



יחידה 7: זוויות חיצוניות

שיעור 1. זווית חיצונית למצולע

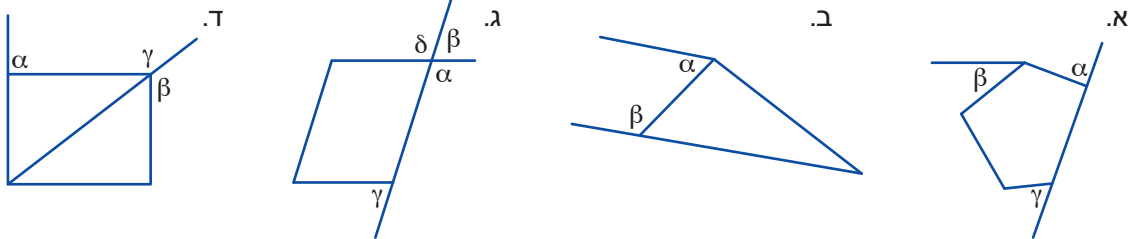
מה המשותף לכל הזוויות המסומנות ב-? ■



נכיר זווית חיצונית למצולע, ונמצא תכונה של זווית חיצונית למשולש.

זווית חיצונית למצולע

1. כל הזוויות המסומנות במשימת הפתיחה הן זוויות חיצוניות למצולע קמור. בכל סעיף ציינו אילו מהזוויות המסומנות אינן זוויות חיצוניות למצולע. הסבירו.



זווית צמודה לאחת מהזוויות של מצולע קמור נקראת **זווית חיצונית למצולע**.

2. א. שרטטו משולש ואת כל הזוויות החיצוניות שלו.
 כמה זוויות חיצוניות יש למשולש?
 ב. כמה זוויות חיצוניות יש למרובע? הסבירו.
 ג. כמה זוויות חיצוניות קיימות ליד כל קדקוד במצולע?

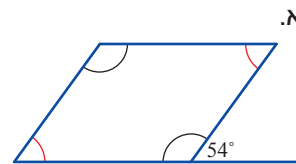
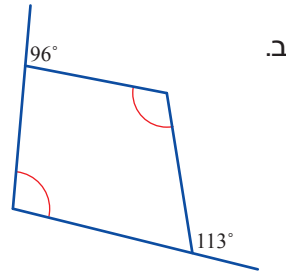
3. א. שרטטו משולש חד-זוויות ואת הזוויות החיצוניות שלו (אחת ליד כל קדקוד).
 ב. שרטטו משולש ישר-זוויות וזווית חיצונית הצמודה לאחת הזוויות החדות שלו.
 ג. שרטטו משולש קהה-זוויות וזווית חיצונית הצמודה לזווית הקהה שלו.



שימו לב

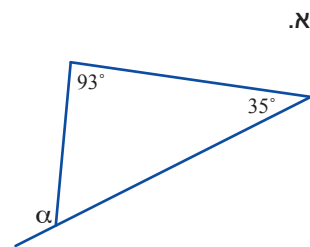
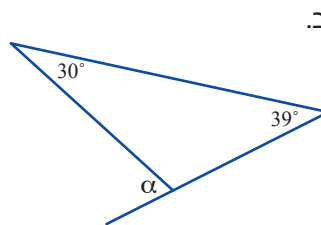
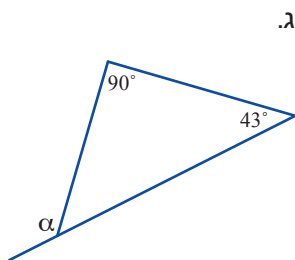
מכאן ואילך, נתייחס לזוויות חיצונית אחת ליד כל קדקוד.

4. בכל שרטוט, זוויות שוות מסומנות באותו צבע. חשבו את זוויות המצולע.



זווית חיצונית למשולש

5. בכל סעיף, חשבו את גודל זווית α .



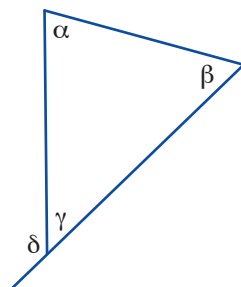
חושבים על...

6. א. בטאו את גודל הזווית δ באמצעות γ .

ב. בטאו את גודל הזווית δ באמצעות α ו- β .

ג. גילי אמרה: גודל הזווית החיצונית δ שווה ל- $\alpha + \beta$.

האם גילי צודקת? הסבירו.



