الوحدة الثانية والعشرون: المثلّثات

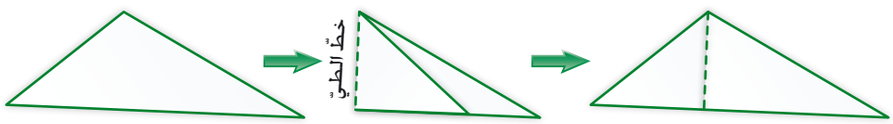
الدرس الأول: منصِّف الزّاوية في المثلّث

- قصُّوا مثلّثين منفرجي الزّاوية ومختلفي الأضلاع.
- اطووا أحد المثلّثين في رأس الزّاوية المنفرجة بحيث يغطّي ساقا الزّاوية بعضهما (انظروا الرّسمة).
- افتحوا المثلّث ولوِّنوا خطّ الطّيّ.

هل القطعة الّتي لوَّنتموها ارتفاع أم منصّف زاوية؟

نتعلَّم كيفيّة تمييز منصِّف الزّاوية في المثلّث والتمييز بينه وبين الارتفاع في المثلّث.

1. • قصُّوا مثلّثًا إضافيًّا منفرج الزّاوية ومختلف الأضلاع.
- اطووا المثلّث في رأس الزّاوية المنفرجة بحيث يغطّي قسما الضّلع الطّويل (للمثلّث) بعضهما (انظروا الرّسمة).

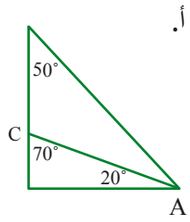


- افتحوا المثلّث ولوِّنوا خطّ الطّيّ.

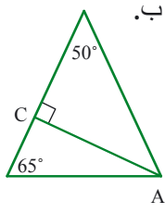
هل القطعة الّتي لوَّنتموها ارتفاع أم منصّف زاوية؟ اشرحوا.

2. احسبوا، في كلّ بند، مقادير الزوايا وجدوا في أيّ مثلّثات القطعة AC تنصِّف الزاوية A.

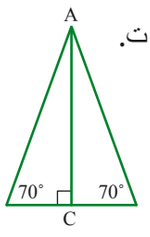
أ.



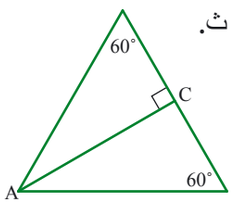
ب.



ت.

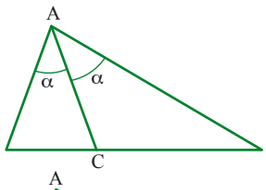


ث.



القطعة الّتي تنصِّف إحدى زوايا المثلّث نسمِّيها **منصِّف الزّاوية في المثلّث**.

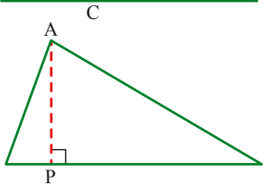
مثال: القطعة AC ، في رسمة المثلّث، تنصِّف الزّاوية A.



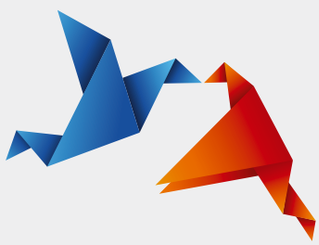
للتّذكير

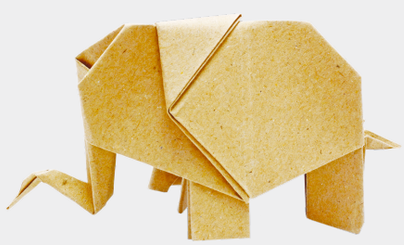
العمود القائم من أحد رؤوس المثلّث إلى الضّلع المقابل للرأس نسمِّيه **ارتفاعًا في المثلّث**.

مثال: القطعة AP، في رسمة المثلّث، هي ارتفاع.



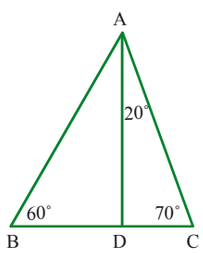
أوريجامي (في اللغة اليابانية، "أوري" -طيّ، جامي - ورق) هي فن من التّراث الياباني، وقد نشأَت في اليابان قبل حوالي 400 سنة، واشتهرت في الغرب قبل أقل من 100 سنة. يهدف هذا الفن إلى بناء أشكال وتماثيل ثلاثيّة الأبعاد بواسطة طيّ الورق أو أي مادة أخرى مُستوية، دون القص أو اللصق. بالإضافة إلى الهدف الفنيّ للأوريجامي، يوجد لها استعمالات في مجالات كثيرة، مثل:طُرق الرَّزم، هندسة المواد، الطّب وبناء مسائل رياضيّة.



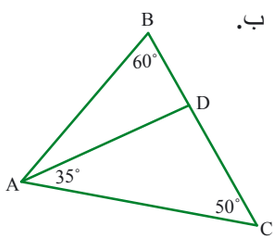


3. احسبوا، في كلّ بند، جميع الزوايا وحدِّدوا هل AD ارتفاع أم منصِّف زاوية في المثلّث؟

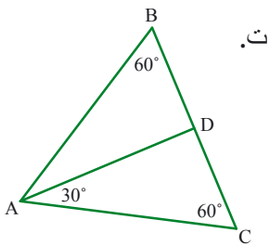
أ.



