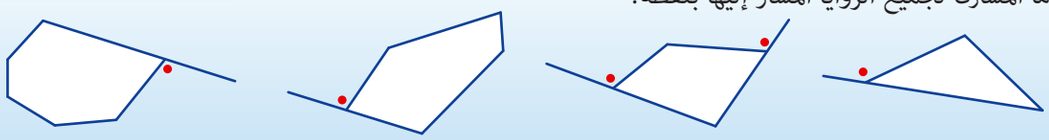
الوحدة السابعة عشرة: زوايا خارجية

الدرس الأول: زوايا خارجية للمضلع

ما المشترك لجميع الزوايا المشار إليها بنقطة؟

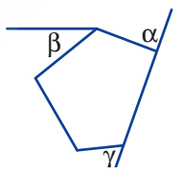


سنتعرف على الزاوية الخارجية للمضلع، ونجد صفة الزاوية الخارجية للمثلث.

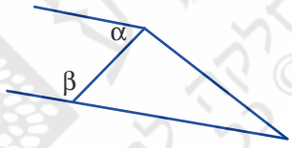
زوايا خارجية للمضلع

1. جميع الزوايا المشار إليها في مهمة الافتتاحية هي زوايا خارجية للمضلع المحدب.
اذكروا في كل بند أي زوايا من الزوايا المشار إليها ليست زوايا خارجية للمضلع. اشرحوا.

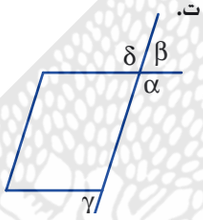
أ.



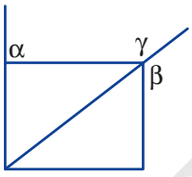
ب.



ت.



ث.



تعريف

نسمِّي الزاوية المجاورة لإحدى زوايا المضلع المحدب **"زاوية خارجية للمضلع"**

2. أ. ارسموا مثلثًا وجميع زواياه الخارجية.
كم زاوية خارجية توجد للمثلث؟
ب. كم زاوية خارجية توجد للشكل الرباعي؟ اشرحوا.
ت. كم زاوية خارجية توجد بجانب كل رأس في المضلع؟

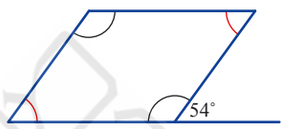
3. أ. ارسموا مثلثًا حاد الزوايا وزواياه الخارجية (واحدة بجانب كل رأس).
ب. ارسموا مثلثًا قائم الزاوية وزاوية خارجية مجاورة لإحدى زواياه الحادة.
ت. ارسموا مثلثًا منفرج الزاوية وزاوية خارجية مجاورة للزاوية المنفرجة.

انتبهوا

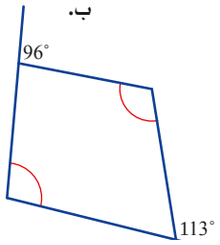
نتطرق من هنا فصاعدًا إلى زاوية خارجية واحدة بجانب كل رأس.

4. أشرنا في كل رسمة إلى الزوايا المتساوية بنفس اللون.
احسبوا زوايا المضلع.

أ.



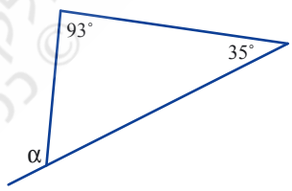
ب.



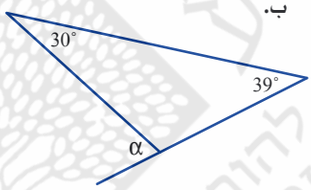
زوايا خارجية للمثلث

5. احسبوا في كل بند مقدار الزاوية α.

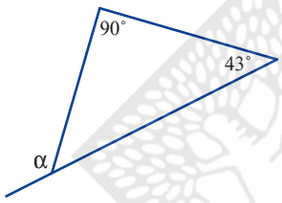
أ.



ב.



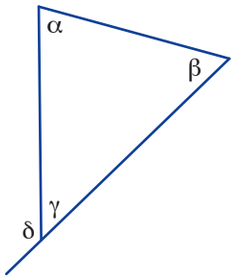
ת.



6. أ. عبروا عن مقدار الزاوية δ بواسطة γ.

ب. عبروا عن مقدار الزاوية δ بواسطة α وَβ.

ת. قالت **جواهر**: مقدار الزاوية للزاوية δ تساوي α + β.
هل قول جواهر صحيح؟ اشرحوا.



نظرية

مقدار الزاوية الخارجية للمثلث يساوي مجموع الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها.

7. احسبوا في كل بند مقدار زوايا المثلث (ارسموا رسمة تعرض ذلك).

أ. مقدار إحدى زوايا المثلث هو 42°، ومقدار إحدى الزوايا الخارجية هو 80°.