משפט

זווית חיצונית למשולש שווה בגודלה לסכום הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

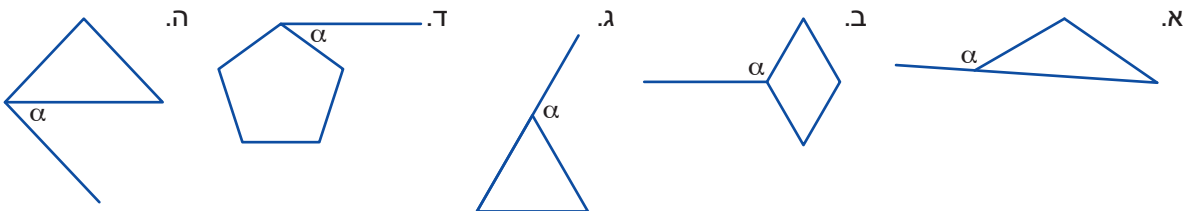
7. בכל סעיף, חשבו את הגדלים של זוויות המשולש (שרטטו שרטוט מדגים).
- א. גודל אחת הזוויות במשולש הוא 42° , וגודל אחת הזוויות החיצוניות 80° .
- ב. גודל אחת הזוויות החיצוניות במשולש הוא 130° , וגודל זווית חיצונית אחרת הוא 70° .



אוסף משימות



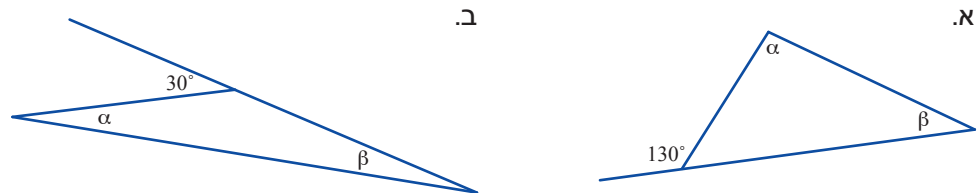
1. באילו סעיפים הזווית α היא זווית חיצונית?



2. א. שרטטו משולש בעל זווית חיצונית ישרה. איזה משולש קיבלתם?
- ב. שרטטו משולש בעל זווית חיצונית חדה. איזה משולש קיבלתם?
- ג. שרטטו משולש שכל זוויותיו החיצוניות קהות. איזה משולש קיבלתם? הסבירו.



3. בכל סעיף רשמו שלוש אפשרויות לגדלים של הזוויות α ו- β .



4. קבעו אם הטענות הבאות נכונות.
- אם כן, הסבירו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
- א. אם במשולש יש זווית חיצונית חדה, אז המשולש קהה-זווית.
- ב. אם במשולש יש זווית חיצונית קהה, אז המשולש חד-זווית.
- ג. אם במשולש יש שתי זוויות חיצוניות קהות, אז המשולש חד-זווית.
- ד. אם במשולש יש שלוש זוויות חיצוניות קהות, אז המשולש חד-זווית.



5. היעזרו בשרטוטים מדגימים ובדקו:

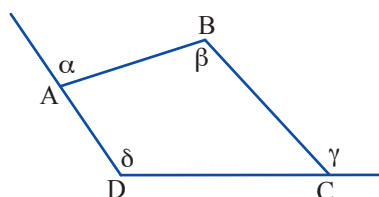
- א. האם ייתכן משולש שבו כל הזוויות החיצוניות חדות? הסבירו.
- ב. האם ייתכן משולש שבו כל הזוויות החיצוניות קהות? הסבירו.
- ג. האם ייתכן משולש שבו שתי זוויות חיצוניות חדות וזווית חיצונית אחת קהה? הסבירו.
- ד. האם ייתכן משולש שבו שתי זוויות חיצוניות קהות וזווית חיצונית אחת חדה? הסבירו.
- ה. האם ייתכן משולש שבו שתי זוויות חיצוניות קהות וזווית חיצונית אחת ישרה? הסבירו.



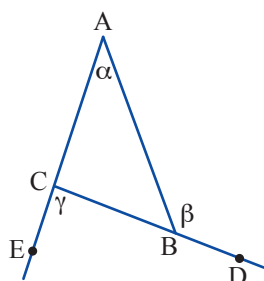
6. בכל סעיף, חשבו את הגדלים של זוויות המשולש (שרטטו שרטוט מדגים).
- א. גודל אחת הזוויות במשולש הוא 102° , וגודל אחת הזוויות החיצוניות 125° .
 - ב. גודל כל אחת משתי זוויות חיצוניות במשולש הוא 135° . מהו סוג המשולש?



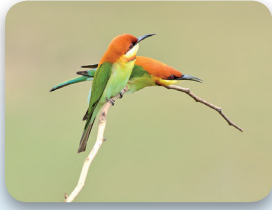
7. בכל סעיף קבעו אם ייתכן משולש המקיים את הנתונים, והסבירו.
- א. גודל אחת הזוויות במשולש הוא 102° , וגודל אחת הזוויות החיצוניות 102° .
 - ב. גודל אחת הזוויות החיצוניות של המשולש 95° , וגודל זווית חיצונית אחרת 112° .
 - ג. גודל אחת הזוויות במשולש הוא 130° , וגודל אחת הזוויות החיצוניות 70° .
 - ד. גודל אחת הזוויות במשולש הוא 130° , וגודל אחת הזוויות החיצוניות 50° .



