

יחידה 11: זוגות של זוויות

שיעור 1. זוויות צמודות

נתבונן בתמרורים ובזוויות המופיעות בהם.



V



IV



III



II



I

הדר מיינה את התמרורים כך:

בקבוצה אחת שלושת התמרורים שמימין, ובקבוצה השנייה שני התמרורים שמשמאל. שערך: מה היו שיקולי המיון של הדר?

נלמד על זוויות צמודות.

1. לפניכם סקיצות של התמרורים ממשימת הפתיחה.



V



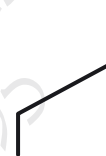
IV



III



II



I

א. הזווית המסומנת בקשת בתמרור האמצעי מורכבת משתי זוויות שביחד יוצרות זווית שטוחה. מצאו בכל סקיצה, זוג אחד של זוויות כאלה.

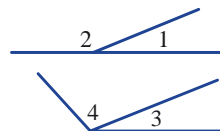
ב. ציירו שתי זוויות (שאינן ישרות) שביחד יוצרות זווית שטוחה.



הגדרה: קרן היוצאת מנקודה על ישר, יוצרת שתי זוויות הנקראות **זוויות צמודות**.

זוויות צמודות יוצרות ביחד זווית שטוחה.

צילמאות:



בשרטוט זוויות $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$ הן זוויות צמודות

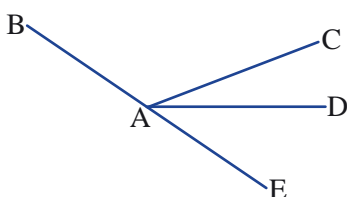
בשרטוט זוויות $\sphericalangle 3$, $\sphericalangle 4$ אינן זוויות צמודות

2. א. באילו מהסקיצות של התמרורים יש יותר מזוג אחד של זוויות צמודות?

ב. תארו בעזרת המושג "זוויות צמודות" את המיון של **הדר**.

3. א. זהו בשרטוט שתי זוויות צמודות.

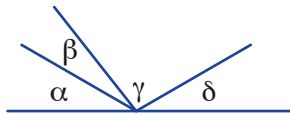
ב. **יעל ושירן** מצאו, כל אחת, זוג אחר של זוויות צמודות. הייתכן? הסבירו.



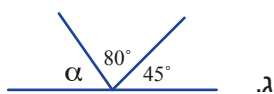


סימון זוויות

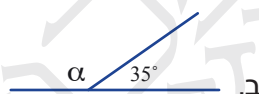
עד כה סימנו זוויות בעזרת מספרים, בעזרת האות של קודקוד הזווית, או בעזרת שלוש אותיות. מסמנים זוויות גם בעזרת אותיות יווניות, כמו למשל: α (אַלפא), β (בֵּיתא), γ (גַּמא), δ (דֵּלְתא).



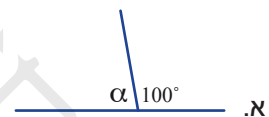
4. בכל סעיף זוויות צמודות. חשבו את גודלה של α .



א.



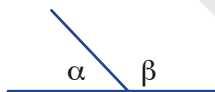
ב.



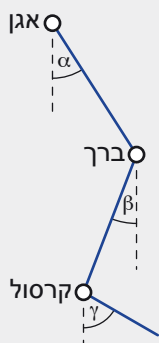
ג.



5. האם ייתכן זוג זוויות צמודות ששתיהן חדות? הסבירו.
 ב. האם ייתכן זוג זוויות צמודות ששתיהן קהות? הסבירו.
 ג. האם ייתכן זוג זוויות צמודות ששתיהן שוות? הסבירו.
 ד. האם ייתכן זוג זוויות צמודות שסכומן אינו 180° ? הסבירו.

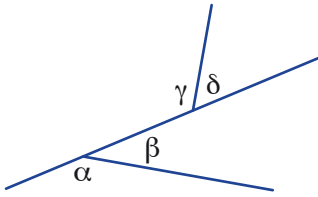


שתי זוויות צמודות יוצרות ביחד זווית שטוחה, לכן סכומן 180° .
 נציבה: בשרטוט, α ו- β הן זוויות צמודות, לכן מתקיים: $\alpha + \beta = 180^\circ$.



המוח האנושי עוסק בחישוב זוויות באופן קבוע במהלך כל הפעולות המוטוריות שאדם מבצע במהלך היום. בזמן הליכה למשל, כדי לשמור על יציבות ולשלוט על כמות האנרגיה המנוצלת, המוח חייב לבקר בכל צעד וצעד את זווית הירך α , את זווית השוק β ואת זווית הרגל γ (ראו שרטוט). אם מסתכלים על כל אחת מהזוויות האלו בנפרד לאורך זמן הביצוע של צעד אחד, אפשר לראות למשל שיש דמיון רב בין זווית השוק לזווית הרגל, וההבדל העיקרי ביניהן הוא שהן מעט מוזזות האחת ביחס לשנייה בזמן.





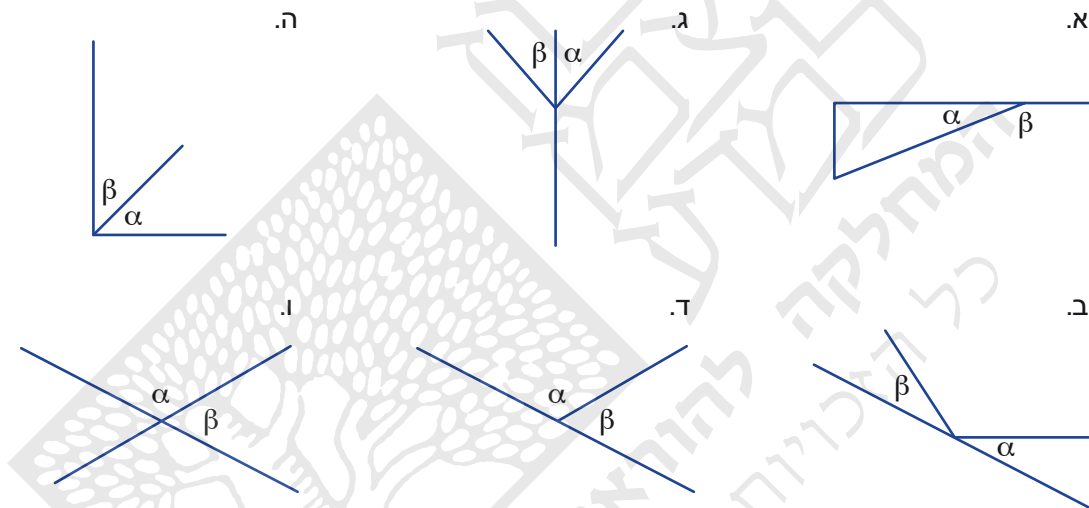
6. א. הזוויות α ו- β שבשרטוט הן זוויות צמודות. מצאו בשרטוט זוג נוסף של זוויות צמודות. מה סכומן?
 ב. סכום הזוויות α ו- δ גם הוא 180° . האם הן צמודות? הסבירו.