ب.



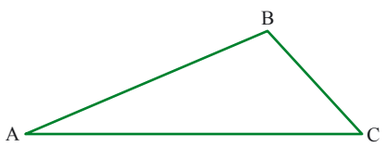
ت.



4. أ. قيسوا الزاوية B.

ب. ارسموا منصّف الزاوية B.

ت. ارسموا ارتفاعًا من الرأس B إلى الضلع AC.

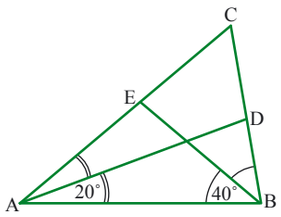


مجموعة مهامّ

1. أ. AD ينصِّف الزاوية $\angle A$ في المثلّث ΔABC.
احسبوا مقدار الزاويتين $\angle CAD$ وَ $\angle CAB$.

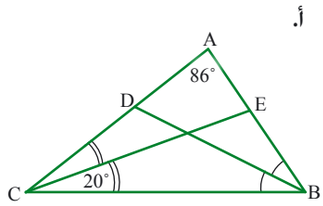
ب. BE ينصِّف الزاوية $\angle B$ في المثلّث ΔABC.
احسبوا مقدار الزاويتين $\angle CBE$ وَ $\angle CBA$.

ت. ما هو مقدار الزاوية $\angle C$؟

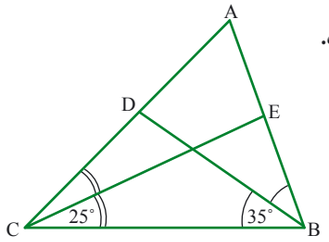


2. رُسم، في كلّ بند، مثلّث ΔABC ومنصِّفا زاويتين.
جِدوا مقدار جميع زوايا المثلّث ΔABC.

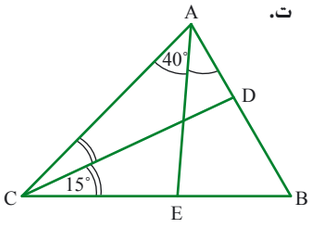
أ.



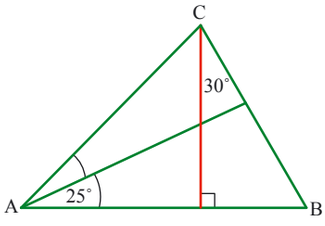
ب.



ت.

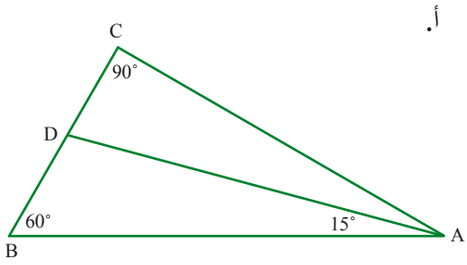


3. رُسم في المثلّث ارتفاع ومنصِّف زاوية (ليس من نفس الرأس).
جِدوا مقدار جميع زوايا المثلّث.

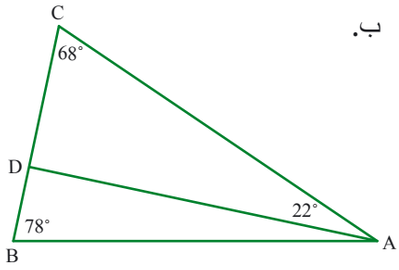


4. احسبوا، في كلّ بند، مقدار جميع زوايا المثلّث وحدّدوا هل AD هو منصِّف زاوية؟ هل AD ارتفاع في المثلّث؟

أ.



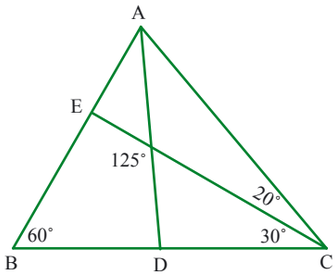
ب.



5. AD وَ CE هما قطعتان في المثلّث ΔABC.

أ. احسبوا مقدار الزوايا.

ب. هل AD منصِّف زاوية أم ارتفاع في المثلّث؟
هل CE منصِّف زاوية أم ارتفاع في المثلّث؟



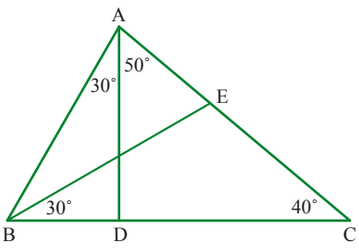
6. أمامكم رسمة المثلّث ΔABC.

أ. احسبوا مقدار الزوايا وسجِّلوا في الرسمة.