8. בשרטוט מסומנות ארבע זוויות.
הראו כי $\alpha + \gamma = \beta + \delta$
(רמז: שרטטו את BD)



9. נתון: $\beta = \alpha + \gamma$
מהו סוג המשולש $\triangle ABC$? הסבירו.



שיעור 2. זווית חיצונית וחפיפת משולשים

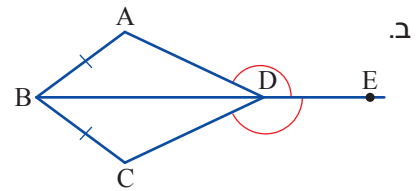
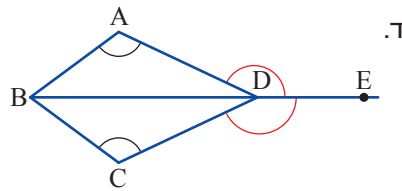
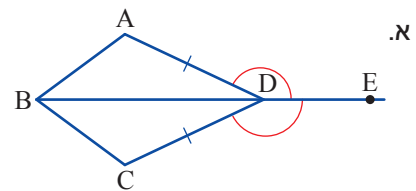
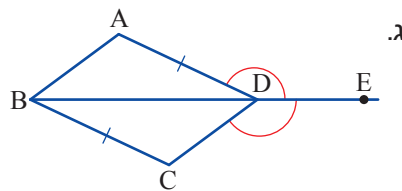
האם המשולשים שבשרטוט חופפים? הסבירו.
(קטעים שווים באורכם, וזוויות שוות בגודלן מסומנים באותו סימון.)



נשתמש בתכונה של זווית חיצונית למשולש כדי לחפוף משולשים.

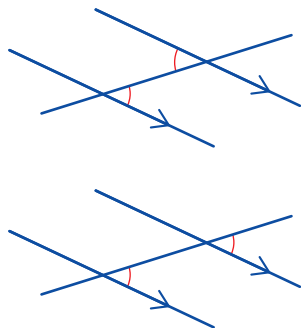


1. בכל סעיף, קבעו לפי הנתונים בשרטוט, אם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים.
אם כן, רשמו שלושה תנאים ואת משפט החפיפה המתאים.
אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



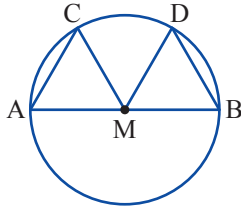
תזכורת

- זוויות מתחלפות בין מקבילים שוות בגודלן.
- זוויות מתאימות בין מקבילים שוות בגודלן.

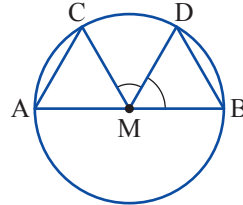


2. בכל סעיף, קבעו לפי הנתונים בשרטוט, אם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים. אם כן, רשמו שלושה תנאים ואת משפט החפיפה המתאים. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

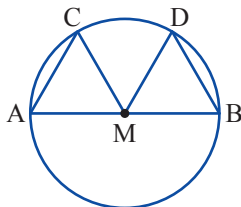
ג. נתון: AB קוטר במעגל
 \sphericalangle BMC חוצה את MD
 \sphericalangle AMD חוצה את MC



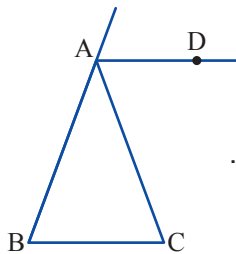
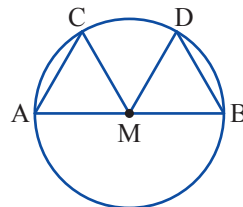
א. נתון: AB קוטר במעגל
 \sphericalangle BMC חוצה את MD



ד. נתון: AB קוטר במעגל
 $BD \parallel MC$

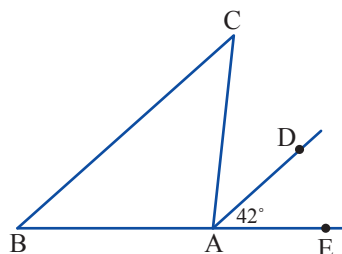


ב. נתון: AB קוטר במעגל
 $BD = AC$

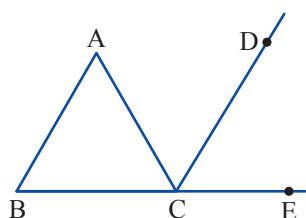


3. משולש $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים שבו $AC = AB$.
 דרך קדקוד זווית הראש העבירו מקביל לבסיס: $AD \parallel BC$.
 א. העתיקו את השרטוט וסמנו זוויות שוות בגודלן.
 ב. הסבירו מדוע AD חוצה את הזווית החיצונית הצמודה לזווית הראש של המשולש.