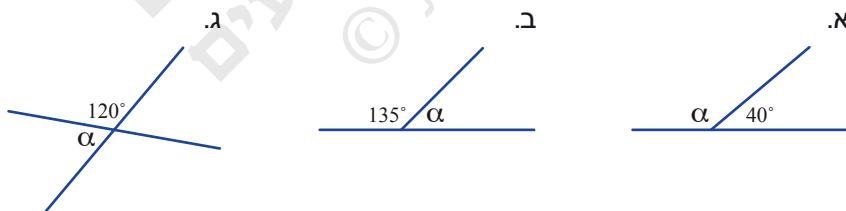
אוסף משימות



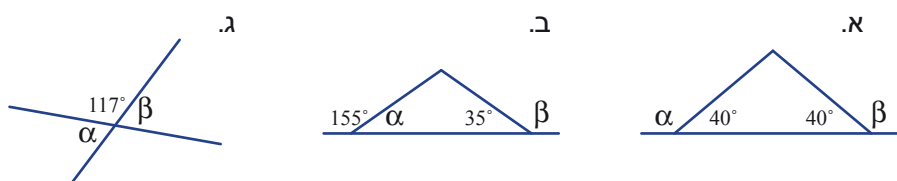
1. בכל שרטוט מסומנות זוויות α ו- β . בכל סעיף קבעו אם הזוויות צמודות.

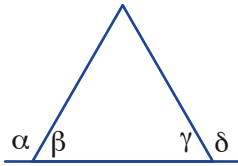


2. בכל סעיף זוויות צמודות. חשבו את גודלה של α .



3. בכל סעיף, חשבו את גודלן של α ושל β ורשמו נימוק מתאים.





$g = b$ (x במעלות)

$$a = 2x$$

$$b = x$$

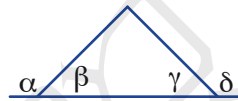
4. נתון:

מצאו את גודלן של הזוויות a, b, g



5. נתון: $\gamma = \beta$

הסבירו מדוע $\delta = \alpha$.



6. א. האם קרש הגיהוץ יהיה גבוה יותר או נמוך יותר, אם נקטין את $1 <$, הזווית המסומנת בין רגלי הקרש בשרטוט? הסבירו.

ב. **אסף ונדב** התבוננו במשטח ההגבהה שבתמונה.

אסף אמר: אם נגדיל את הזווית שבין שני מוטות, נוכל להגיע גבוה יותר.

נדב אמר: אם נקטין את הזווית שבין שני מוטות, נוכל להגיע גבוה יותר.

שניהם צדקו. הייתכן?



7. $a + b = 180^\circ$ הן שתי זוויות המקיימות:

האם הן בהכרח צמודות? אם כן, הסבירו. אם לא, ציירו דוגמה נגדית.

שיעור 2. זוויות קודקדיות

לפניכם סקיצות של התמרורים משיעור 1.



V



IV



III



II



I

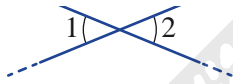
באילו סקיצות יש זוויות שיש להן קודקוד משותף, אך אינן צמודות?

נלמד על זוויות קודקדיות.

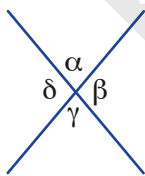
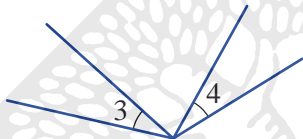


הגדרה: זוויות הנוצרות ביו שני ישרים נחתכים, ואינן זוויות צמודות, נקראות **זוויות קודקדיות**.

משפט: בשרטוט זוויות כמו $\sphericalangle 1$ ו- $\sphericalangle 2$ הן **זוויות קודקדיות**.



בשרטוט זוויות 3 ו- 4 **אינן קודקדיות**.



1. א. $\beta = 80^\circ$

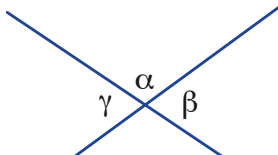
חשבו את גודלן של הזוויות האחרות בשרטוט.

מצאו בשרטוט זוגות של זוויות שוות. האם הן קודקדיות או צמודות?

ב. $\alpha = 110^\circ$

חשבו את גודלן של β ושל γ .

הסבירו מדוע הן שוות.

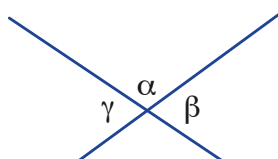


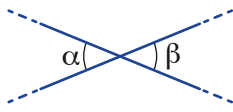
2. א. מצאו בשרטוט זוג זוויות קודקדיות.

ב. מהו הסכום של α ושל β ? מדוע?

ג. **עידן** אמר: $\beta = 180^\circ - \alpha$ וגם $\gamma = 180^\circ - \alpha$ לכן $\gamma = \beta$

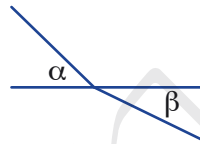
האם עידן צודק? הסבירו.





מסקנה: זוויות קודקודיות שוות זו לזו.
משפט: בשרטוט α ו- β זוויות קודקודיות, לכן $\alpha = \beta$

α ו- β הן זוויות קודקודיות,
 כי יש להן קודקוד משותף.



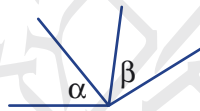
3. אנה אמרה: בשרטוט

α ו- β הן זוויות קודקודיות,
 כי הן שוות זו לזו.



בתיא אמרה: בשרטוט

α ו- β הן זוויות קודקודיות,
 כי הן שוות ויש להן קודקוד משותף.



גילה אמרה: בשרטוט

α ו- β הן זוויות קודקודיות.



