות β ו- γ.
בונים משולש ABC שבו אורך הצלע AC כאורך הקטע b, גודל הזווית B כגודל הזווית β, וגודל הזווית C כגודל הזווית γ.

א. שַׂרטטו שרטוט להדגמת הנתונים.

ב. בְּנו את המשולש ותָארו את הבנייה.

ג. איזו צלע ארוכה יותר:
הצלע מול זווית β או הצלע מול זווית α? נַמקו.

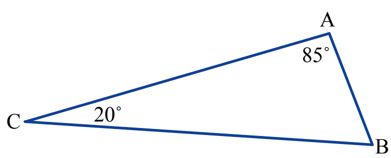


אוסף משימות

באתר ״מתמטיקה משולבת״ במדור ״פעילויות מחשב״, תמצאו משימות חלופיות לחלק מהמשימות שבאוסף זה. המשימות מסומנות ב- *, מתחתן רשום שם המשימה החלופית באתר.

השרטוטים באוסף המשימות הם להדגמה, ומידות האורך נתונות בס״מ.

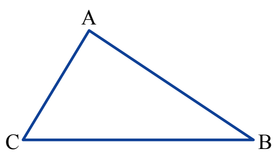
1. אורכי הצלעות במשולש ABC הם: 10 ס״מ, 3.43 ס״מ, 9.7 ס״מ.
זַהו את אורכה של כל צלע.



2. *נִתּוּן* משולש ABC שבו מתקיים: CB > AB > CA

א. מהי הזווית הגדולה במשולש? נַמקו.

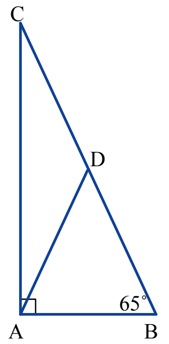
ב. מהי הזווית הקטנה במשולש? נַמקו.



3. נתון ΔABC שווה-שוקיים $(AB = AC)$

$\measuredangle A = 52°$

איזו צלע ארוכה יותר, הבסיס או השוק? נַמקו.



4. נתון AD תיכון ליתר במשולש ABC

$\measuredangle B = 65°$

א. חַשבו את הגדלים של כל הזוויות.

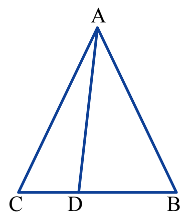
ב. מי גדול יותר, הניצב AB או התיכון AD. נַמקו.

ג. מי גדול יותר, הניצב AC או התיכון AD. נַמקו.

5. הגדלים של הזוויות במשולש שווה-שוקיים הם: $120°$, $30°$.

אורכי שתיים מצלעותיו 15 ס"מ ו- 8.66 ס"מ.

מה אורכה של הצלע השלישית? נַמקו.

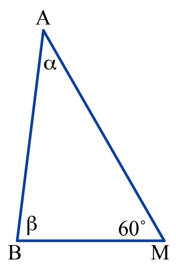


6. נתון ΔABC שווה-שוקיים

D נקודה כלשהי על הבסיס BC

א. האם $AD < AB$ או $AD > AB$ או $AD = AB$? **הוכיחו.**

ב. האם תשובתכם תשתנה אם D נמצאת על המשך BC, מימין ל-B? הַסבירו.

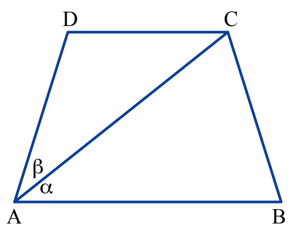


7. נתון $\measuredangle M = 60°$

$AB > BM$

האם $\beta = \alpha$? הַסבירו.

אם לא, איזו זווית גדולה יותר: α או β? **הוכיחו.**



8. נתון $AB \parallel DC$

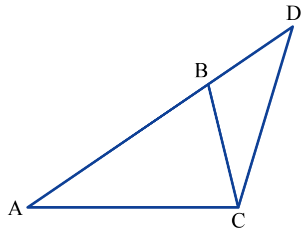
בכל סעיף בִּדקו אם אורך DC גדול, קטן או שווה לאורך AD. **הוכיחו.**

א. $\beta = \alpha$

ב. $\beta > \alpha$

9. א. נתון: $BC < AB$

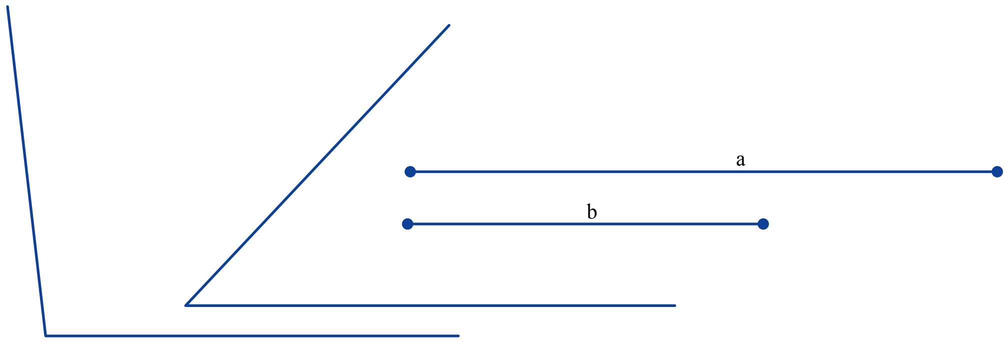
הוכיחו: $AD > DC$



ב. כִּתבו טענה הפוכה לזו שבסעיף א.