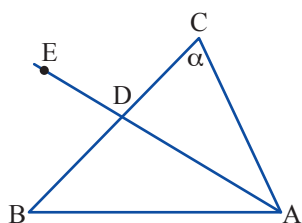




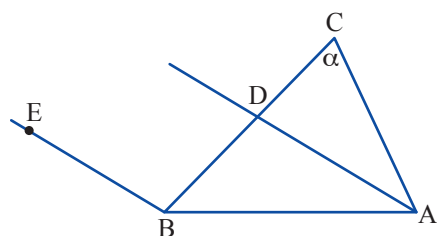
1. נתון: $\triangle ABC$ שווה-שוקיים, A קדקוד זווית הראש.
 $AD \parallel BC$
 $\angle DAE = 42^\circ$
 חשבו את הגדלים של זוויות המשולש ABC .



2. נתון: $\triangle ABC$ שווה-שוקיים ($AC = AB$).
 CD מקביל לשוק AB , וחוצה את הזווית החיצונית הצמודה ל- $\angle ACB$.
 $\angle DCE = \alpha$
 חשבו את הגדלים של זוויות המשולש.



3. נתון: $\triangle ABC$ שווה-שוקיים ($AB = BC$).
 AD חוצה את $\angle BAC$.
 א. רשמו את הנתונים בכתיב מתמטי.
 ב. חשבו את גודל הזווית $\angle EDC$ אם $\alpha = 50^\circ$.
 ג. בטאו את גודל הזווית $\angle EDC$ באמצעות α .



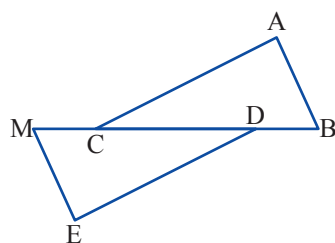
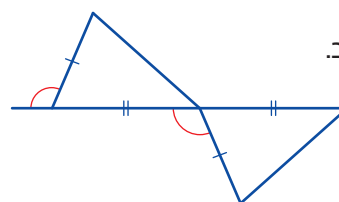
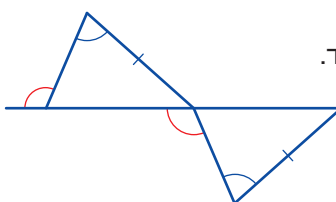
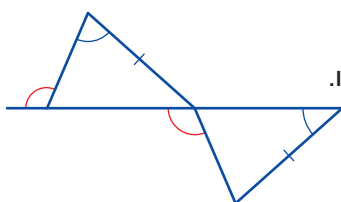
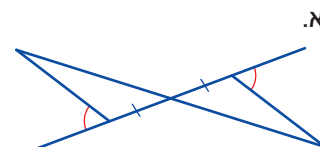
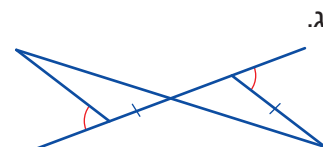
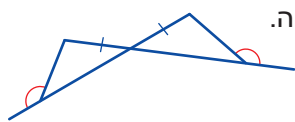
4. נתון: $\triangle ABC$ שווה-שוקיים ($BA = BC$).
 AD חוצה את זווית $\angle CAB$.
 BE מקביל לחוצה הזווית.
 א. רשמו את הנתונים בכתיב מתמטי.
 ב. חשבו את גודל הזווית $\angle EBD$ אם $\alpha = 55^\circ$.
 ג. בטאו את גודל הזווית $\angle EBD$ באמצעות α .



5. בכל סעיף, קבעו לפי הנתונים בשרטוט, אם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים.

אם כן, העתיקו וסמנו גדלים שווים נוספים, וציינו את משפט החפיפה המתאים.

אם לא, הסבירו, או שרטטו דוגמה נגדית.



6. נתון: $AB \parallel ME$

$$AC = DE$$

$$\sphericalangle EDB = \sphericalangle ACM$$

א. העתיקו את השרטוט וסמנו בו את הנתונים.

ב. רשמו שלושה תנאים שלפיהם ניתן להסיק שהמשולשים חופפים, ואת משפט החפיפה המתאים.



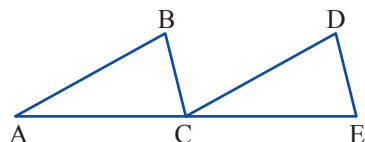


7. בכל סעיף, העתיקו את השרטוט, וסמנו זוויות שוות וקטעים שווים.

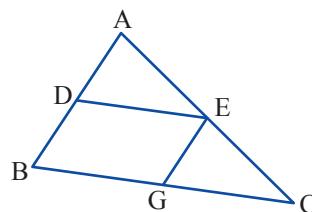
בדקו אם אפשר להסיק שיש בשרטוט משולשים חופפים.

אם כן, הסבירו וציינו משפט חפיפה מתאים.