דורית אמרה: בשרטוט

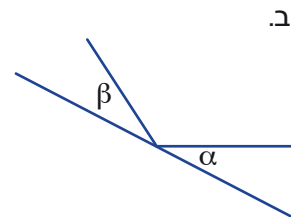
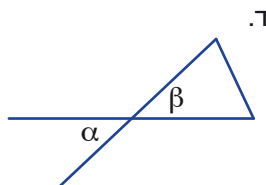
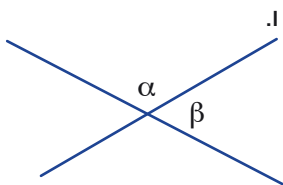
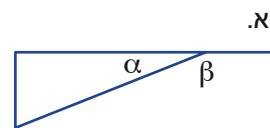
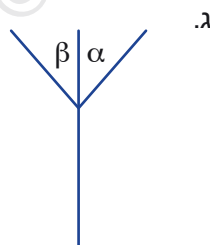
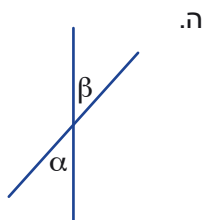
מי צודקת? הסבירו.



אוסף משימות

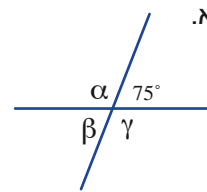
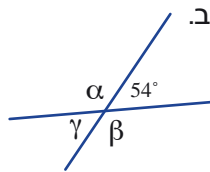
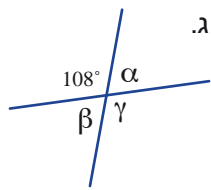


1. בכל שרטוט מסומנות זוויות α ו- β .
 קבעו אם הזוויות צמודות, קודקודיות, או אינן צמודות ואינן קודקודיות.

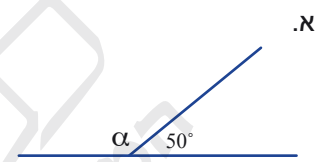
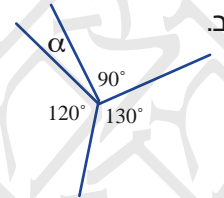
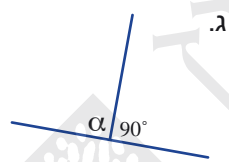
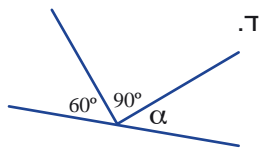




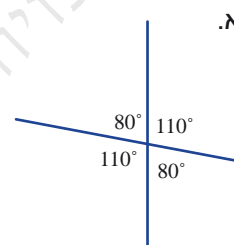
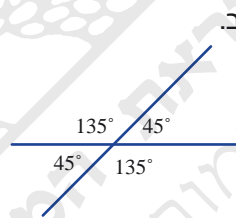
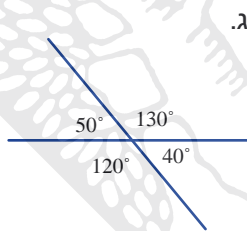
2. בכל סעיף, חשבו את גודל הזוויות α , β ו- γ .



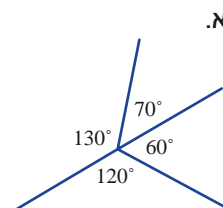
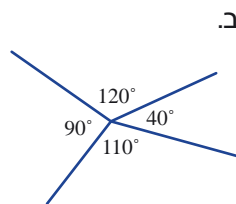
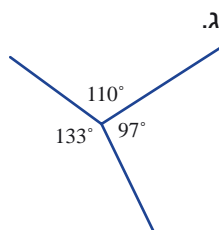
3. בכל סעיף, חשבו את גודל הזווית α . הראו את דרך החישוב.



4. בכל סעיף, שני ישרים נחתכים. קבעו אם הנתונים אפשריים. הסבירו.

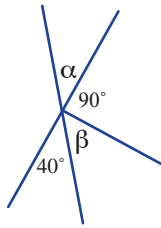


5. בכל סעיף, קבעו אם הנתונים אפשריים. הסבירו.





6. חשבו את גודל הזוויות α ו- β . רשמו נימוק מתאים.



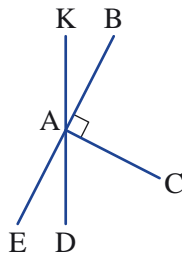
7. א. רשמו שני זוגות של זוויות קודקודיות בשרטוט.

ב. רשמו שני זוגות של זוויות צמודות בשרטוט.

ג. מצאו זווית המשלימה את $\sphericalangle EAD$ ל- 90° .

ד. נתון: $\sphericalangle DAC = 51^\circ$

חשבו את גודלן של הזוויות: $\sphericalangle EAK$, $\sphericalangle KAB$, $\sphericalangle EAD$, $\sphericalangle BAD$.



8. בכל סעיף, קבעו אם הטענה נכונה. אם כן, הסבירו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

א. אם α ו- β זוויות קודקודיות ו- α זווית חדה, אז β זווית קהה.

ב. אם α ו- β זוויות קודקודיות, אז $\alpha + \beta > 90^\circ$.

ג. אם α ו- β זוויות צמודות ו- α זווית חדה, אז β זווית קהה.

ד. אם α זווית חדה ו- β זווית קהה, אז סכומן 180° .



9. הייתכן? אם כן, קבעו את גודל הזוויות. אם לא, הסבירו.

א. α ו- β זוויות קודקודיות, $\alpha + \beta = 180^\circ$.

ב. α ו- β זוויות קודקודיות, $\alpha - \beta = 20^\circ$.

ג. α ו- β זוויות קודקודיות, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

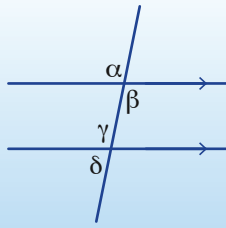
ד. α ו- β זוויות צמודות, $\alpha - \beta = 90^\circ$.

ה. α ו- β זוויות צמודות, $\alpha = 2\beta$.

ו. α ו- β זוויות קודקודיות, $\alpha = 2\beta$.



שיעור 3. זוויות בין ישרים מקבילים



בשרטוט זוג ישרים מקבילים וישר שלישי החותך אותם.

האם הזווית α - γ שוות?

האם הזווית β - δ שוות?

נלמד על תכונות של זוויות הנוצרות בין ישרים מקבילים וישר חותך.