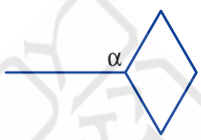
ب. مقدار إحدى الزوايا الخارجية للمثلث هو 130°، ومقدار زاوية خارجية أخرى هو 70°.

مجموعة مهامّ

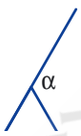
1. في أي بنود زاوية α هي زاوية خارجية؟

أ.

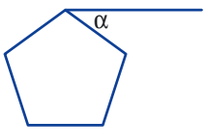
ب.



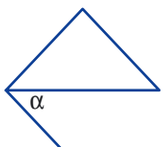
ت.



ث.



ج.



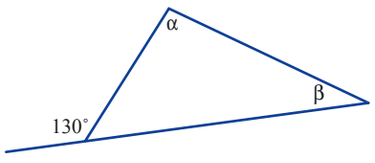
2. أ. ارسموا مثلثًا بحيث تكون له زاوية خارجية قائمة. على أي مثلث حصلتم؟

ب. ارسموا مثلثًا بحيث تكون له زاوية خارجية حادة. على أي مثلث حصلتم؟

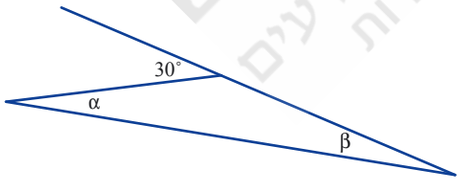
ت. ارسموا مثلثًا بحيث تكون جميع زواياه الخارجية حادة. على أي مثلث حصلتم؟ اشرحوا.

3. سجلوا في كل بند ثلاث إمكانيات لمقدار الزاويتين α وَ β.

أ.



ب.



4. حددوا ما إذا الادعاءات الآتية صحيحة.

إذا كانت الإجابة نعم، فاشرحوا. إذا كانت الإجابة لا- فارسموا مثالًا مضادًّا.

أ. إذا كانت لمثلث زاوية خارجية حادة، فإن المثلث منفرج الزاوية.

ب. إذا كانت لمثلث زاوية خارجية منفرجة، فإن المثلث حاد الزوايا.

ت. إذا كانت لمثلث زاويتان خارجيتان منفرجتان، فإن المثلث حاد الزوايا.

ث. إذا كانت لمثلث ثلاث زوايا خارجية منفرجة، فإن المثلث حاد الزوايا.

5. استعينوا برسومات توضيحية وافحصوا.

أ. هل يمكن أن يكون مثلث جميع زواياه الخارجية حادة؟ اشرحوا.

ب. هل يمكن أن يكون مثلث جميع زواياه الخارجية منفرجة؟ اشرحوا.

ت. هل يمكن أن يكون مثلث له زاويتان خارجيتان حادتان وزاوية خارجية حادة واحدة؟ اشرحوا.

ث. هل يمكن أن يكون مثلث له زاويتان خارجيتان منفرجتان وزاوية خارجية حادة واحدة؟ اشرحوا.

ج. هل يمكن أن يكون مثلث له زاويتان خارجيتان منفرجتان وزاوية خارجية قائمة واحدة؟ اشرحوا.

6. احسبوا في كل بند مقدار زوايا المثلث (ارسموا رسمة توضيحية).

أ. مقدار إحدى زوايا المثلث هو $102°$، ومقدار إحدى الزوايا الخارجية $125°$.

ب. مقدار كل زاوية من الزاويتين الخارجيتين للمثلث هو $135°$. ما هو نوع المثلث؟

7. حددوا في كل بند ما إذا يمكن أن يكون مثلث يحقق المعطيات، واشرحوا.

أ. مقدار إحدى زوايا المثلث هو $102°$، ومقدار إحدى الزوايا الخارجية $102°$.

ب. مقدار إحدى الزوايا الخارجية للمثلث هو $95°$، ومقدار زاوية خارجية أخرى $112°$.

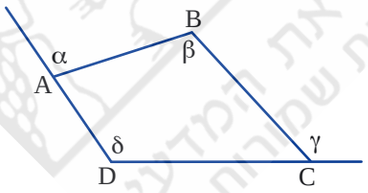
ت. مقدار إحدى زوايا المثلث هو $130°$، ومقدار إحدى الزوايا الخارجية $70°$.

ث. مقدار إحدى زوايا المثلث هو $130°$، ومقدار إحدى الزوايا الخارجية $50°$.

8. أشرنا في الرسمة إلى أربع زوايا.

بيِّنوا أن $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

(إرشاد: ارسموا BD.)