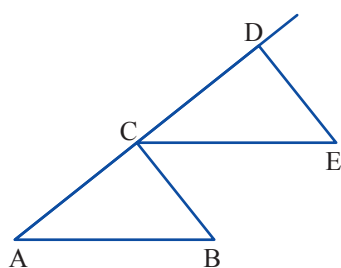
ג. נתון: $AB \parallel CD$
 $BC \parallel DE$
 C אמצע AE



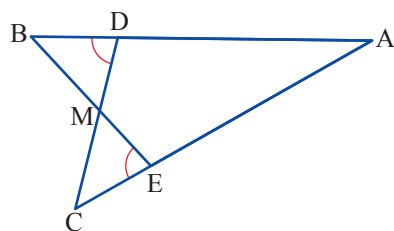
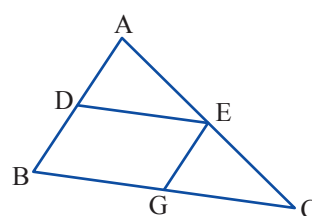
א. נתון: $BC \parallel DE$
 $AB \parallel EG$



ד. נתון: $AB \parallel CE$
 $CB \parallel DE$
 AD אמצע CE



ב. נתון: $DE \parallel BC$
 $EG \parallel AB$
 AC אמצע E



8. נתון: $AC = AB$

$$\sphericalangle CEB = \sphericalangle BDC$$

א. רשמו שלושה תנאים שמהם ניתן להסיק ש: $\triangle BAE \cong \triangle CAD$, וציינו את משפט החפיפה המתאים.

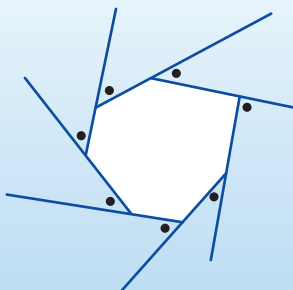
ב. האם $\triangle BDM$ חופף ל- $\triangle CEM$?

אם כן, רשמו שלושה תנאים שלפיהם ניתן להסיק את החפיפה, ונמקו. אם לא, הסבירו.

שיעור 3. סכום זוויות חיצוניות במצולע

במצולע שבשרטוט 7 צלעות.

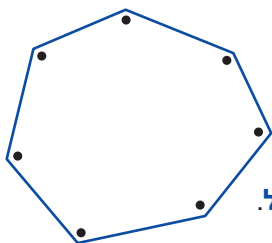
האם אפשר למצוא ללא מדידה, את סכום הזוויות החיצוניות המסומנות ב-? •



נבדוק מהו סכום הזוויות החיצוניות במצולעים שונים.



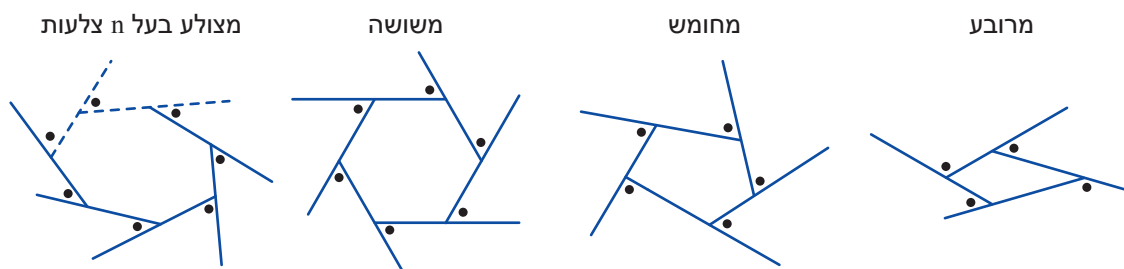
תזכורת



- סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות (במעלות) שווה $180(n - 2)$
- $n > 2$, מספר שלם.
- מצולע שכל צלעותיו שוות באורכן וכל זוויותיו שוות בגודלן נקרא **מצולע משוכלל**.

1. א. חשבו את סכום הזוויות במצולע בעל 5 צלעות?
מה גודל כל זווית במצולע משוכלל בעל 5 צלעות?
ב. מה סכום הזוויות במצולע בעל 15 צלעות?
מה גודל כל זווית במצולע משוכלל בעל 15 צלעות?

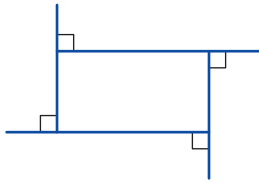
2. בשרטוטים שלפניכם מצולעים קמורים. זוויות חיצוניות מסומנות בנקודה.



שערו: כיצד משתנה סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור, כשמספר הצלעות של המצולע גדל?



3. המורה ביקשה למצוא את סכום הזוויות החיצוניות במחומש.



ציפי אמרה: במלבן סכום הזוויות הפנימיות הוא 360° , וגם סכום הזוויות החיצוניות הוא 360° . לכן, גם במחומש, סכום הזוויות החיצוניות שווה לסכום הזוויות הפנימיות - כלומר 540° .