ب. هل رُسم منصِّف زاوية في المثلّث الّذي يظهر في الرسمة؟ إذا كانت الإجابة نعم فأيّ زاوية ينصِّف؟

ت. هل رُسم ارتفاع في المثلّث الّذي يظهر في الرسمة؟ إذا كانت الإجابة نعم لأيّ ضلع؟

ت. ما هو مقدار الزّاوية $\sphericalangle ABC$؟



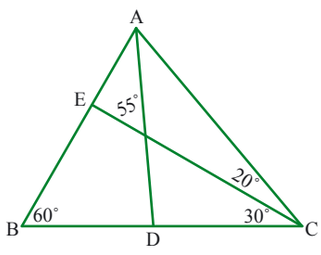
7. أمامكم رسمة المثلّث ΔABC.

أ. احسبوا مقدار الزوايا وسجِّلوا في الرسمة.

ب. هل رُسم منصِّف زاوية في المثلّث الّذي يظهر في الرسمة؟ إذا كانت الإجابة نعم فأيّ زاوية ينصِّف؟

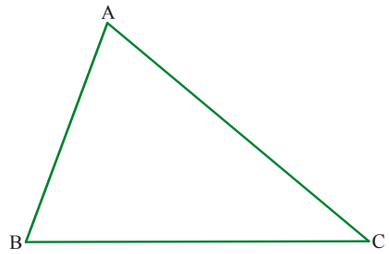
ت. هل رُسم ارتفاع في المثلّث الّذي يظهر في الرسمة؟ إذا كانت الإجابة نعم لأيّ ضلع؟

ث. ما هو مقدار الزّاوية $\sphericalangle BAC$؟



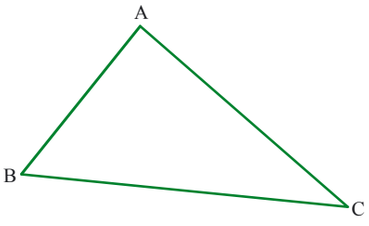
8. أ. ارسموا منصِّف الزاوية C.

ب. ارسموا ارتفاعًا للضلع BC.



9. أ. ارسموا منصِّف الزاوية A.

ب. ارسموا منصِّف الزاوية C.



الدرس الثاني: مثلّث متساوي السّاقين

خذوا ورقة مستطيلة الشّكل.

- ارسموا قُطرًا واحدًا وقصُّوا على طول القُطر.

ما هي المثلّثات الّتي حصلتم عليها؟

- ضعوا ضلعين متساويَيْن للمثلّثين بشكل متجاور بحيث

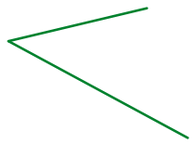
تحصلون على مثلّث جديد. ما هو المثلّث الّذي حصلتم عليه؟ ارسموه.

- قارنوا مع زملائكم. هل حصلتم على نفس المثلّث؟

نتعرَّف ونبحث صفات مثلّثات فيها ضلعان متساويان.

1. أكملوا كلّ رسمة بحيث تحصلون على مثلّث فيه ضلعان متساويان.

أ.



ب.

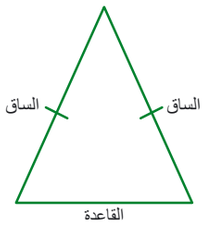
ت.

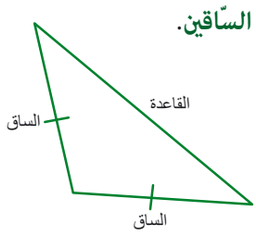
ث.

المثلّث الّذي فيه ضلعان متساويان نسمِّيه **مثلّثًا متساوي السّاقين**.

الضّلعان المتساويان نسمِّيهما **ساقين**.

الضّلع الثّالث نسمِّيه **قاعدة**.

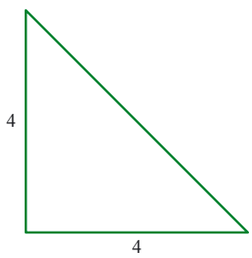




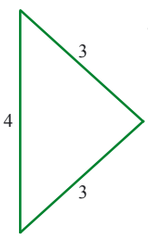
2. سجِّلوا، في كلّ بند، بجانب كلّ ضلع ما إذا كان الضلع ساقًا أو قاعدة.

(أُعِدّت الرسمتان للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

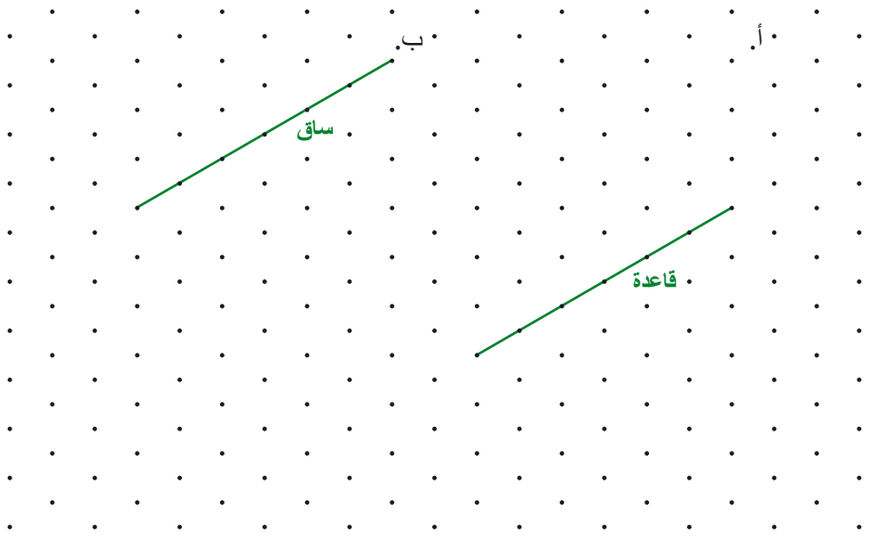
أ.