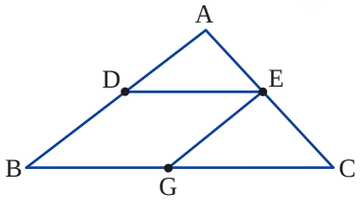


9. معطى: $BC \parallel DE$

$AB \parallel EG$

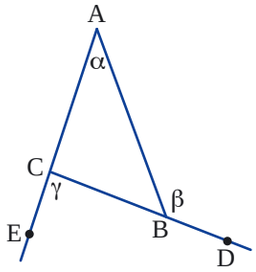
جدوا في المثلث ΔABC زاوية تساوية زاوية $\sphericalangle DEG$.

اشرحوا كيف وجدتم؟

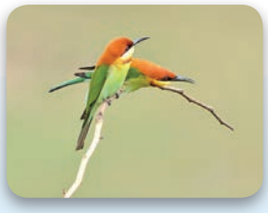


10. معطى: $\sphericalangle\beta = \sphericalangle a + \sphericalangle g$

ما هو نوع المثلث ABC؟ اشرحوا.



الدرس الثاني: الزاوية الخارجية وتطابق مثلثات

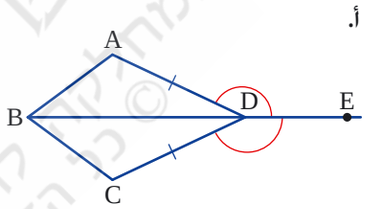


هل المثلثان متطابقان؟ اشرحوا.
(نُشير بنفس الإشارة إلى القطع المتساوية بالطول، وإلى الزوايا المتساوية بالمقدار).

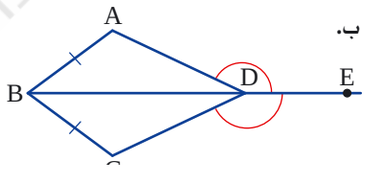
نستعمل صفات الزوايا الخارجية للمثلث في الأسئلة التي تتناول تطابق المثلثات.

1. حددوا في كل بند حسب معطيات الرسمة ما إذا يمكن الاستنتاج أن المثلثين متطابقين.
إذا كانت الإجابة نعم، فسجلوا ثلاثة شروط ونظرية التطابق المناسبة.
إذا لا فارسموا مثالًا مضادًا.

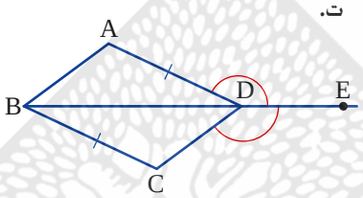
أ.



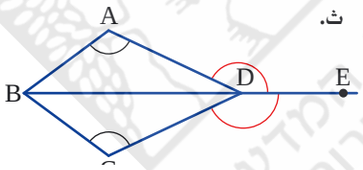
ب.



ت.

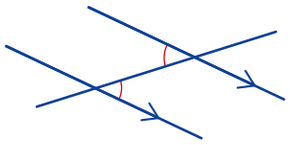


ث.

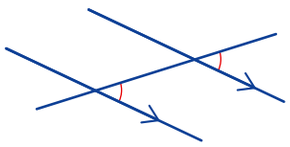


للتذكير

- الزوايا المتبادلة بين مستقيمين متوازتين متساوية بالمقدار.



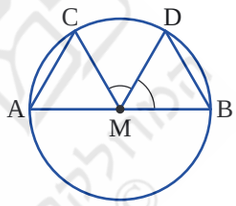
- الزوايا المتناظرة بين مستقيمين متوازيين متساوية بالمقدار.



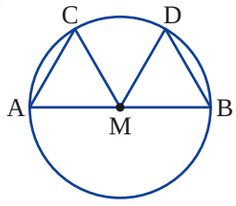
2. يمكنكم إيجاد الفعالية "مثلثات داخل دائرة" "**משולשים בתוך מעגל**" في موقع "الرياضيات المدمجة"، في قسم "مواد تعليمية إضافية - "الهندسة للصف الثامن". ستفحصون في هذه الفعالية تطابق أزواج من المثلثات، وستشرحون مكتشفاتكم. نفذوا الفعالية حسب التعليمات.

3. حددوا في كل بند حسب معطيات الرسمة ما إذا يمكن الاستنتاج أن المثلثين متطابقين.
إذا كانت الإجابة نعم، فسجلوا ثلاثة شروط ونظرية التطابق المناسبة. إذا لا فارسموا مثالًا مضادًا.