חני אמרה: מצאנו שסכום הזוויות הפנימיות במחומש 540° ושגודל כל זווית פנימית במחומש משוכלל הוא $108^\circ = \frac{540}{5}$. לכן, גודל כל אחת מהזוויות הצמודות לפנימיות הוא 72° , והסכום של כל הזוויות החיצוניות יהיה $72 \cdot 5 = 360^\circ$

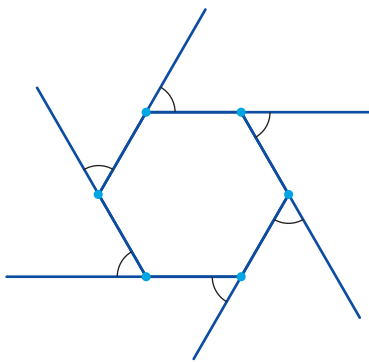
מי צודקת?

4. א. מצאו את סכום הזוויות במשושה.

ב. מצאו גודל של כל זווית במשושה משוכלל.

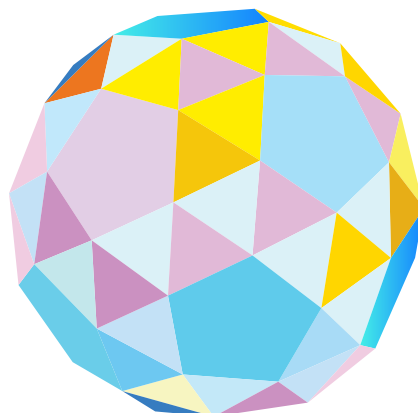
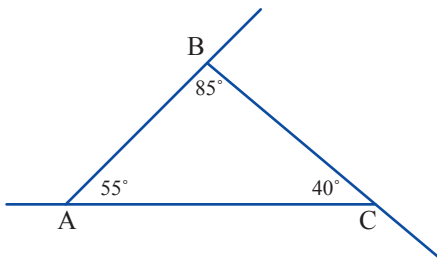
ג. מצאו גודל של כל זווית חיצונית במשושה משוכלל.

ד. מה סכום שש הזוויות החיצוניות במשושה משוכלל?

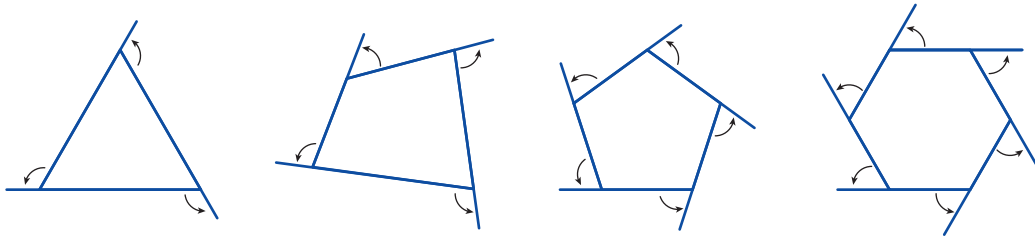


5. א. מצאו את הגודל של כל זווית חיצונית במשולש המשורטט.

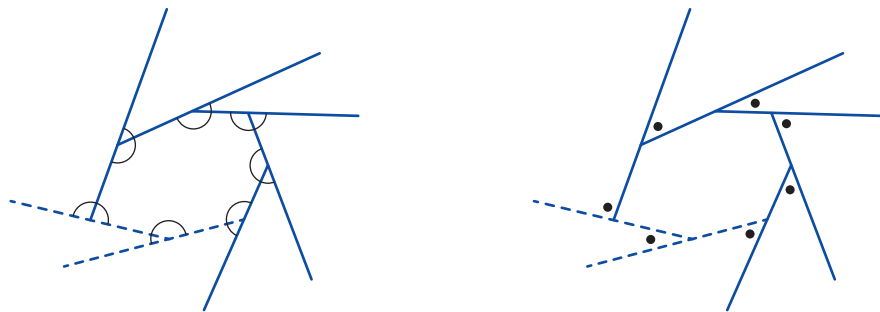
ב. מהו סכום הזוויות החיצוניות במשולש הנתון?



6. שיערו: האם ייתכן שסכום הזוויות החיצוניות בכל מצולע קבוע, ושווה תמיד 360° ?
 החצים בשרטוטים מצביעים על "תנועה" סביב המצולע.
 היעזרו בשרטוט והסבירו מדוע סכום הזוויות החיצוניות בכל מצולע קבוע, ושווה תמיד 360°



7. נתון מצולע בעל n צלעות ($n > 2$, מספר שלם).



מצאו ביטויים או גדלים מתאימים:

- סכום של זווית חיצונית וזווית פנימית שליד קדקוד אחד.
- סכום של הזוויות החיצוניות והזוויות הפנימיות שליד כל הקדקודים של המצולע.
- סכום כל הזוויות הפנימיות של המצולע.
- סכום כל הזוויות החיצוניות של המצולע.



ראינו כי, **בכל מצולע קמור** סכום הזוויות החיצוניות שווה 360° ואינו תלוי במספר הצלעות של המצולע.