- א. מצאו בשרטוט במשימת הפתיחה זוג זוויות שוות. הסבירו.
- ב. מצאו בשרטוט במשימת הפתיחה זוג זוויות שסכומן 180° . הסבירו.

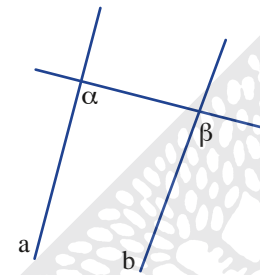
זוויות מתאימות



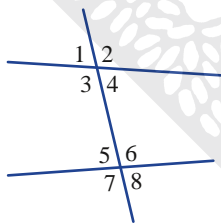
הגדרה

נתונים שני ישרים a , b וישר שלישי החותך אותם. שתי זוויות הנמצאות מאותו צד של הישרים ומאותו צד של הישר החותך, נקראות **זוויות מתאימות**.

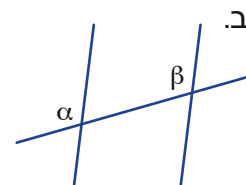
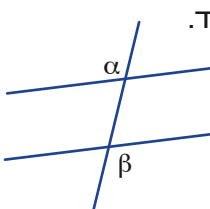
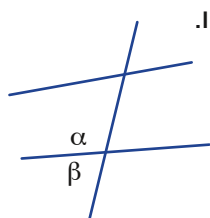
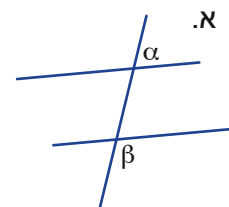
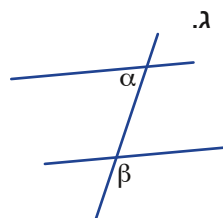
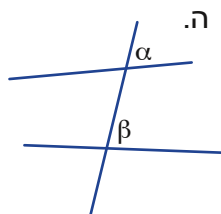
זלזל: בשרטוט α - β הן **זוויות מתאימות**.



2. רשמו זוגות של זוויות מתאימות בשרטוט.

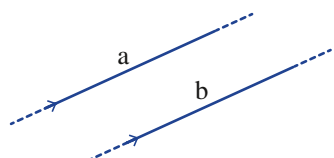


3. זהו באילו מהשרטוטים הבאים זוויות α - β מתאימות.





תזכורת



ישרים שאינם חותכים זה את זה נקראים **ישרים מקבילים**. מסמנים ישרים מקבילים בעזרת הסימן \parallel אפשר להוסיף סימן חיצים על הישרים כדי לזהות את הישרים המקבילים.
משפט: בשרטוט $a \parallel b$ ישרים מקבילים, מסמנים $a \parallel b$.

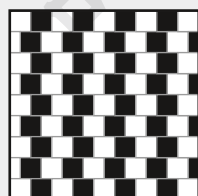
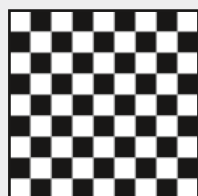
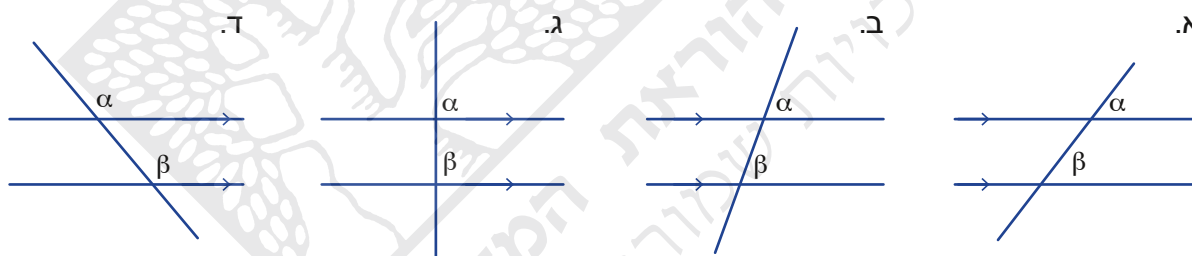
זוויות מתאימות בין מקבילים



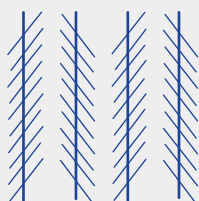
4. באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "חומרי למידה נוספים" תמצאו את הפעילות "ישרים מקבילים" בצעו את הפעילות בהתאם להוראות.



5. בכל סעיף זוג ישרים מקבילים וישר חותך. היעזרו במד-זווית וקבעו אם $a = b$.

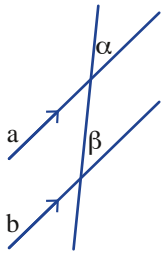


לפניכם שני תעתועי ראייה (Optical illusions) התעתוע הראשון נוצר על-ידי הזזת השורות של רשת משבצות ריבועיות. כתוצאה מהזזה זאת, הישרים נראים לא מקבילים.

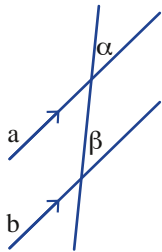


גם בתעתוע השני הקווים מקבילים למרות שהם אינם נראים כך.

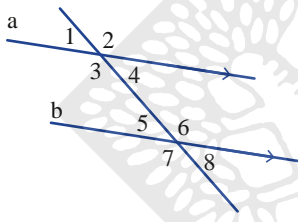
בשני המקרים, תוכלו להעתיק את הישרים לדף שקוף, ולהיווכח שבמציאות, הישרים מקבילים.



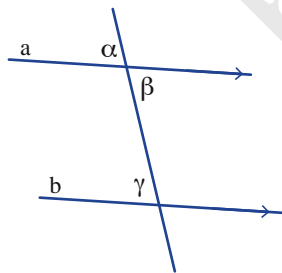
6. בשרטוט נתון: $a \parallel b$, $\beta = 40^\circ$
- האם זווית α יכולה להיות בת 30° ? הסבירו.
 - האם זווית α יכולה להיות בת 50° ? הסבירו.
 - אייל** אמר: אם הישרים מקבילים, אז זווית α חייבת להיות בת 40° . האם אייל צודק? הסבירו.