ג. האם הטענה שרשמתם בסעיף ב נכונה?
אם כן, הוכיחו. אם לא, שַרטטו דוגמה נגדית.

***10.** נתונים שני קטעים ושתי זוויות.



רוצים לבנות משולש ABC לפי אורכי שתי הצלעות הנתונים והגדלים של שתי הזוויות שמולן.

א. - שַרטטו שרטוט להדגמת הנתונים.
- איזו זווית צריכה להיות מול הצלע שאורכה a? הַסבירו. סַמנו אותה באות α.
- סַמנו את הזווית שמול הצלע b באות β.

ב. בְּנו את המשולש. (**רמז:** בנו תחילה את הזווית השלישית של המשולש.)

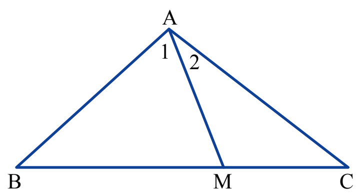
ג. בִּדקו אם הנתון שבו לא השתמשתם מתאים למה שהתקבל במשולש.

שם המשימה החלופית באתר "שתי צלעות ושתי זוויות"

11. נתון: M נקודה על קטע BC

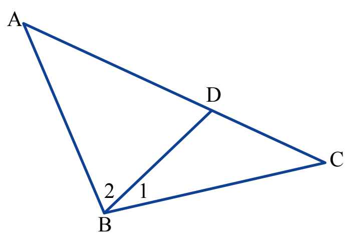
$BM = BA$

$\sphericalangle A_1 > \sphericalangle A_2$



הוכיחו: א. $AC > AM$ ב. $BC > AB$

12. נתון: $AD = AB$ (ראו שרטוט)



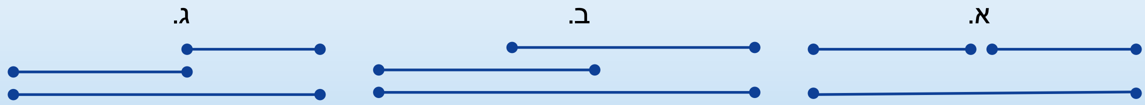
א. **הוכיחו**: $\sphericalangle B_2 > \sphericalangle B_1$

ב. האם אפשר להסיק כי $BC > DC$?
אם כן, הוכיחו. אם לא, שַרטטו דוגמה נגדית והַסבירו.

ג. האם אפשר להסיק כי $AD > DC$?
אם כן, הוכיחו. אם לא, שַרטטו דוגמה נגדית והַסבירו.

שיעור 3. צלעות במשולש

לפניכם שלושה מקבצים שבכל אחד מהם שלושה קטעים. לכל מקבץ נַסו לבנות, באמצעות סרגל ומחוגה, משולש שאורכי צלעותיו כאורכי כל אחד משלושת הקטעים הנתונים.

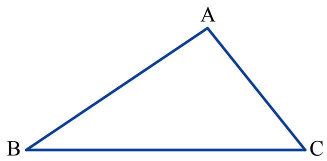


נעסוק בקשרים בין אורכי צלעות במשולש.

1. נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה. מאילו שלושה קטעים הצלחתם לבנות משולש? הַסבירו.

2. משפט סכום אורכי שתי צלעות במשולש גדול מאורך הצלע השלישית.

נוכיח משפט זה:

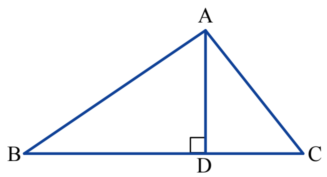


נתון ΔABC

צ"ל $AB + AC > BC$

הוכחה:

בניית עזר: $AD \perp BC$



א. רִשמו נימוקים, והַשלימו את ההוכחה:

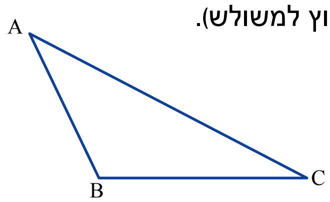
$BD < AB$ ______

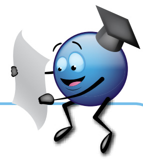
$CD < AC$ ______

$\Downarrow$

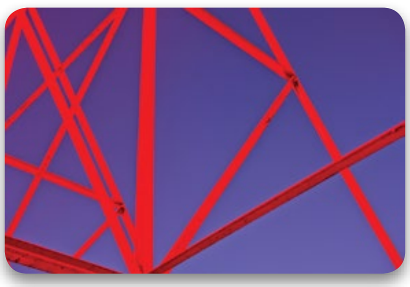
.
.
.

ב. בִּדקו אם $AB + AC > BC$ גם כשהמשולש קהה-זווית (והגובה עובר מחוץ למשולש).

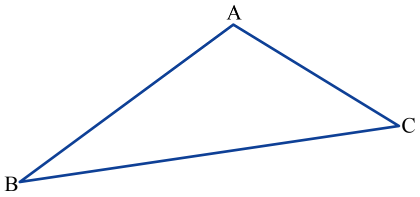




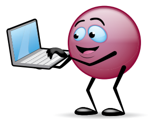
משפט סכום אורכי שתי צלעות במשולש גדול מאורך הצלע השלישית.