ب.

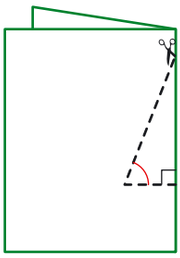


3. أكملوا كلّ رسمة إلى مثلّث متساوي الساقين. (تقع رؤوس المثلّثات في النقاط المشار إليها.).



4. أ. اطووا ورقة وانسخوا عليها رسمة المثلّث الّذي يظهر في الرسمة. قُصُّوا "شُباكًا" حسب الخطّ المتقطّع الّذي يظهر في الرّسمة، وافتحُوا الورقة.

ما هي صورة الشُباك الّذي حصلتم عليه؟ اشرحوا.



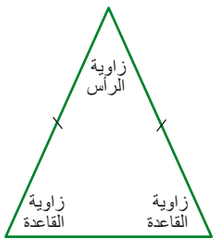
ب. أشيروا بقوس إلى الزاوية الّتي تساوي الزاوية المشار إليها بقوس **أحمر**.

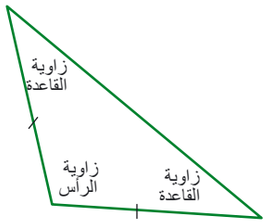
ت. اطووا المثلّث على طول خطّ الطيّ وافحصوا هل الزاويتان متساويتان؟

تعاريف

في المثلّث المتساوي السّاقين:

- الزّاويتان اللّتان تقعان بجانب القاعدة نسمِّيهما **زوايتي القاعدة.**
- الزّاويةَ الّتي تقع بين السّاقين نسمِّيها **زاوية الرّأس**.

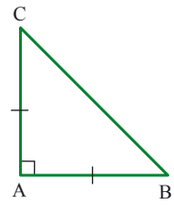




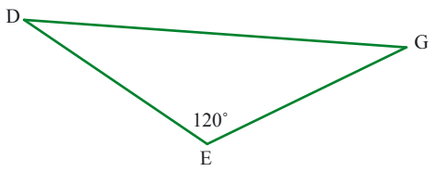
رأينا في المهمة 4 أنّ:

زاويتا القاعدة في مثلّث متساوي السّاقين متساويتان. نبرهن هذه الحقيقة في المستقبل.

5. أ. ΔABC هو مثلّث قائم الزّاوية ومتساوي السّاقين.
أشيروا، في الرسمة، إلى زاويتيِ القاعدة واحسبوا مقدارهما.



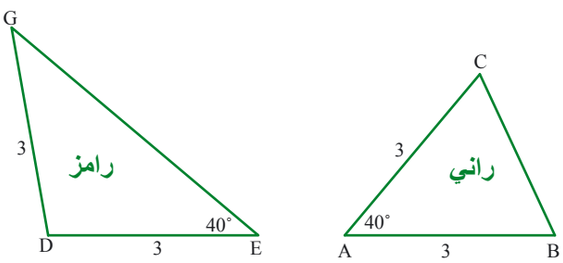
ب. ΔDEG هو مثلّث متساوي السّاقين، مقدار زاوية الرأس $120°$.
أشيروا، في الرسمة، إلى هذه الزاوية واحسبوا مقدار زاويتيِ القاعدة.



ت. هل يمكن أن يكون مقدار زاوية الرأس $95°$ في المثلّث المتساوي الساقين؟

ت. هل يمكن أن يكون مقدار زاوية القاعدة $95°$ في المثلّث المتساوي الساقين؟ اشرحوا.

6. مقدار إحدى زوايا مثلّث متساوي الساقين هو $40°$.
سجِّل **راني** و**رامز** المعطى بشكل مختلف.
احسبوا مقدار زوايا مثلّث **راني**، و**مقدار** زوايا مثلّث **رامز**.
سجّلوا مقدار الزوايا في الرسمتين.
اشرحوا لماذا الإجابات مختلفة؟
(أُعِدّت الرسمتان للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).



7. انسخوا الجدول وارسموا مثلّثًا مناسبًا في كلّ مكان فارغ.

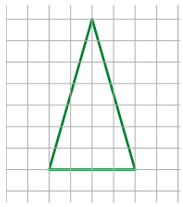
	مثلّث متساوي السّاقين	مثلّث مختلف الأضلاع
مثلث قائم الزّاويّة		
مثلث منفرج الزّاويّة		
مثلث حادّ الزّوايا		

مجموعة مهامّ

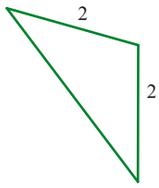
أُعِدّت الرسومات في المهام الآتية للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

1. سجِّلوا، في كلّ بند، بجانب كلّ ضلع ما إذا كان الضلع ساقًا أو قاعدة.