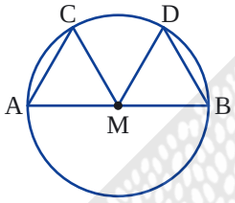
أ. معطى: AB قُطر في الدائرة
MD ينصف الزاوية ∢BMC



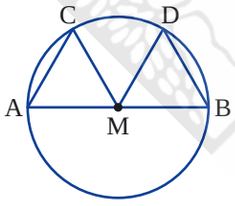
ب. معطى: AB قُطر في الدائرة
BD = AC



ت. معطى: AB قُطر في الدائرة
MD ينصف الزاوية ∢BMC
MC ينصف الزاوية ∢AMD



ث. معطى: AB قُطر في الدائرة
BD || MC

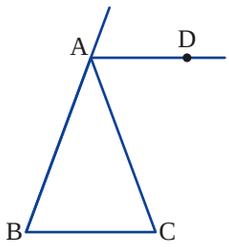


4. يمكنكم إيجاد الفعالية "موازي لقاعدة مثلث متساوي الساقين" "**מקביל לבסיס במשלש שווה - שוקיים**" في موقع "الرياضيات المدمجة"، في قسم "مواد تعليمية إضافية - "الهندسة للصف الثامن". ستفحصون في هذه الفعالية أي صفة يحقق المستقيم الموازي لقاعدة مثلث متساوي الساقين، وستشرحون مكتشفاتكم. نفذوا الفعالية حسب التعليمات.

5. المثلث ABC هو مثلث متساوي الساقين فيه $AC = AB$.
رُسم عبر رأس زاوية الرأس مستقيم موازي للقاعدة: $AD \parallel BC$.

أ. انسخوا الرسمة وأشيروا إلى الزوايا المتساوية.

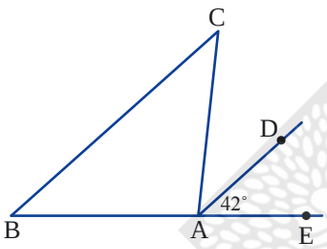
ب. اشرحوا لماذا AD ينصف الزاوية الخارجية المجاورة لزاوية رأس المثلث.



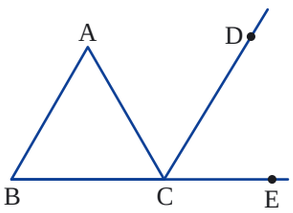
مجموعة مهامّ

يمكنكم إيجاد مهام بديلة لقسم من المهام في هذه المجموعة، في موقع "الرياضيات المدمجة"، في قسم "مواد تعليمية إضافية - "الهندسة للصف الثامن". ستفحصون في هذه الفعالية تطابق أزواج من المثلثات، وستشرحون مكتشفاتكم. نفذوا الفعالية حسب التعليمات. أشرنا إلى هذه المهام بـ *، وقد سجلنا تحت كل مهمة اسم المهمة البديلة في الموقع.

1. معطى: ΔABC مثلث متساوي الساقين، A رأس زاوية الرأس.
$AD \parallel BC$
$\sphericalangle DAE = 42^\circ$
احسبوا زوايا المثلث ABC.



2*. ΔABC مثلث متساوي الساقين: $(AC = AB)$
CD موازي للساق AB، وهو ينصف الزاوية الخارجية المجاورة للزاوية $\sphericalangle ACB$.
احسبوا مقدار زوايا المثلث.
اسم المهمة البديلة في الموقع: "موازي لساق مثلث متساوي الساقين" "מקביל לשוק במשולש שווה-שוקיים".

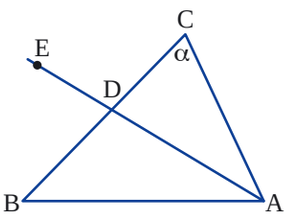


3. معطى:
ΔABC مثلث متساوي الساقين $(AB = BC)$
AD ينصف الزاوية $\sphericalangle BAC$.

أ. اكتبوا المعطيات بكتابة رياضية.

ب. احسبوا زاوية $\sphericalangle EDC$ إذا كان $\alpha = 50^\circ$.

ت. عبروا عن الزاوية $\sphericalangle EDC$ بواسطة α.

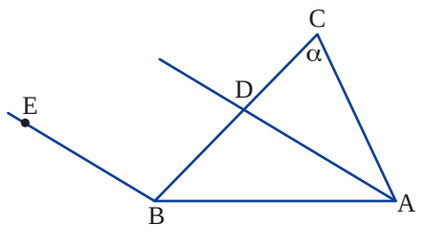


4*. معطى:

ΔABC مثلث متساوي الساقين $(BA = BC)$

AD ينصف الزاوية $\sphericalangle CAB$.

BE يوازي منصِّف الزاوية.



أ. سجِّلوا المعطيات بكتابة رياضية.

ب. احسبوا الزاوية $\sphericalangle EBD$ إذا كان $\alpha = 55°$.

عبروا عن الزاوية $\sphericalangle EBD$ بواسطة α.

اسم المهمة البديلة في الموقع: "ينصف زاوية القاعدة وموازي"

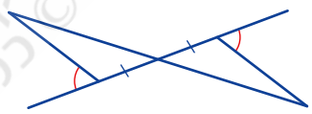
"חוצה זווית בסיס ומקביל"

5. حددوا في كل بند حسب معطيات الرسمة ما إذا يمكن الاستنتاج أن المثلثين متطابقين.