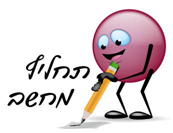
3. לפניכם טבלה. בכל שורה רשומים אורכי צלעות וגדלים של זוויות,
שמהם **אי-אפשר** לבנות משולש. נַמקו.
אורכי הצלעות נתונים בס״מ.
(המשולש בשרטוט מדגים איזו זווית נמצאת מול כל אחת מהצלעות.)



	BC	AC	AB	∢A	∢B	∢C
א.	5	10	17	38°	60°	82°
ב.	35	22	30	125°	30°	40°
ג.	30	18	14	100°	30°	50°
ד.	25	30	25	100°	40°	40°
ה.	18	18	30	30°	40°	110°

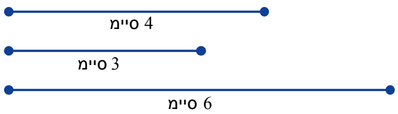


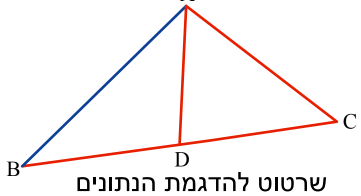
4. באתר ״מתמטיקה משולבת״, במדור ״פעילויות באמצעות מחשב״, תמצאו את הפעילות ״משולש לפי שתי צלעות ותיכון״. בַּצעו את הפעילות לפי ההוראות.



5. נתונים שלושה קטעים.
בְּנו משולש ABC כך שאורך שתיים מצלעותיו (BC ו- AC)
יהיה כאורך שניים מהקטעים הנתונים,
ואורך התיכון לצלע BC יהיה כאורך הקטע השלישי.

קִבעו תחילה איזה משלושת הקטעים הנתונים הוא
באורך הצלע BC. הַסבירו וסַמנו אותו ב- a,
ואז סַמנו את שני הקטעים האחרים ב- b ו- c.





שרטוט להדגמת הנתונים

אוסף משימות

באתר "מתמטיקה משולבת" במדור "פעילויות באמצעות מחשב" תמצאו משימה חלופית למשימה 7 שבאוסף זה. המשימה מסומנת ב- *, מתחתיה רשום שם המשימה החלופית באתר.

השרטוטים באוסף המשימות הם להדגמה, ומידות האורך נתונות בס"מ.

1. בכל סעיף נתונים אורכים של שלושה קטעים.
אילו משלושת הקטעים יכולים להיות צלעות של משולש?

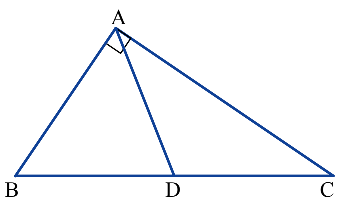
א. $18, 5, 15$ ב. $5, 6, 12$ ג. $12, 12, 4$ ד. $10, 10, 30$

2. נתונים האורכים (בס"מ) של 5 קטעים: 2, 2, 3, 4, 5
מִצאו אילו 3 קטעים יכולים להיות אורכי צלעות של משולש (רִשמו את כל הפתרונות האפשריים). הַסבירו.

3. א. במשולש שווה-שוקיים אורכי שתי צלעות הם: 14 ס"מ ו- 28 ס"מ.
איזו מהן הבסיס ואיזו השוק? הַסבירו.

ב. במשולש שווה-שוקיים אורכי שתי צלעות הם: 15 ס"מ ו- 7 ס"מ.
איזו מהן הבסיס ואיזו השוק? הַסבירו.

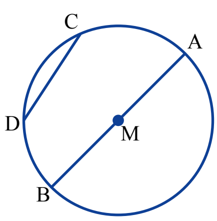
4. AD תיכון ליתר במשולש ישר-זווית ABC

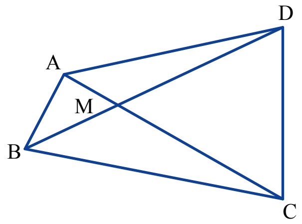


א. **הוכיחו:** $2AD = BC$
(**רמז:** השתמשו במשפט על התיכון ליתר במשולש ישר-זווית.)

ב. **הוכיחו:** $2AD < AB + AC$

5. **הוכיחו:** הקוטר הוא הארוך ביותר מכל המיתרים במעגל.
רִשמו תחילה מה נתון ומה צריך להוכיח.
(**רמז:** חברו את D ו- C עם מרכז המעגל.)

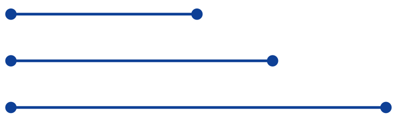




6. בשירטוט מרובע קמור ABCD.

א. **הוכיחו**: סכום אורכי האלכסונים גדול ממחצית היקף המרובע

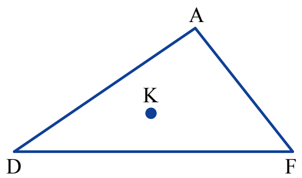
ב. **הוכיחו**: סכום אורכי האלכסונים קטן מהיקף המרובע



***7.** נתונים שלושה קטעים a, b ו- c.
בְּנו משולש שבו שתי צלעות תהיינה כאורך שניים מהקטעים הנתונים,
והגובה לצלע השלישית יהיה כאורך הקטע השלישי.