أ.

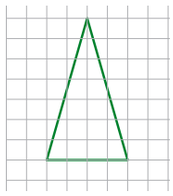


ب.

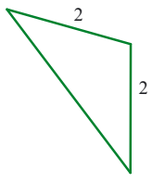


2. سجِّلوا، في كلّ بند، بجانب كلّ زاوية ما إذا هي زاوية رأس أم زاوية قاعدة.

أ.

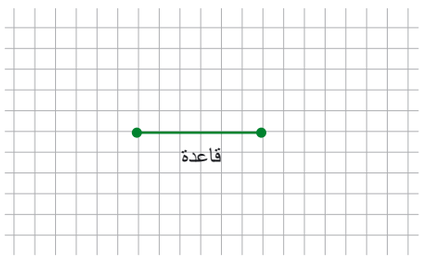


ب.

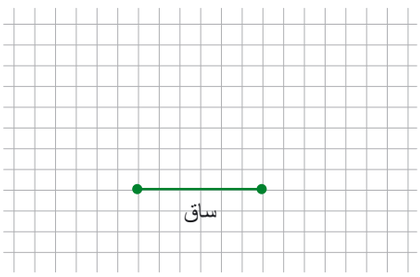


3. أكملوا كلّ رسمة إلى مثلث متساوي الساقين.

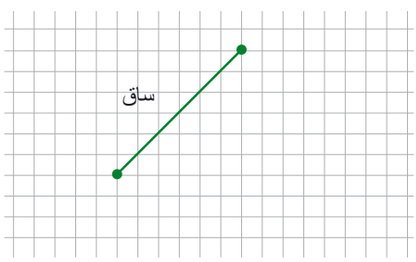
أ.



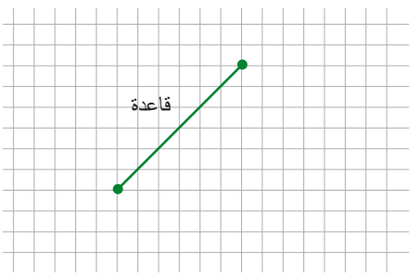
ب.



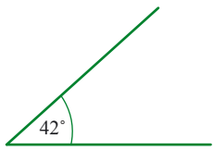
ت.



ث.



4. الزّاوية الّتي أمامكم هي زاوية الرّأس في مثلّث متساوي السّاقين.



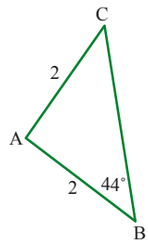
أ. أكملوا إلى مثلّث متساوي السّاقين.

ب. أكملوا إلى مثلّث متساوي السّاقين بحيث يختلف عن المثلّث السابق.

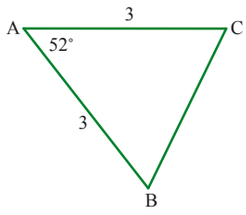
ت. كم مثلّثًا متساوي السّاقين يمكن أنْ نرسم بحيث يكون مقدار الزّاوية في كلّ منها 42°؟

5. رُسم، في كلّ بند، مثلّث متساوي السّاقين.
احسبوا مقدار الزوايا غير المعطاة.

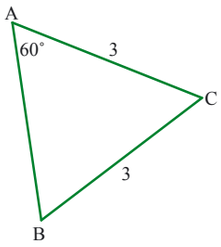
أ.



ب.



ت.



6. اشرحوا لماذا كلّ ادّعاء من الادّعاءات الآتية هو ادّعاء صحيح.

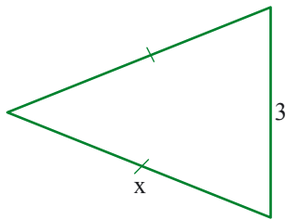
أ. في المثلّث القائم الزّاوية والمتساوي السّاقين، مقدار زاوية القاعدة هو 45°.

ب. في المثلّث المنفرج الزّاوية والمتساوي السّاقين، الزّاوية المنفرجة هي زاوية الرأس.

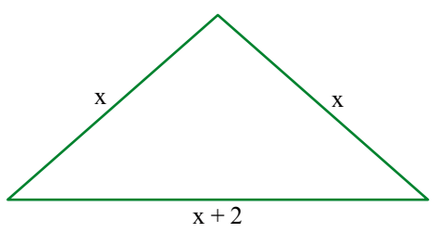
ت. في المثلّث المتساوي السّاقين، زاويتا القاعدة حادّتان.

7. جدوا، في كلّ بند، أطوال أضلاع المثلّث حسب مُعطيات الرّسمة.

أ. محيط المثلّث 11 سم $(x > 1.5)$

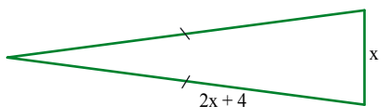


ب. محيط المثلّث 14 سم $(x > 2)$

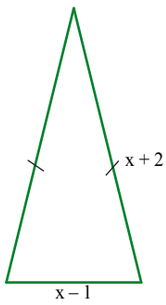


8. جدوا، في كلّ بند، أطوال أضلاع المثلّث.