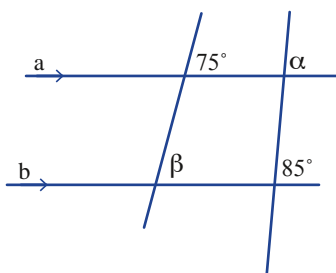
7. בשרטוט נתון: $a \parallel b$, $\sphericalangle 2 = 140^\circ$. חשבו את גודל כל הזוויות בשרטוט.
- האינו **מתוך התנסות** את העובדה: נתונים שני ישרים וישר שלישי החותך אותם, אם הישרים מקבילים אז הזוויות המתאימות שוות.
- זלמנה:** בשרטוט, הישרים a ו-b מקבילים זה לזה, ולכן α ו- β שוות. כלומר, אם $a \parallel b$ אז $a = b$



7. בשרטוט נתון: $a \parallel b$, $\sphericalangle 2 = 140^\circ$. חשבו את גודל כל הזוויות בשרטוט.

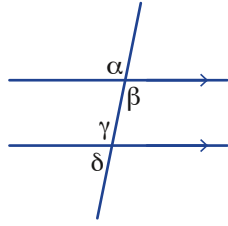


8. בשרטוט נתון: $a \parallel b$, $a = 80^\circ$. האם β ו- γ שוות? הסבירו.



9. בשרטוט נתון: $a \parallel b$
- עידן** אמר: $a = 75^\circ$. האם עידן צודק? אם כן, הסבירו. אם לא, מצאו את גודל הזוויות a.
 - מצאו את גודל הזווית β .

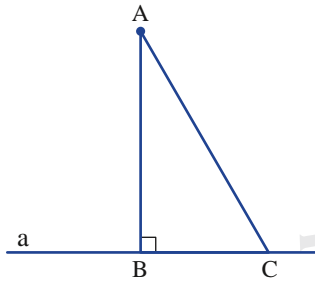
10. חזרו למשימת הפתיחה, ובדקו אילו זוויות שוות.



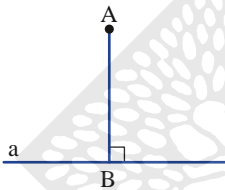
מרחק נקודה מישר



11. נתונים ישר a ונקודה A מחוץ לישר.
 דרך נקודה A משרטטים שני ישרים החותכים את ישר a בנקודות B ו- C .
 AB מאונך לישר a .
 האם ייתכן כי גם AC מאונך לישר a ? הסבירו.



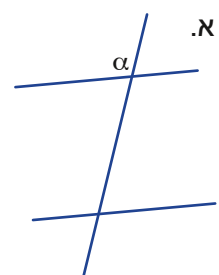
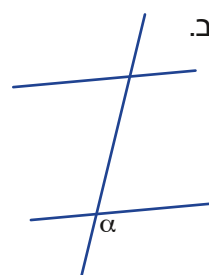
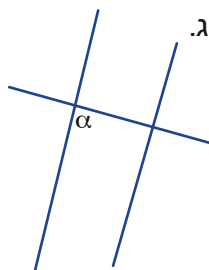
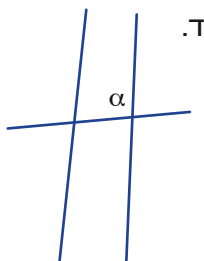
ראינו כי דרך נקודה מחוץ לישר אפשר לשרטט אנך אחד ויחיד לישר.
 אנך זה הוא המרחק של הנקודה מהישר.
מרחק: בשרטוט, אורך הקטע AB הוא המרחק של הנקודה A מן הישר a .



אוסף משימות

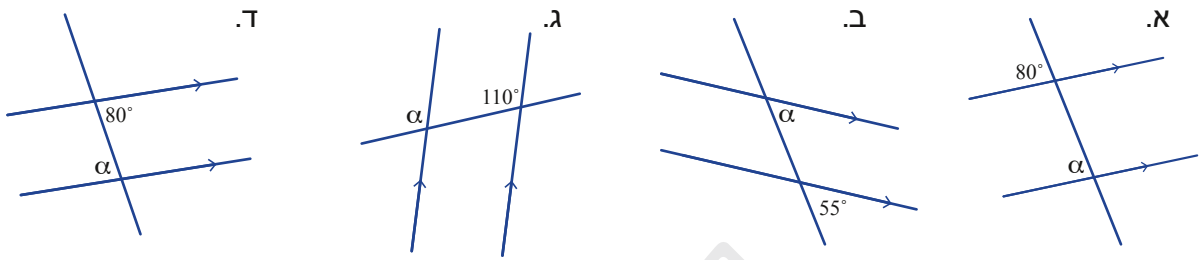


1. העתיקו את השרטוטים. בכל שרטוט, סמנו זווית β המתאימה לזווית α .

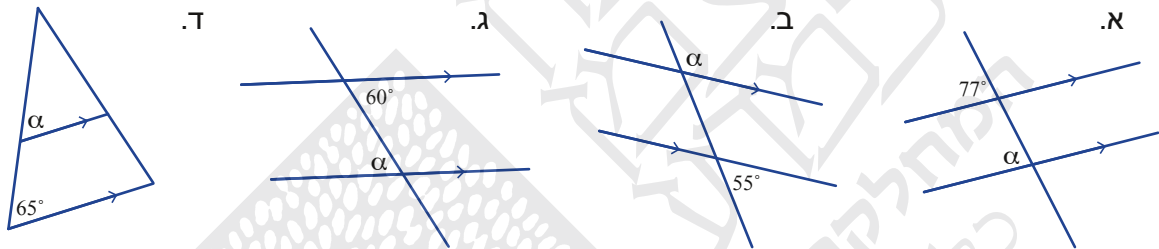




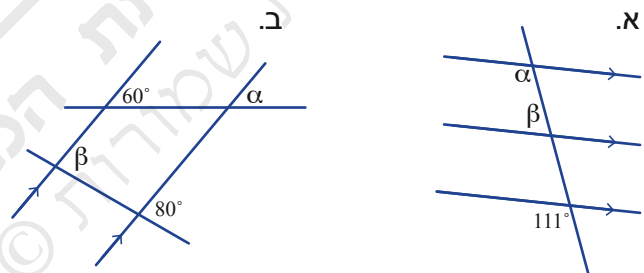
2. בכל סעיף, שני ישרים מקבילים (מסומנים בחיצים) וישר חותך. חשבו את גודל זווית α .