שַרטטו תחילה שרטוט להדגמת הנתונים וקִבעו איזה משלושת הקטעים הנתונים צריך להיות כאורך הגובה.
הַסבירו וסַמנו אותו ב- h.

שם המשימה החלופית באתר: ״משולש לפי שתי צלעות וגובה״



8. נתון K היא נקודה כלשהי בתוך משולש DFA

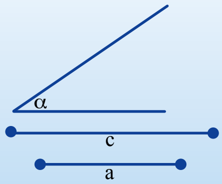
א. **הוכיחו**:
סכום המרחקים של נקודה K
מקדקודי המשולש גדול ממחצית היקף המשולש.

ב. בִּדקו אם הטענה נכונה, כאשר הנקודה K על אחת הצלעות.

ג. בִּדקו אם הטענה נכונה, כאשר הנקודה K מחוץ למשולש.

שיעור 4. משפט חפיפה חדש

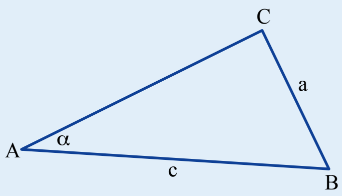
בונים משולש לפי אורכי שתיים מצלעותיו (a ו- c) וגודל הזווית מול אחת מהשתיים (α).
כמה משולשים שונים אפשר לבנות עם נתונים אלה?
שַׁרטטו משולש מדגים לכל אפשרות.



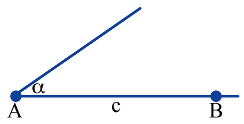
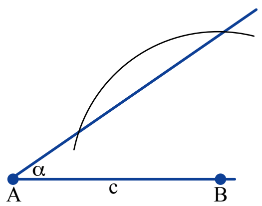
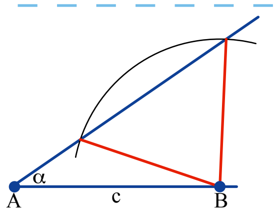
נחקור בנייה של משולש לפי אורכי שתי צלעות וגודל הזווית שמול אחת מהן.

במשימות 1 ו- 2 נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה.

1. יש לבנות משולש ABC (רְאו שרטוט מדגים) שבו:
- אורך הצלע AB כאורך הקטע הנתון c,
- אורך הצלע BC כאורך הקטע הנתון a,
- גודל הזווית A **שמול BC** כגודל הזווית α.



שרטוט מדגים

תיאור בנייה	בנייה
• מעתיקים את הקטע הנתון c על ישר ומסמנים את קצותיו ב- A ו- B.	
• מעתיקים את הזווית α בנקודה A על הקטע AB.	
• משרטטים קשת ברדיוס אורך הקטע a מהנקודה B.	
• מחברים את נקודות החיתוך עם B.	

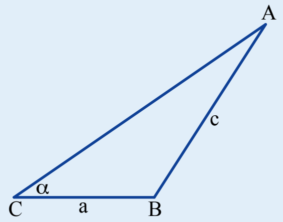
א. בַּצעו את הבנייה לפי התיאור.

ב. כמה משולשים קיבלתם? הַסבירו.

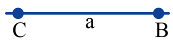
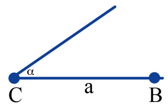
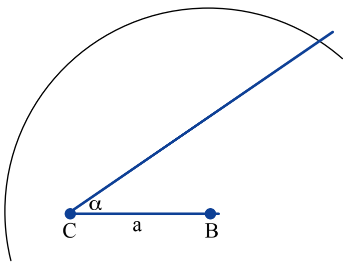
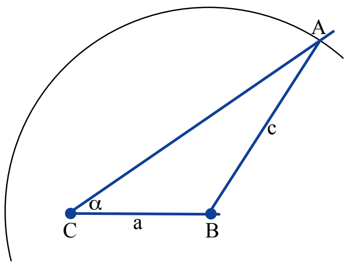
ג. איזו צלע גדולה יותר: הצלע **שמול** הזווית α או הצלע **שליד** הזווית α?

2. יש לבנות משולש ABC (רְאו שרטוט מדגים) שבו:

- אורך הצלע AB כאורך הקטע הנתון c,
- אורך הצלע BC כאורך הקטע הנתון a,
- גודל הזווית A **שמול** AB כגודל הזווית α.



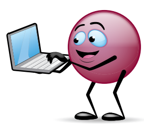
שרטוט מדגים

תיאור בנייה	בנייה
• מעתיקים את הקטע הנתון a על ישר ומסמנים את קצותיו ב- C ו- B.	
• מעתיקים את הזווית α בנקודה C על הקטע BC.	
• משרטטים קשת ברדיוס אורך הקטע c מהנקודה B.	
• מסמנים את נקודת החיתוך ב- A ומחברים עם B.	

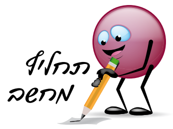
א. בַּצעו את הבנייה לפי התיאור.

ב. כמה משולשים קיבלתם?

ג. איזו צלע גדולה יותר: הצלע **שמול** הזווית α או הצלע **שליד** הזווית α?