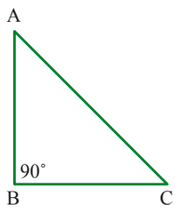
أ. محيط المثلّث 18 سم $(x > 0)$



ب. محيط المثلّث 15 سم $(x > 1)$



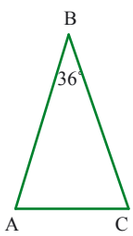
9. المثلّث ΔABC هو مثلّث متساوي السّاقين وقائم الزاوية.



أ. احسبوا مقدار زوايا المثلّث.

ب. كم ضعفًا زاوية الرّأس أكبر من زاوية القاعدة؟

10. المثلّث ΔABC هو مثلّث متساوي السّاقين (الزاوية B هي زاوية الرأس).



أ. احسبوا مقدار زوايا المثلّث.

ب. كم ضعفًا زاوية القاعدة أكبر من زاوية الرأس؟

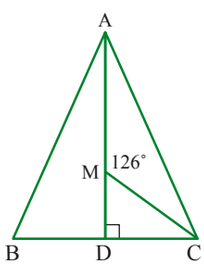
11. معطى: مثلّث ΔABC متساوى السّاقين $(AB = AC)$.

CM ينصّف الزاوية $\sphericalangle ACD$

AD ارتفاع للضّلع BC

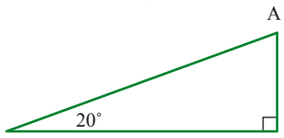
$\sphericalangle AMC = 126°$

احسبوا مقدار زوايا المثلّث ΔABC.



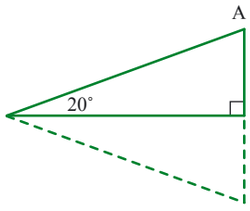
12.أ. ما هو مقدار الزاوية $\angle A$ الّتي تظهر في الرّسمة I؟

I



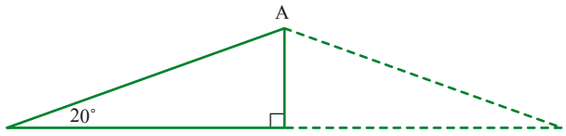
ب. أكملت **مريم** المثلّث الّذي يظهر في الرسمة I إلى مثلّث متساوي الساقين.
انظروا الرسمة II.
احسبوا مقدار الزوايا في مثلّث **مريم** في الرسمة II.

II



ب. أكملت **مروة** المثلّث الّذي يظهر في الرسمة I إلى مثلّث متساوي الساقين.
انظروا الرسمة III.
احسبوا مقدار الزوايا في مثلّث **مروة** في الرسمة III.

III

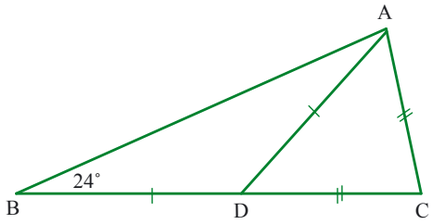


ت. أي مثلّث محيطه أكبر: المثلّث في الرسمة II أم المثلّث في الرسمة III؟

ث. أحيطوا الكلمة المناسبة.
مساحة المثلّث في الرسمة II أكبر من/ أصغر من/ تساوي مساحة المثلّث في الرسمة III.

13. احسبوا مقدار الزاوية $\angle BAC$ حسب المعطيات المشار إليها في الرسمة.

.



الدرس الثالث: مثلّث متساوي الأضلاع

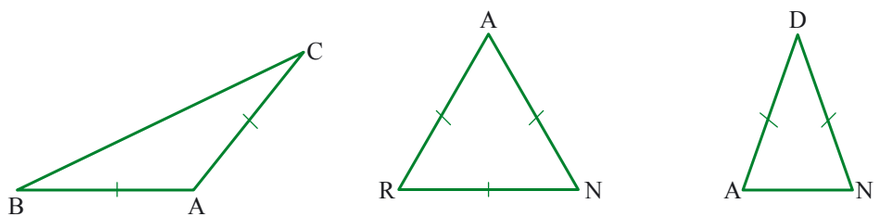
أمامكم أربع صور لإشارات مرورية مثلّثة الشكل.

ماذا تدل كلّ إشارة مرورية؟

هل جميع المثلّثات في الإشارات المرورية هي مثلّثات متساوية الساقين؟ ما هو الخاص بهذه المثلّثات؟

نبحث ونتعرَّف على صفات مثلّث متساوي الأضلاع.

1. أ. جميع المثلّثات الّتي تظهر في الرسمة هي مثلّثات متساوية الساقين، وقد أشرنا فيها إلى الأضلاع المتساوية. اذكروا، في كلّ مثلّث، ما إذا كان الضلع ساقًا أو قاعدة.



ب. سجّلت **جمانة**: في المثلّث RAN الضلعان RA وَ AN هما ساقان وَ RN هو قاعدة.