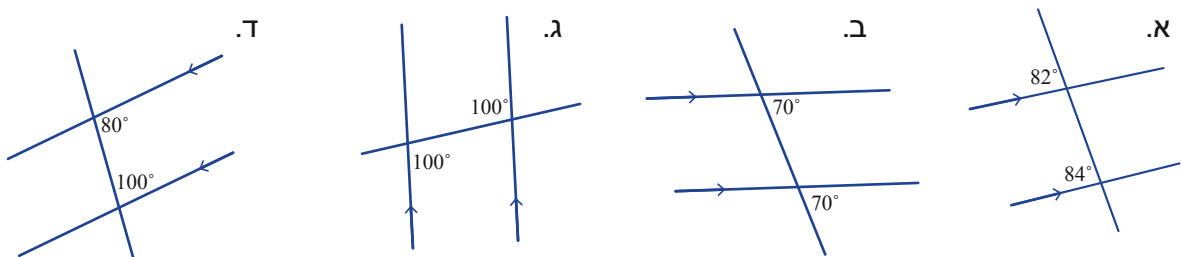
3. בכל סעיף, שני ישרים מקבילים (מסומנים בחיצים) וישר חותך. חשבו את גודל זווית α .

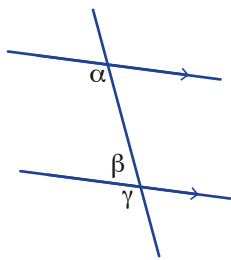


4. בכל סעיף, ישרים מקבילים (מסומנים בחיצים). חשבו את גודל זוויות α ו- β . הסבירו.

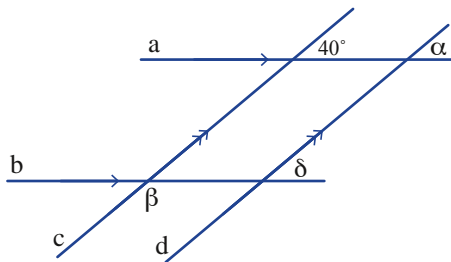


5. בכל סעיף, ישרים מקבילים (מסומנים בחיצים). קבעו אם הנתונים נכונים, והסבירו.

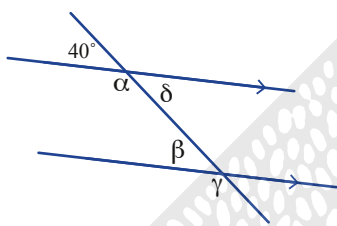




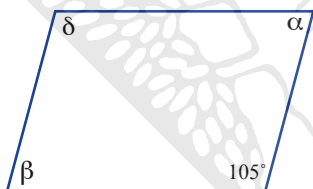
- 6.** נתונים ישרים מקבילים (מסומנים בחיצים) וישר חותך.
 א. מדדו בעזרת מד-זווית את גודלה הזווית α .
 ב. חשבו את גודל זווית β ו- γ .



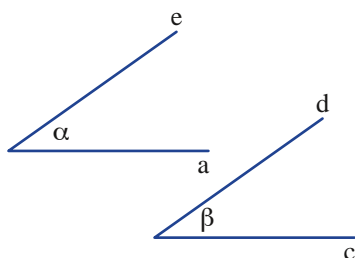
- 7.** נתון $c \parallel d$, $a \parallel b$
 חשבו את גודל זוויות α , β ו- δ .
 הסבירו.



- 8.** בשרטוט זוג ישרים מקבילים.
 חשבו את גודל זוויות α , β , γ ו- δ .
 הסבירו את דרך החישוב.



- 9.** המרובע בשרטוט הוא מקבילית.
 חשבו את גודל הזוויות α , β ו- δ , הסבירו את דרך החישוב.
 (רמז: האריכו את הישרים.)



- 10.** נתון: $e \parallel d$, $a \parallel c$
 הראו כי $a = b$
 (רמז: האריכו את הישר a.)

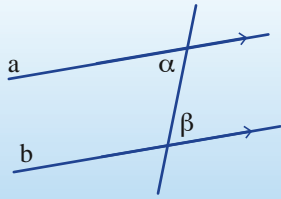


- ב. שרטטו במחברת ישרים זוויות כך ש:
 $a \parallel c$, $e \parallel d$ אך $\alpha \neq \beta$



- 11.** נתונים שני ישרים מקבילים וישר חותך.
 האם חוצי הזוויות של זוג זוויות מתאימות, מקבילים? שרטטו במחברת והסבירו.

שיעור 4. זוויות מתחלפות



נתון: $a \parallel b$
שערו: האם $\alpha = \beta$?

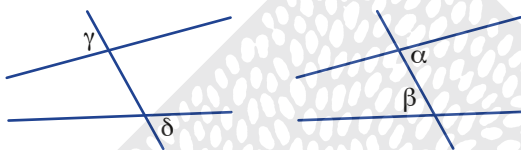
נכיר זוויות מתחלפות, ונמצא את גודלן במקרה של ישרים מקבילים.

זוויות מתחלפות



הגדרה

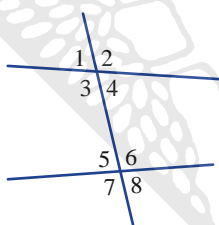
נתונים שני ישרים a ו- b וישר שלישי החותך אותם. שתי זוויות הנמצאות מצדדים שונים של הישר החותך, ומצדדים שונים של שני הישרים, נקראות **זוויות מתחלפות**.



בשרטוטים הבאים:

α ו- β הן **זוויות מתחלפות**,

וגם γ ו- δ הן **זוויות מתחלפות**.



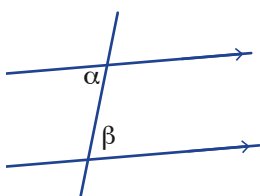
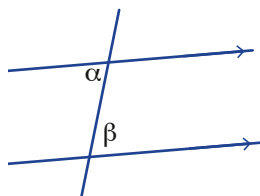
1. בשרטוט זוג ישרים וישר שלישי החותך אותם. $\sphericalangle 3$ ו- $\sphericalangle 6$ הן זוויות מתחלפות. מצאו בשרטוט זוגות נוספים של זוויות מתחלפות.

זוויות מתחלפות בין מקבילים

2. בשרטוט נתון: $a \parallel b$, $\alpha = 75^\circ$

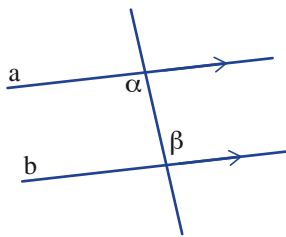
א. חשבו את גודל זווית β .