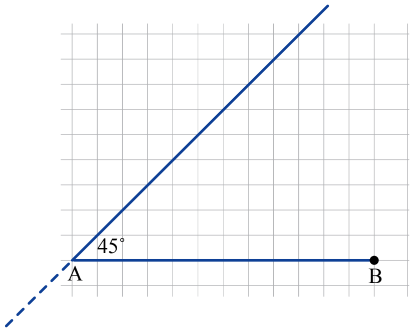
3. באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות באמצעות מחשב", תמצאו את הפעילות "משולש לפי שתי צלעות וזווית מול אחת מהן". בפעילות תחקרו מקרים שונים של בניית משולשים על פי נתונים כאלה.
בַּצעו את הפעילות לפי ההוראות.



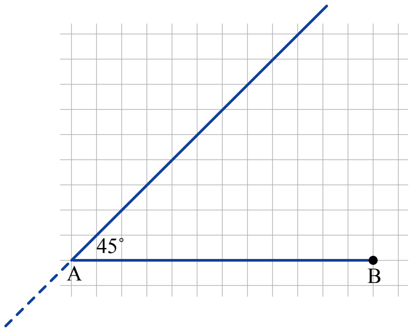
4. בכל סעיף משורטט קטע AB שאורכו 10 יחידות אורך משבצת, ו- $\sphericalangle A$ שגודלה $45°$.

א. הַעתיקו ושַרטטו קשת מנקודה B ברדיוס הנתון.
בִּדקו אם הקשת חותכת את שוק הזווית A, ואם כן, בכמה נקודות.

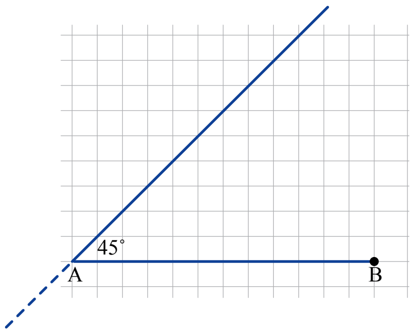
(i) קשת ברדיוס שאורכו 6 יחידות אורך משבצת



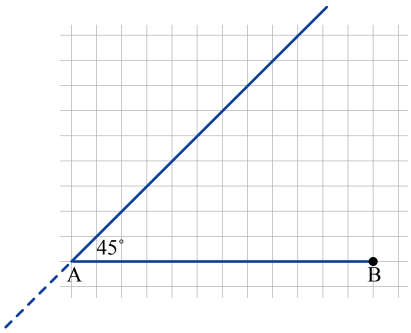
(iii) קשת ברדיוס שאורכו 12 יחידות אורך משבצת



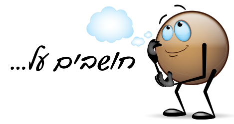
(ii) קשת ברדיוס שאורכו 10 יחידות אורך משבצת



(iv) קשת ברדיוס שאורכו 14 יחידות אורך משבצת

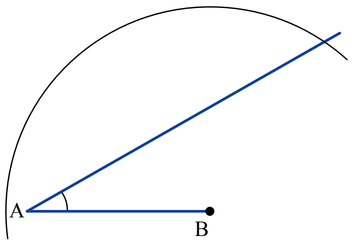


ב. בסעיפים שבהם יש נקודות חיתוך הַשלימו למשולשים וקִבעו כמה משולשים מתאימים לנתונים. הַסבירו.

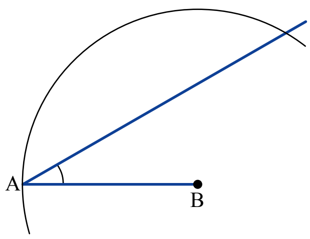


5. היעזרו בבניות שבצעתם ובשרטוטים כאן, בִּדקו והַסבירו:

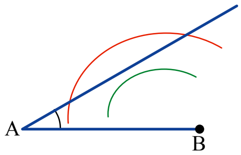
א. - כמה משולשים מתקבלים כשאורך הצלע מול הזווית **גדול** מאורך הצלע ליד הזווית?
- האם כל המשולשים הנבנים לפי נתונים אלה חופפים זה לזה?

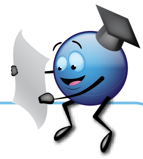


ב. - כמה משולשים מתקבלים כשאורך הצלע מול הזווית **שווה** לאורך הצלע ליד הזווית?
- האם כל המשולשים הנבנים לפי נתונים אלה חופפים זה לזה?



ג. - כמה משולשים יכולים להתקבל כשאורך הצלע מול הזווית **קטן** מאורך הצלע ליד הזווית?
- האם תמיד מתקבלים משולשים?
- האם מתקבלים משולשים חופפים זה לזה?





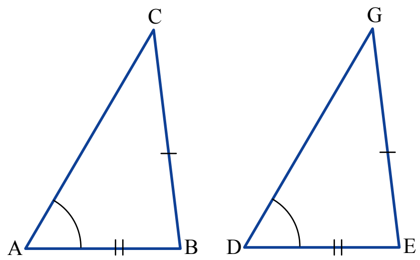
משפט חפיפה רביעי

אם בשני משולשים; שתי צלעות במשולש אחד שוות באורכן לשתי צלעות במשולש אחר,
והזווית שמול הצלע הארוכה מהשתיים במשולש האחד שווה בגודלה לזווית המתאימה לה במשולש האחר,
אז שני **המשולשים חופפים זה לזה**.