זווית פנייה בכביש



עיקולים בכבישים בנויים בשיפוע, הצד הפנימי של העיקול נמוך יותר מצדו החיצוני.

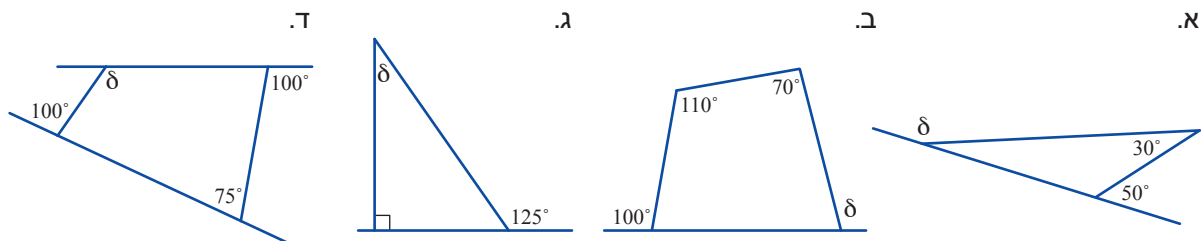
במהלך פנייה של כלי רכב, הכוח הצנטריפוגלי המופעל על גופים הנמצאים בתנועה מעגלית "דוחף" את הרכב "החוצה" אל החלק החיצוני של העיקול ומחוץ למסלול הנסיעה.

על-מנת שכלי הרכב יוכל להשלים בבטחה את הפנייה, צריך לפעול עליו כוח הפונה אל מרכז העיקול ("כוח מרכזי"). החיכוך בין צמיגי הרכב למשטח הכביש ושיפוע הכביש נועדו לספק את הכוח הזה. הגורמים המקטינים את הכוח המרכזי ובכך מגדילים את הסיכוי לסטייה לא רצויה הם: צמיגים משופשפים, כביש רטוב ממים או משמן ושיפוע לא מספק של העיקול. סטייה מסוכנת מנתיב התנועה עלולה להתרחש גם כאשר מהירות הרכב הפונה גבוהה מדי.

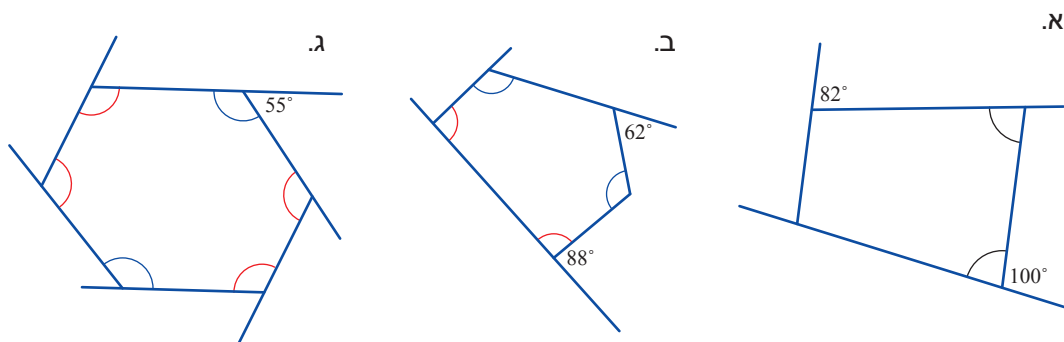
אוסף משימות



1. בכל סעיף, חשבו את גודל הזווית δ . הסבירו את שלבי החישוב.

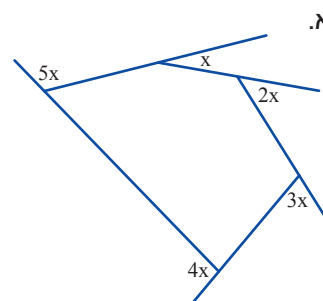
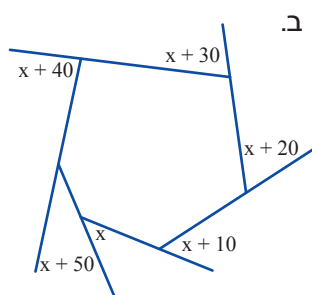


2. בכל שרטוט, זוויות שוות בגודלן מסומנות באותו סימון. חשבו את הגדלים של זוויות המצולע.

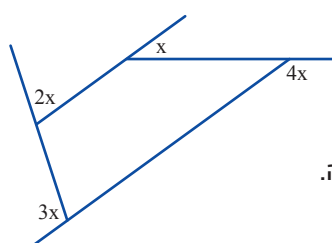




3. בכל שרטוט, הגדלים של הזוויות החיצוניות מבוטאים באמצעות x (הגדלים של הזוויות במעלות, $x > 0$).
חשבו את הגדלים של הזוויות החיצוניות ושל הזוויות הפנימיות בכל מצולע.



4. הגדלים של הזוויות החיצוניות במרובע, מבוטאים במעלות באמצעות x ($x > 0$).



א. חשבו את הגדלים של הזוויות החיצוניות.