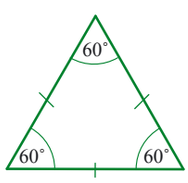
سجّلت **مريم**: في المثلّث RAN الضلعان RA وَ RN هما ساقان وَ AN هو قاعدة.

أيَّتهُما قولها صحيح؟ وهل ربما قولهما صحيحان؟ اشرحوا.

ت. أشيروا إلى الزوايا المتساوية بالمقدار في المثلّث RAN. اشرحوا.

ث. احسبوا مقدار جميع الزوايا في المثلّث RAN.

المثلّث الّذي جميع أضلاعه متساوية نسمّيه **مثلّثًا متساوي الأضلاع.**



مقدار **كلّ زاوية** في المثلّث المتساوي الأضلاع **هو 60°.**

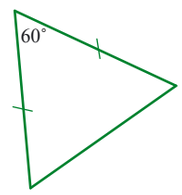
2. أ. ما هو نوع المثلّث الّذي ترونه على علَم تشيكوسلوفاكيا؟

ب. كم مثلّثًا متساوي الأضلاع يوجد في نجمة داوود الّتي ترونها على علَم إسرائيل؟

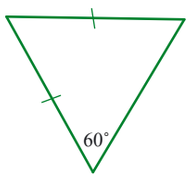
ت. جدوا أنواع المثلّثات الّتي ظهرت في مهمّة الافتتاحيّة.

3. اشرحوا كلّ ادّعاء من الادّعاءات الآتية:

أ. إذا كان مقدار زاوية الرّأس في مثلّث متساوي السّاقين 60°، فإنّ جميع زوايا المثلّث متساوية.



ت. إذا كان مقدار زاوية القاعدة في مثلّث متساوي السّاقين 60°، فإنّ جميع زوايا المثلّث متساوية.



تصنيف مثلّثات

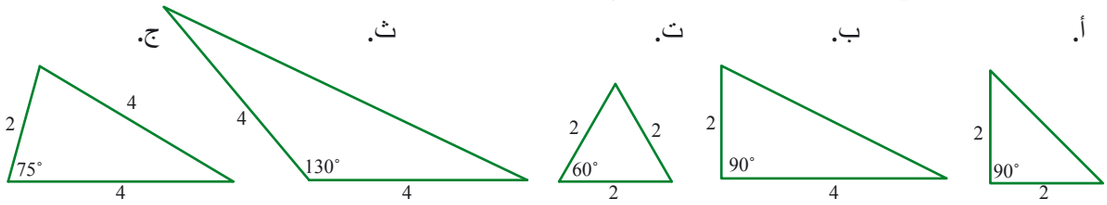
4. في موقع "الرّياضيّات المدمجة"، في قسم "مواد تعليميّة إضافيّة"، تجدون فعّاليّة "تصنيف مثلّثات" **"מיון משולשים"**. نبحث، في هذه الفعّاليّة، أنواع المثلّثات الموجودة. نفّذوا الفعّاليّة حسب التّعليمات.

5. أ. هل يوجد مثلّث قائم الزّاوية ومتساوي الأضلاع؟
إذا وجدتم مثلّثًا كهذا فارسُموه. إذا لم تجِدوا فاشرحوا.

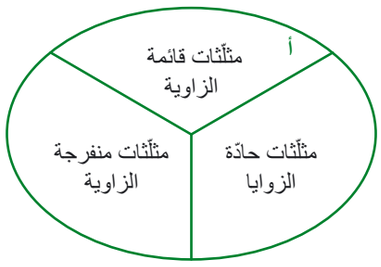
ب. هل يوجد مثلّث منفرج الزّاوية ومتساوي الأضلاع؟
إذا وجدتم مثلّثًا كهذا فارسُموه. إذا لم تجِدوا فاشرحوا.

6. أمامكم خمسة مثلّثات (أشرنا إليها بالحروف أ - ج).
سجِّلوا الحرف الموجود بجانب كلّ مثلّث في المكان المناسب في الرسوم التخطيطيّة الآتية. انظروا الحرف أ كمثال (أُعِدّت الرسومات للتوضيح وقياسات الطّول معطاة بالسّم) .

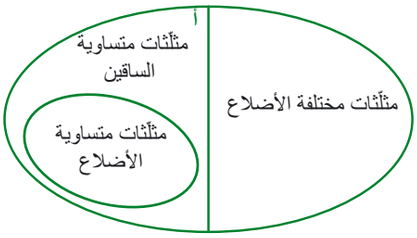
أ. ب. ت. ث. ج.



تصنيف حسب الزوايا



تصنيف حسب الأضلاع

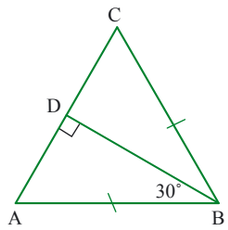


7. ارسموا مثالًا مناسبًا لكلّ مثلّث في المكان المناسب في الجدول.