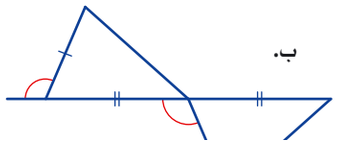
إذا كانت الإجابة نعم، انسخوا الرسمة وعينوا مقادير متساوية إضافية فيها، واذكروا نظرية التطابق المناسبة.

إذا كانت الإجابة لا، فارسموا مثالًا مضادًا.

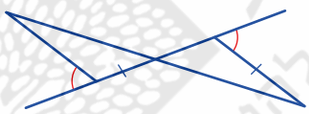
أ.



ب.

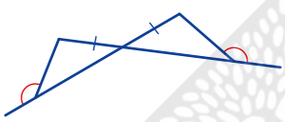


ت.

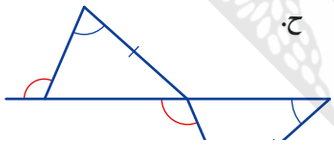


ث.

ج.



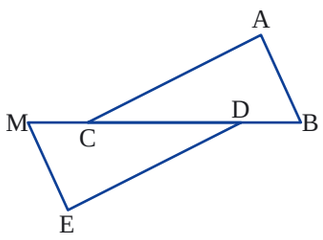
ح.



6. معطى: $AB \parallel ME$

$AC = DE$

$\sphericalangle EDB = \sphericalangle ACM$

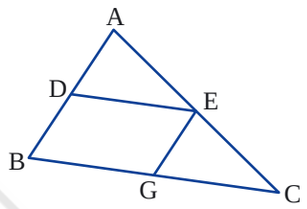


أ. انسخوا الرسمة وعينوا المعطيات فيها.

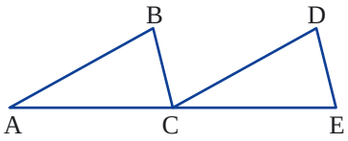
ب. سجلوا ثلاثة شروط حسبها يمكن الاستنتاج أن المثلثين متطابقين ونظرية التطابق المناسبة.

7. انسخوا الرسمة في كل بند وعينوا زوايا متساوية وقِطع متساوية.
افحصوا ما إذا يمكن الاستنتاج أنه يوجد في الرسمة مثلثين متطابقين.
إذا كانت الإجابة نعم ،فاشرحوا واذكروا نظرية التطابق المناسبة.

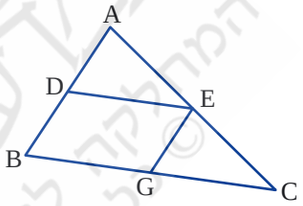
أ. معطى: $BC \parallel DE$
$AB \parallel EG$



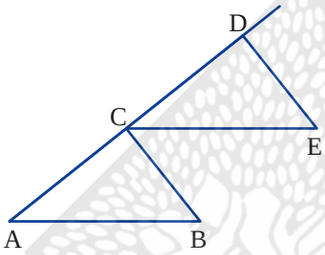
ت. معطى: $AB \parallel CD$
$BC \parallel DE$
C منتصف AE



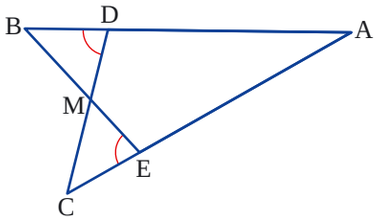
ب. معطى: $DE \parallel BC$
$EG \parallel AB$
E منتصف AC



ث. معطى: $AB \parallel CE$
$CB \parallel DE$
C منتصف AD



8. معطى: $AC = AB$
$\sphericalangle CEB = \sphericalangle BDC$

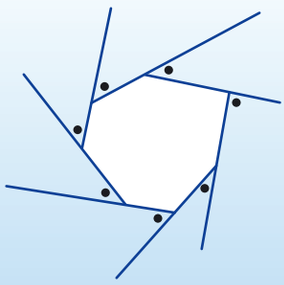


أ. سجلوا ثلاثة شروط يمكن الاستنتاج منها أن: $\Delta CAD \cong \Delta BAE$.
سجلوا نظرية التطابق المناسبة.

ب. هل يتطابق المثلث ΔBDM مع المثلث ΔCEM؟
إذا كانت الإجابة نعم، فسجلوا ثلاثة ظروف حسبها يمكن استنتاج التطابق، وعللوا. إذا كانت الإجابة لا، فاشرحوا.

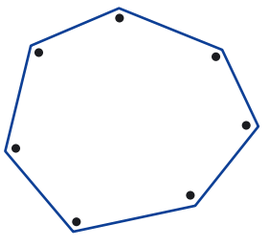
الدرس الثالث: مجموع زوايا خارجية للمضلع

يوجد 7 أضلاع في المضلع الذي يظهر في الرسمة.
هل يمكن أن نجد مجموع الزوايا الخارجية المشار إليها بنقطة دون استعمال القياس؟



نفحص مجموع الزوايا الخارجية للمضلعات المختلفة.