דוגמה: בשרטוט

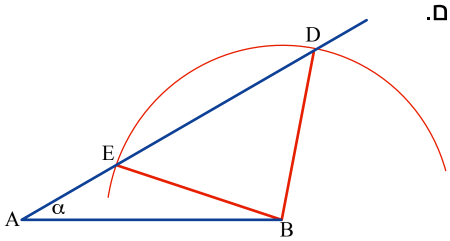
$BC > AB$
$GE > DE$
$BC = GE$
$AB = DE$
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle GDE$

לפי משפט חפיפה רביעי $\Delta ABC \cong \Delta DEG$

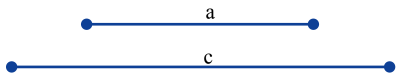


שימו לב! במשימות הקודמות ראינו שאם הזווית השווה בגודלן בשני המשולשים נמצאות **מול** הצלעות האחרות השווה באורכן, שהן הקצרות יותר מזוג הצלעות האחרות השווה באורכן, אז אפשר לבנות מהנתונים שני משולשים שונים. במקרה כזה המשולשים אינם בהכרח חופפים.

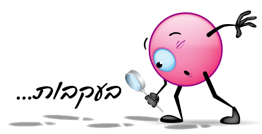
דוגמה: בשרטוט רואים כי אם הצלע מול הזווית α קטנה באורכה מהצלע AB שליד הזווית α, אז אפשר לבנות שני משולשים שונים: ΔABE ו- ΔABD **שאינם חופפים** למרות שוויון הנתונים.



6. א. נתונים הקטעים a ו- c.
בְּנו באמצעות סרגל ומחוגה משולש ישר-זווית שאורך אחד הניצבים שלו, a, ואורך היתר, c.

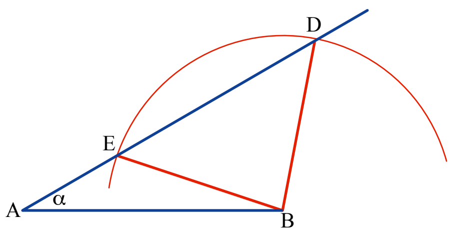


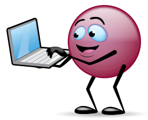
ב. בכיתה ח הכרתם משפט חפיפה מיוחד למשולשים ישרי-זווית:
משפט אם שני משולשים ישרי-זווית שווים באורך אחד הניצבים ובאורך היתר, אז המשולשים חופפים.
הַסבירו מדוע משפט זה הוא מקרה פרטי של משפט החפיפה הרביעי.



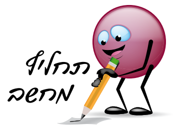
7. במשימה 5 ראינו שאם הזווית השווה בגודלן בשני המשולשים נמצאות מול הצלעות השוות באורכן, שהן הקצרות יותר מזוג הצלעות האחרות השוות באורכן, אז אפשר לבנות מהנתונים שני משולשים שונים (ΔADB ו- ΔAEB בשרטוט) ולכן במקרה זה המשולשים אינם חופפים.

הוכיחו: $\sphericalangle ADB < \sphericalangle AEB$

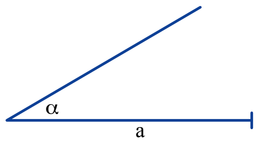




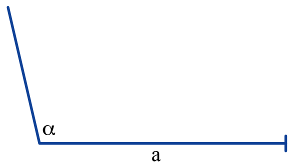
8. באתר ״מתמטיקה משולבת״, במדור ״פעילויות באמצעות מחשב״, תמצאו את הפעילות ״שתי צלעות נגדיות ושתי זוויות נגדיות שוות״.
בַּצעו את הפעילות לפי ההוראות.

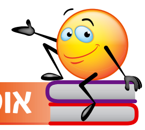


9. א. הַעתיקו את הצלע a עם הזווית α שלידה על שני דפים שקופים.
צְרו באמצעות 2 הדפים השקופים מרובעים שיש בהם 2 צלעות נגדיות שוות שאורכן a, ושתי זוויות נגדיות שוות שגודלן α.
האם התכונות מספיקות לקבלת מרובע בעל שם ידוע?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הַעתיקו את הדוגמה הנגדית שיצרתם.



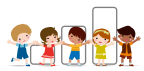
ב. חִזרו על הפעולות שביצעתם בסעיף א, כשנתונים הצלע a וזווית α קהה.
האם התכונות מספיקות לקבלת מרובע בעל שם ידוע?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הַעתיקו את הדוגמה הנגדית שיצרתם.



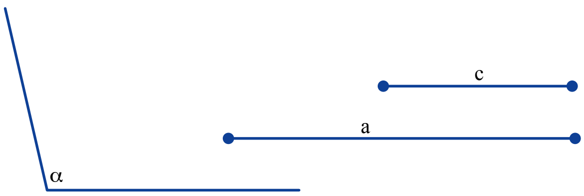


אוסף משימות

באתר ״מתמטיקה משולבת״, במדור ״פעילויות מחשב״, תמצאו משימה חלופית למשימה 2 שבאוסף זה.
המשימה מסומנת ב- *, מתחתיה רשום שם המשימה החלופית באתר.