(היעזרו בחישוב זוויות נוספות במידת הצורך.)



- ב. בשרטוט נתון $a \parallel b$

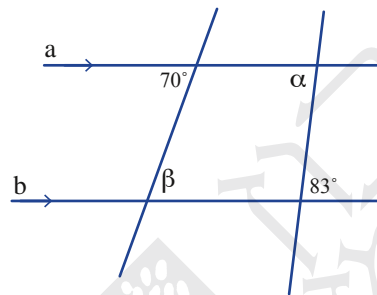
האם ייתכן שזוויות α ו- β שונות בגודלן זו מזו? הסבירו.



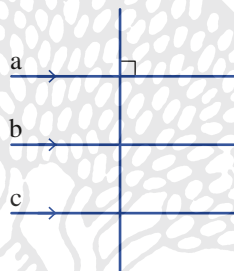
נתונים שני ישרים וישר שלישי החותך אותם.
אם הישרים מקבילים, אז הזוויות המתחלפות שוות.

זלזנה: בשרטוט, הישרים a ו-b מקבילים זה לזה ולכן הזוויות α ו- β שוות.

אם $a \parallel b$
אז $\alpha = \beta$



3. בשרטוט נתון: $a \parallel b$
מהם הגדלים של זוויות α ו- β ?



4. בשרטוט נתון: $a \parallel b$ וגם $a \parallel c$
האם $b \parallel c$? הסבירו.



a _____
b _____
c _____

במשימה 4 ראינו את העובדה:

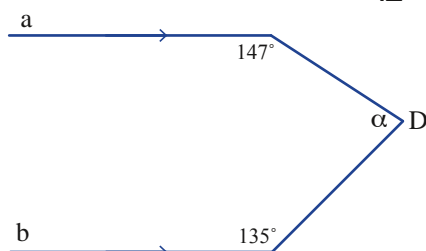
אם שני ישרים מקבילים לישר שלישי, אז הם מקבילים זה לזה.

זלזנה: אם $a \parallel b$ וגם $a \parallel c$

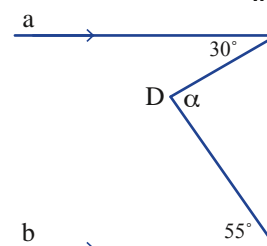
אז $b \parallel c$

5. בכל סעיף, הישרים a ו-b מקבילים. חשבו את גודל זווית a.
(רמז: שרטטו ישר העובר דרך נקודה D ומקביל לאחד הישרים.)

ב.

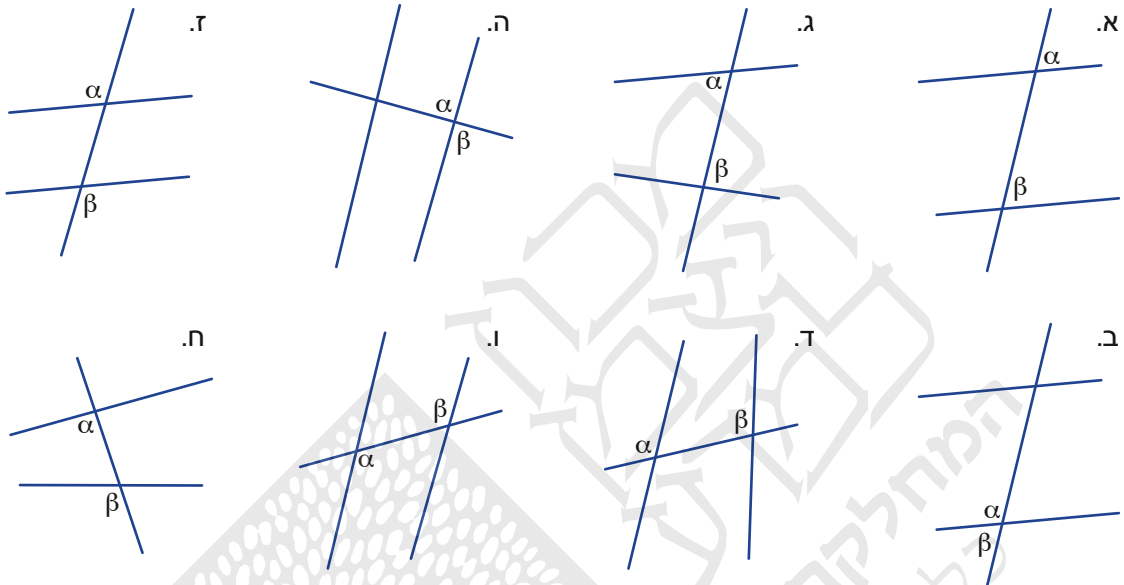


א.



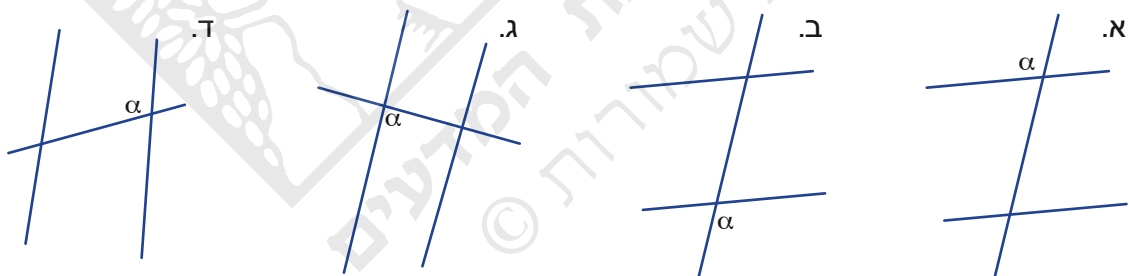


1. בכל סעיף, קבעו אם הזוויות α ו- β הן זוויות מתחלפות, זוויות מתאימות, זוויות צמודות או זוויות קודקדיות.



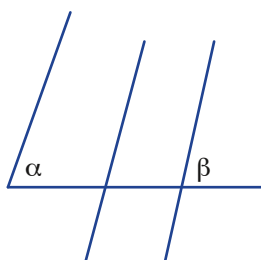
2. העתיקו את השרטוטים.

בכל שרטוט, סמנו זווית β המתאימה לזווית α , וסמנו זווית δ המתחלפת עם זווית α .