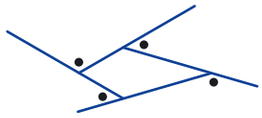
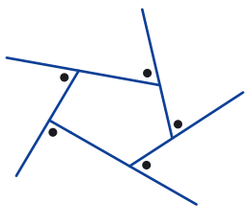
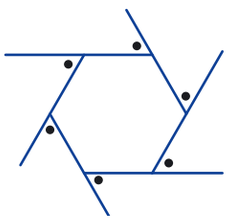
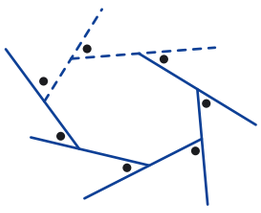
للتذكير



- مجموع الزوايا الداخلية في مضلع مكوَّن من n أضلاع (بالدرجات) يساوي $180(n-2)$، $n > 2$، عدد طبيعي.
- المضلع المنتظم هو مضلع جميع أضلاعه متساوية بالطول، وجميع زواياه متساوية بالمقدار.

1. أ. احسبوا مجموع زوايا المضلع المكوَّن من 5 أضلاع؟
ما هو مقدار كل زاوية في مضلع منتظم مكوَّن من 5 أضلاع؟
ب. ما هو مجموع زوايا المضلع المكوَّن من 15 ضلعًا؟
ما هو مقدار كل زاوية في مضلع منتظم مكوَّن من 15 ضلعًا؟

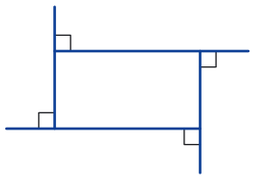
2. أمامكم رسومات مضلعات منتظمة. أشرنا إلى الزوايا الخارجية بنقطة.

شكل رباعي	شكل خماسي	مسدس	مضلع مكوَّن من n أضلاع
			

خمنوا: كيف يتغيَّر مجموع الزوايا الخارجية لمضلع محدب، عندما يكبر عدد أضلاع المضلع؟

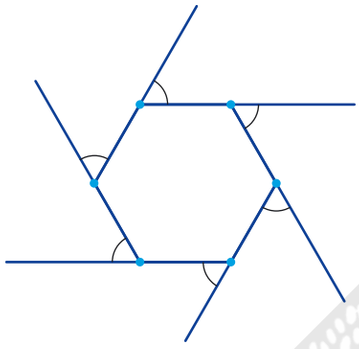
نفكّر بـ ...

3. قال **داود:** رأيت في المستطيل أن مجموع الزوايا الخارجية هو $360°$.
لذا أنا أفكر أن مجموع الزوايا الخارجية لكل مضلع يساوي مجموع الزوايا الداخلية لنفس المضلع: في المخمس $540°$، في المسدس $720°$ وغير ذلك.

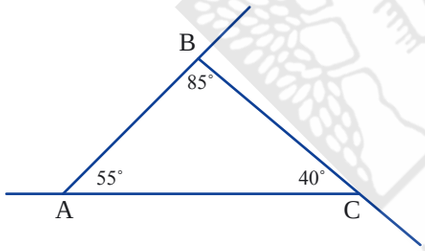


قال **رائد:** وجدنا أن مجموع الزوايا في المخمس هو $540°$ ومقدار كل زاوية داخلية في المخمس المنتظم هو $\frac{540}{5} = 108°$، لذا مقدار كل زاوية خارجية مجاورة للزاوية الداخلية هو $72°$، والمجموع هو $\mathbf{72 \cdot 5 = 360°}$
أيهما قوله صحيح؟

4. أ. جدوا مجموع زوايا المسدس.
ب. جدوا مقدار كل زاوية في المسدس المنتظم.
ت. جدوا مقدار كل زاوية خارجية للمسدس المنتظم.
ث. ما هو مجموع الزوايا الخارجية الست للمسدس المنتظم؟

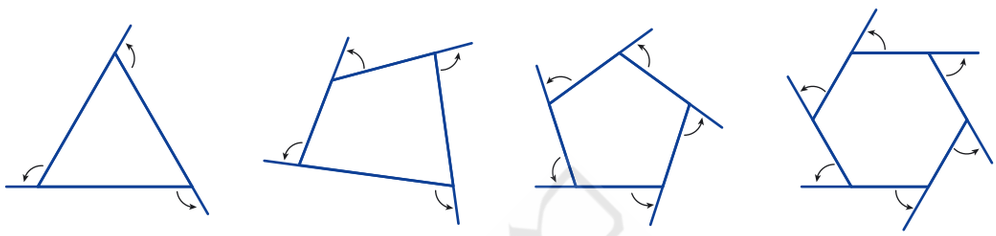


5. أ. جدوا مقدار كل زاوية خارجية للمثلث المرسوم.
ب. ما هو مجموع الزوايا الخارجية في المثلث المعطى؟