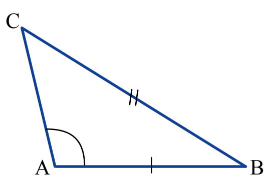


1. נתונים שני קטעים וזווית.



א. בְּנו ΔABC שבו אורך הצלע AB כאורך הקטע c, אורך הצלע CB כאורך הקטע a, וגודל הזווית A כגודל הזווית α.

ב. כמה משולשים שונים מתאימים לנתונים האלה? נַמקו.



שרטוט מדגים

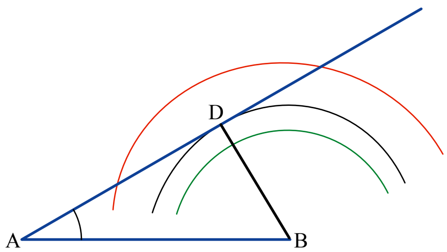
***2.** נתונים שני קטעים וזווית.

א. בְּנו ΔABC שבו אורך הצלע AB כאורך הקטע c, אורך הצלע CB כאורך הקטע a, וגודל הזווית A כגודל הזווית α.

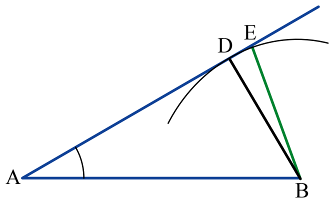
ב. כמה משולשים שונים מתאימים לנתונים האלה?

שם המשימה החלופית באתר: "צלע a, צלע c וזווית α".

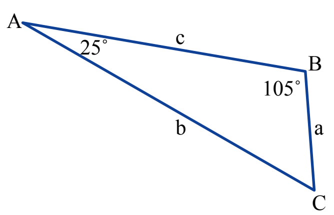
3. א. אפשר לשרטט קשת ברדיוס שארוך מרדיוס הקשת הירוקה וקצר מרדיוס הקשת האדומה, כך שהקשת תיגע בשוק הזווית בנקודה אחת D (ראו שרטוט).
שַׁערו: מהו סוג ΔABD? מִדדו את הזווית.
אם תרצו להוכיח זאת, תוכלו לקרוא את ההוכחה בסעיף הבא.



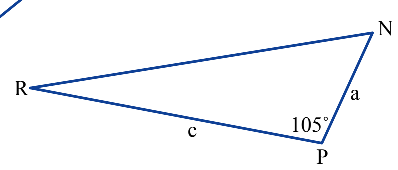
ב. לפי הבנייה הקטע BD הוא המרחק הקצר ביותר מהנקודה לישר. הַסבירו.
נוכיח ש- $\sphericalangle BDA$ היא זווית ישרה.
נניח שהזווית **אינה** זווית ישרה, אז אפשר לשרטט מהנקודה B אנך BE לישר AD, וייווצר משולש BED שבו BD היתר.
לפי משפט פיתגורס $BE > BD$, אבל BD הוא המרחק הקצר ביותר מהנקודה B לישר AD. לכן, ההנחה שהנחנו אינה נכונה, והזווית BDA היא זווית ישרה, ו- ΔADB הוא משולש ישר-זווית.



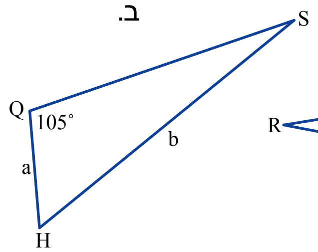
4. לפניכם ΔABC.
בכל סעיף נַמקו לפי איזה משפט חפיפה המשולש חופף ל- ΔABC.



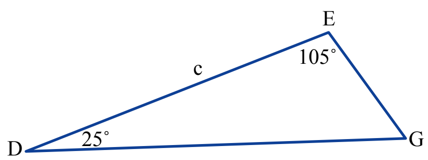
א.



ב.

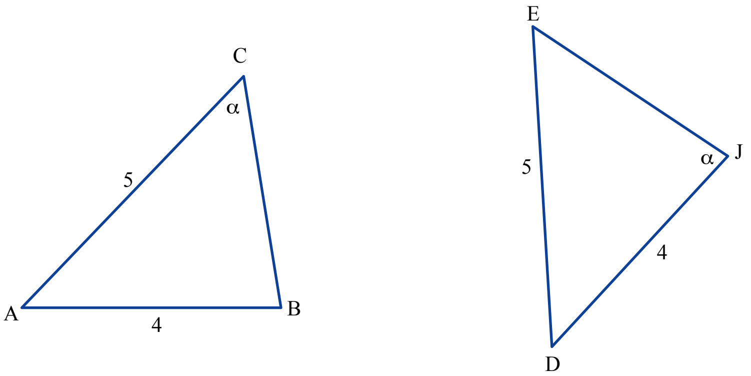


ג.