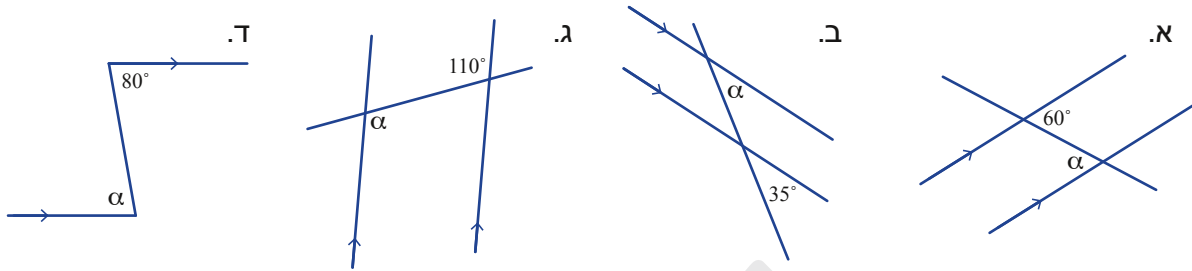
3. העתיקו את השרטוט.

- א. סמנו זווית γ המתחלפת עם זווית α וגם מתחלפת עם זווית β .
- ב. סמנו זווית δ המתחלפת עם זווית α ואינה מתחלפת עם זווית β .

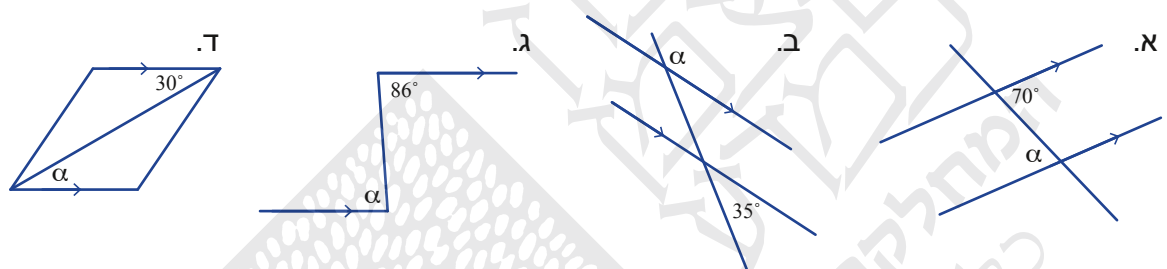




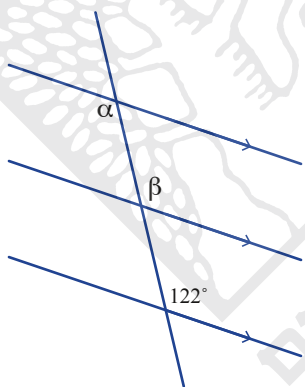
4. בכל סעיף זוג ישרים מקבילים (מסומנים בחיצים) וישר חותך. חשבו את גודל זווית α .



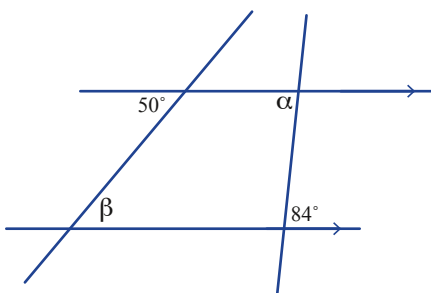
5. בכל סעיף זוג ישרים מקבילים (מסומנים בחיצים) וישר חותך, חשבו את גודל זווית α .

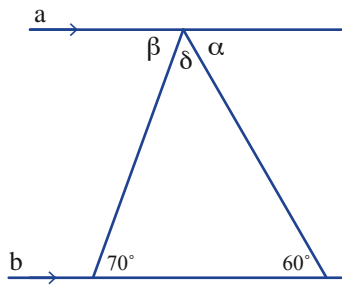


6. נתונים ישרים מקבילים (מסומנים בחיצים) וישר חותך. חשבו את גודל הזוויות α ו- β . הסבירו.

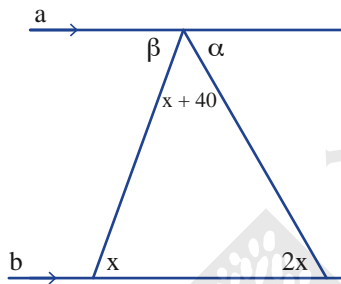


7. נתונים ישרים מקבילים (מסומנים בחיצים). חשבו את גודל הזוויות α ו- β . הסבירו.

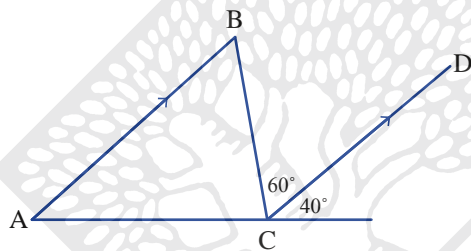




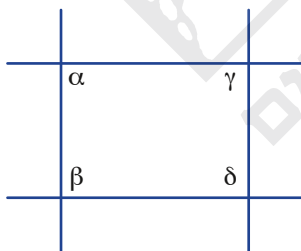
8. בשרטוט נתון: $a \parallel b$.
חשבו את גודל הזוויות α , β ו- δ .



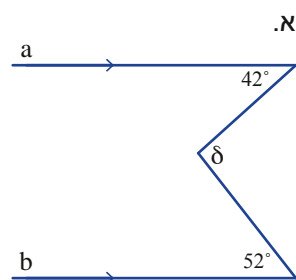
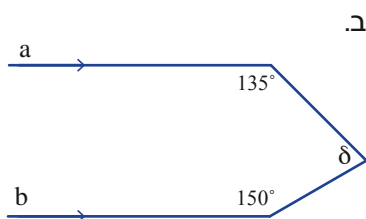
9. בשרטוט נתון: $a \parallel b$.
א. בטאו את α ו- β בעזרת x ($x > 0$, במעלות).
ב. קשמו משוואה וחשבו את גודל הזוויות α ו- β .



10. בשרטוט נתון: $AB \parallel CD$.
חשבו את גודל זוויות המשולש $\triangle ABC$.



11. בשרטוט נתון: $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.
האם גם זווית δ חייבת להיות זווית ישרה? הסבירו.



12. נתון $a \parallel b$. חשבו את גודל זווית δ .