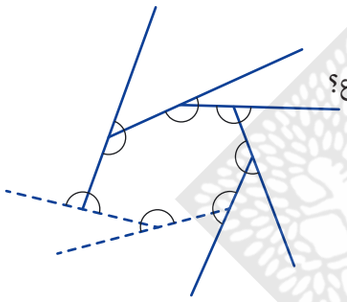
6. خمنوا: هل يمكن أن يكون مجموع الزوايا الخارجية للمضلع ثابت ويساوي $360°$ دائمًا؟
يمكنكم إيجاد الفعالية "مجموع الزوايا الخارجية للمضلع" " **"סכום זוויות חיצוניות במצולע"** في موقع "الرياضيات المدمجة"، في قسم "مواد تعليمية إضافية - "الهندسة للصف الثامن". ستفحصون في هذه الفعالية تخمينكم. نفذوا الفعالية حسب التعليمات.

7. خمنوا: هل يمكن أن يكون مجموع الزوايا الخارجية للمضلع ثابت ويساوي $360°$ دائمًا؟
تُشير الأسهم في الرسمة إلى حركة حول المضلع.
استعينوا بالرسمة واشرحوا لماذا مجموع الزوايا الخارجية للمضلع ثابت ويساوي $360°$ دائمًا؟

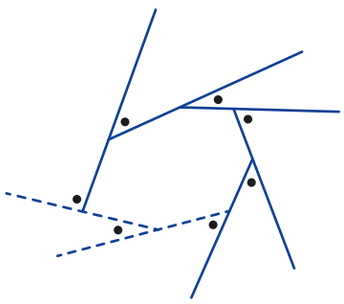


8. مجموع الزوايا الداخلية في المضلع المكوَّن من n أضلاع هو $180(n-2)$،
$n > 2$، عدد طبيعي.

أ. ما هو مجموع الزوايا **المجاورة** بجانب كل رأس في المضلع المكوَّن من n أضلاع؟



ب. عبروا عن مجموع الزوايا الخارجيةللمضلع المكوَّن من n أضلاع.



بيّنا أنه
في كل مضلع محدب مجموع الزوايا الخارجية غير متعلق بعدد الأضلاع، وهو **يساوي $360°$ دائمًا.**

زاوية الانعطاف في الشوارع

الانعطافات في الشوارع مبنية بميل معين، الطرف الجانبي للمنعطف منخفض أكثر من طرفه الخارجي.

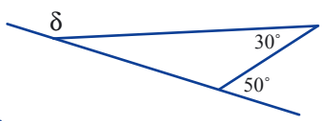
خلال انعطاف كل سيارة، تؤثر قوة طرد مركزية على أجسام تتحرك في حركة دائرية، تدفع قوة الطرد المركزية هذه الأجسام إلى "الخارج"، إلى القسم الخارجي للمنعطف وخارج مسار السفر.

يؤثر الاحتكاك بين إطار عجلات السيارة والشارع وميل الشارع على موازنة قوة الطرد المركزية، وهكذا نمنع انحراف خطير. بالمقارنة مع ذلك، تزيد العوامل الآتية من تأثير قوة الطرد المركزية وتُضعف قوة الاحتكاك بين العجلات والشارع، وهكذا تزيد من احتمال حدوث انحراف غير مرغوب: شارع رطب، بُقع زيت على الشارع، انعطاف مبني بميل غير مناسب، إطارات عجلات مصقولة (هرئة) وسرعة عالية للسيارة أثناء الانعطاف.

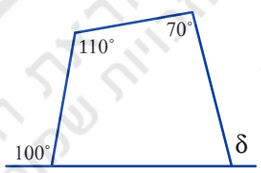
مجموعة مهامّ

1. احسبوا مقدار الزاوية δ. اشرحوا مراحل الحسابات.

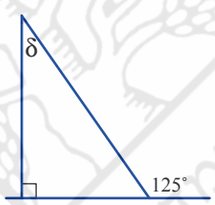
أ.



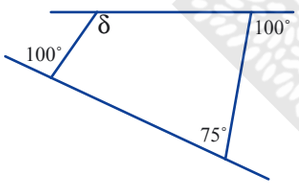
ب.



ت.

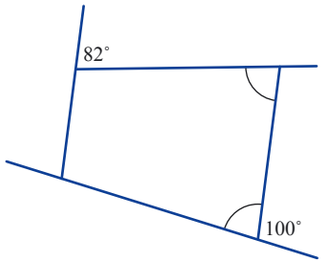


ث.