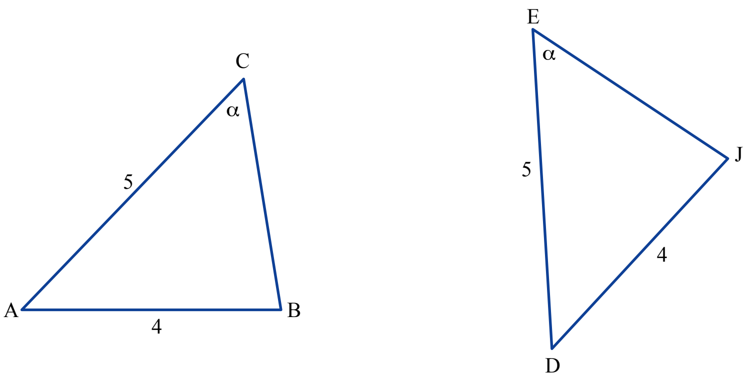


5. בכל סעיף קִבעו על-פי הנתונים הרשומים בשרטוטים, אם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים. נַמקו.
(השרטוטים הם להדגמה, ומידות האורך נתונות בס״מ.)

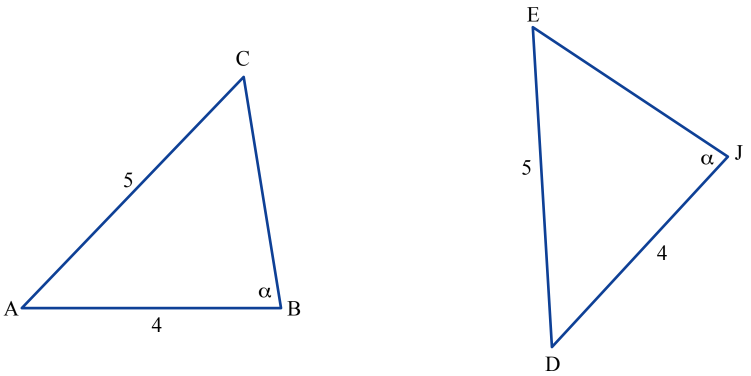
א.



ב.

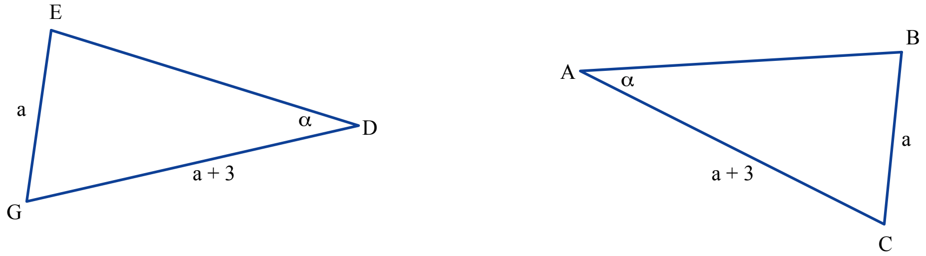


ג.

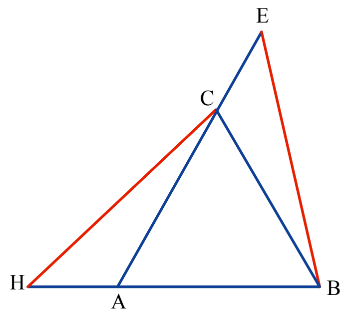


ד.

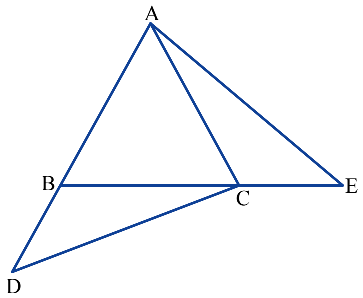
ה.



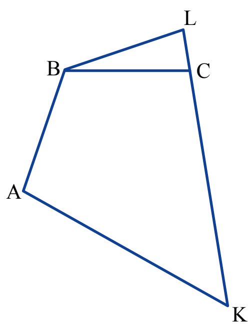
.6 נתון: ΔABC משולש שווה-צלעות
הנקודה H על המשך BA והנקודה E על המשך AC
$EB = HC$
צ"ל: $\sphericalangle H = \sphericalangle E$



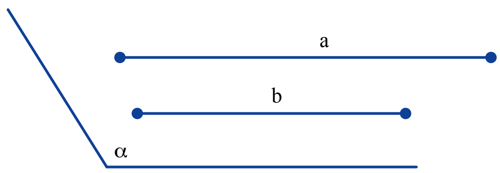
.7 נתון: ΔABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$
הֶאריכו את BC ואת AB כך ש: $CE = BD$
$AE = CD$
צ"ל: ΔABC שווה-צלעות
(**רמז:** הוכיחו תחילה $\Delta AEC \cong \Delta DCB$.)



.8 נתון: $\sphericalangle BCK = \sphericalangle BAK$
$BL = BC = BA$
צ"ל: א. $\sphericalangle BCK > 90°$
ב. המרובע ABCK דלתון



.9 בְּנו דלתון שאורך אחת מצלעותיו כאורך הקטע b,
אורך האלכסון הראשי כאורך הקטע הנתון a,
וגודל הזווית מול האלכסון הראשי כגודל הזווית α.
תָּארו את הבנייה.



.10 בְּנו דלתון שאורך אלכסונו הראשי כאורך הקטע הנתון a,
והזוויות שמול האלכסון הזה ישרות.
כמה דלתונים מתאימים לנתונים? הַסבירו.