حسب الزوايا / حسب الأضلاع	حادّ الزوايا	قائم الزاوية	منفرج الزاوية
مختلف الأضلاع			
متساوي الساقين			
متساوي الأضلاع			

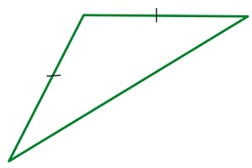
مجموعة مهامّ

1. القطعة BD هي ارتفاع ومنصِّف زاوية في المثلّث ΔABC.
احسبوا مقدار زوايا المثلّث ΔABC
حسب المعطيات المشار إليها في الرسمة.

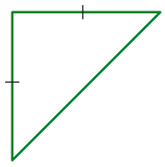


2. أشيروا، في كلّ بند، بقوس إلى الزوايا المتساوية بالمقدار.

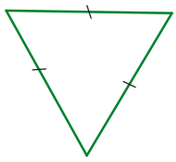
أ.



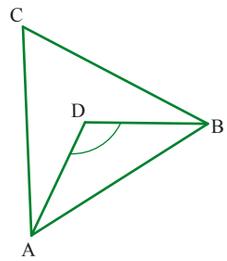
ب.



ت.



3. المثلّث ΔABC متساوي الأضلاع.
القطعتان BD وَ AD هما منصِّفتا زاويتَيْن في المثلّث.
احسبوا مقدار الزّاوية $\measuredangle ADB$.



4. أ. اشرحوا لماذا كلّ مثلّث متساوي الأضلاع هو مثلّث متساوي السّاقين أيضًا؟
ب. اشرحوا لماذا كلّ مثلّث متساوي الأضلاع هو مثلّث حادّ الزوايا أيضًا؟

5. أ. ارسموا مثلّثًا متساوي الساقين وقائم الزاوية. سجّلوا، في الرسمة، مقدار الزوايا.
ب. ارسموا مثلّثًا متساوي الساقين مقدار زاوية الرأس فيه $60°$. سجّلوا، في الرسمة، مقدار الزوايا.

6. أ. ابنوا مثلّثًا من ثلاثة عيدان ثقاب (أو مسواك) دون أنْ تكسروها. ما هو نوع المثلّث الّذي حصلتم عليه؟
ب. ابنوا مثلّثًا من خمسة عيدان ثقاب (أو مسواك) دون أنْ تكسروها. ما هو نوع المثلّث الّذي حصلتم عليه؟

7. بنى **ضرار** نفس نوع المثلّث من ثلاثة عيدان ثقاب ومن ستة عيدان ثقاب.
ما هو نوع المثلّث الّذي بناه **ضرار**؟

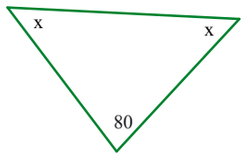
8. أ. هل تستطيعون أنْ تبنوا مثلّثًا من ثلاثة عيدان ثقاب (دون أنْ تكسروها)؟ حاولوا واشرحوا.
ب. كم مثلّثًا مختلفًا يمكن أن نبني من 7 عيدان ثقاب؟

نحافظ على لياقة رياضيّة

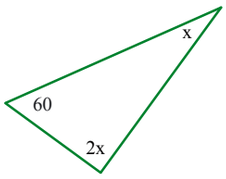
مجموع زوايا المثلّث والشكل الرباعيّ

1. احسبوا، في كلّ بند، مقدار زوايا المثلّث ($x > 0$, معطى مقدار الزاوية بالدرجات).

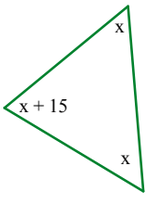
أ.



ب.



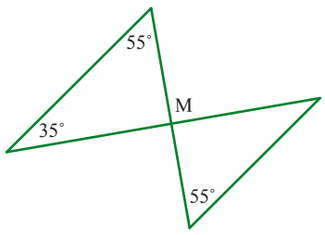
ت.



2. معطى، في كلّ بند، مقدار ثلاث زوايا.
هل يمكن أن تكون الزوايا الثلاث في نفس المثلّث؟ اشرحوا.

أ. $55°, 35°, 100°$ ب. $34°, 28°, 118°$ ت. $72°, 44°, 64°$

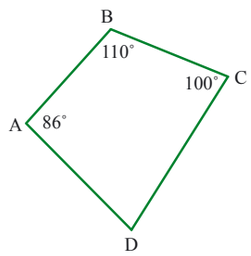
3. احسبوا مقدار جميع الزوايا في الرسمة.



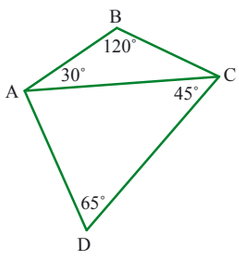
4. أ. مقدار إحدى زوايا مثلّث قائم الزاوية هي $50°$.
ارسموا مثلّثًا يعرض ذلك واحسبوا مقدار الزوايا الأخرى.
ب. معطى في مثلّث زاويتان متساويتان، مقدار كلّ واحدة منهما $28°$.
ارسموا مثلّثًا يعرض ذلك واحسبوا مقدار الزاوية الثالثة.

5. احسبوا، في كلّ بند، مقدار زوايا الشكل الرباعيّ.

أ.



ب.



6. معطى في الشكل الرباعيّ ABCD أن $AB||CD$.
احسبوا مقدار زوايا الشكل الرباعيّ.