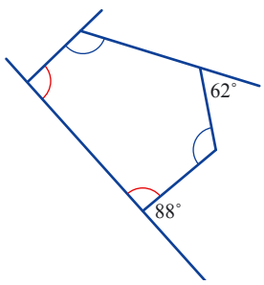


2. أشرنا في كل رسمة إلى الزوايا المتساوية بنفس الإشارة.
احسبوا زوايا المضلع.

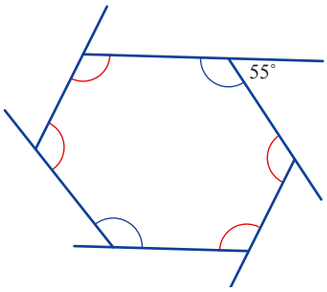
أ.



ب.

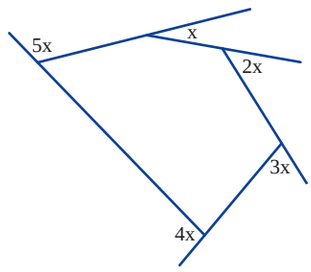


ت.

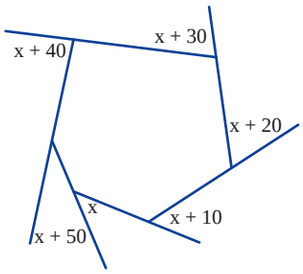


3. عبّرنا في كل رسمة عن الزوايا الخارجية بواسطة x (مقادير الزوايا معطاة بالدرجات، $x > 0$).
احسبوا مقادير الزوايا الخارجية والزوايا الداخلية في كل مضلع.

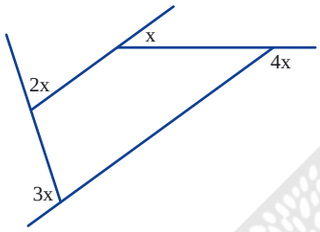
أ.



ب.



4. عبّرنا في الشكل الرباعي عن الزوايا الخارجية بواسطة x بالدرجات
$(x > 0)$.



أ. احسبوا الزاوية الخارجية.

ب. انسخوا الرسمة، سجِّلوا المقادير التي وجدتموها واحسبوا الزوايا الداخلية. إذا لم تخطئوا، فلكل زاوية خارجية للشكل الرباعي توجد زاوية داخلية تساويها.

5. معطى شكل سداسي ومعطاة ثلاث زوايا خارجية متساوية بالمقدار.
والزوايا الخارجية الثلاث الأخرى متساوية بالمقدار أيضًا.
مقدار إحدى الزوايا الخارجية هو °75.

أ. احسبوا جميع الزوايا الخارجية للمسدس.

ب. احسبوا مقادير جميع الزوايا الداخلية للمسدس.

6. معطى شكل خماسي ومعطاة ثلاث زوايا خارجية متساوية بالمقدار.
والزاويتان الخارجيتان الأُخرتين متساويتان بالمقدار أيضًا.

أ. مقدار إحدى الزوايا الخارجية هو °60.
احسبوا جميع الزوايا الخارجية للشكل الخماسي.
جدوا إجابة تختلف عن الإجابة التي وجدتموها وتُحقق المعطيات.

ب. مقدار إحدى الزوايا الخارجية للشكل الخماسي هو °72.
احسبوا جميع الزوايا الخارجية للشكل الخماسي.
هل توجد إجابة مختلفة تحقق المعطيات؟ اشرحوا.

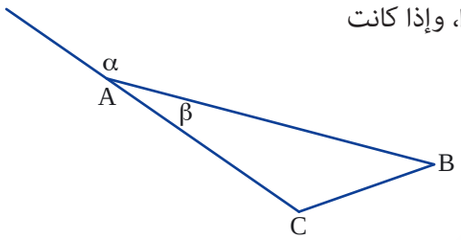
7. افحصوا في كل بند ما إذا يمكن أن نرسم مضلعًا محدبًا يحقق المعطيات.
إذا كانت الإجابة نعم، فسجلوا مقادير الزوايا الخارجية والزوايا الداخلية.
إذا لا فاشرحوا.

أ. شكل رباعي له 3 زوايا خارجية قائمة.

ب. شكل خماسي له 3 زوايا خارجية قائمة.

ت. شكل سداسي له 4 زوايا خارجية قائمة.

8. الزاوية α خارجية للمثلث ΔABC وهي مجاورة للزاوية β.
حددوا في كل بند ما إذا الادعاء الصحيح. إذا كانت الإجابة نعم فعللوا، وإذا كانت الإجابة لا فأعطوا مثالًا مضادًا



أ. $\alpha + \beta = 180^\circ$

ب. $\alpha = \sphericalangle B + \sphericalangle C$

ت. α أكبر من $\sphericalangle C$

ث. $\alpha = \beta + \sphericalangle C$

המחלקה להוראת המדעים
© כל הזכויות שמורות