ב. העתיקו את השרטוט, רשמו את הגדלים שמצאתם,

וחשבו את הגדלים של הזוויות הפנימיות.

אם לא טעיתם, לכל זווית חיצונית, יש זווית פנימית במרובע שגודלה שווה.



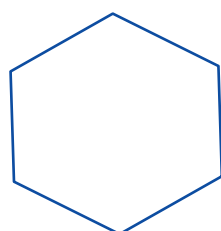
5. שלוש זוויות חיצוניות במשושה שוות זו לזו בגודלן.

שלוש הזוויות החיצוניות האחרות גם הן שוות זו לזו בגודלן.

גודל אחת הזוויות החיצוניות 75° .

א. חשבו את הגדלים של כל הזוויות החיצוניות של המשושה.

ב. חשבו את הגדלים של כל הזוויות הפנימיות של המשושה.



6. שלוש זוויות חיצוניות במחומש שוות בגודלן.

שתי הזוויות החיצוניות האחרות גם כן שוות זו לזו בגודלן.

א. גודל אחת הזוויות החיצוניות 60° .

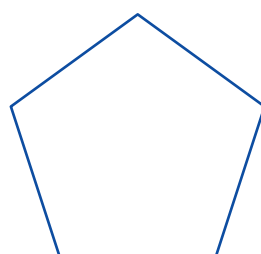
חשבו את הגדלים של כל הזוויות החיצוניות של המחומש.

מצאו תשובה שונה מזו שמצאתם, המקיימת את הנתונים.

ב. גודל אחת הזוויות החיצוניות במחומש 72° .

חשבו את הגדלים של כל הזוויות החיצוניות של המחומש.

האם קיימת תשובה שונה המקיימת את הנתונים? הסבירו.





7. בכל סעיף, בדקו אם אפשר לשרטט מצולע קמור המקיים את הדרישות. אם כן, רשמו את הגדלים של הזוויות החיצוניות ושל הזוויות הפנימיות. אם לא, הסבירו.

- א. מרובע שבו 3 זוויות חיצוניות ישרות.
- ב. מחומש שבו 3 זוויות חיצוניות ישרות.
- ג. משושה שבו 4 זוויות חיצוניות ישרות.



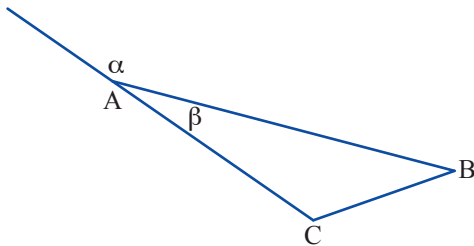
8. α זווית חיצונית ל- ΔABC הצמודה לזווית β .

בכל סעיף, קבעו אם הטענה נכונה.

אם כן, נמקו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

א. $\alpha + \beta = 180^\circ$ ג. α גדולה מ- $\sphericalangle C$

ב. $\alpha = \sphericalangle B + \sphericalangle C$ ד. $\alpha = \beta + \sphericalangle C$

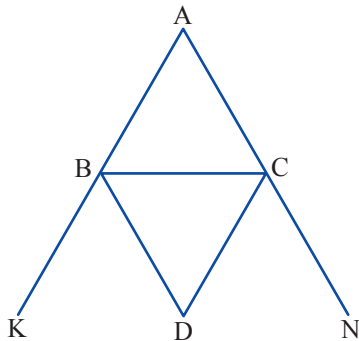


9. נתון: BD חוצה את $\sphericalangle KBC$

CD חוצה את $\sphericalangle BCN$

$\sphericalangle A = 50^\circ$

חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle D$.

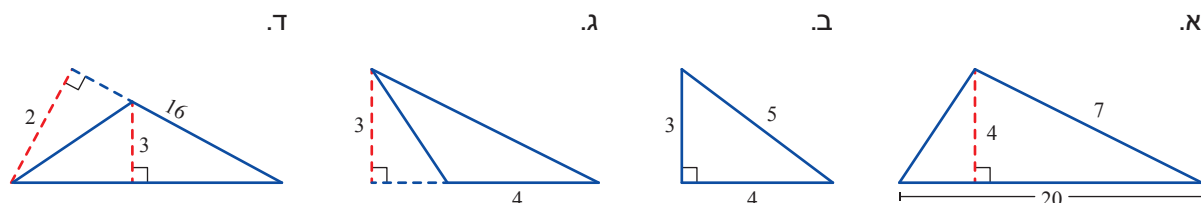




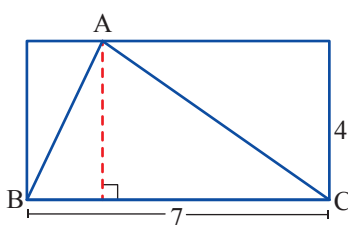
שטח משולש

במשימות הבאות השרטוטים הם להדגמה, ומידות האורך נתונות בס"מ.

1. בכל סעיף, חשבו את שטח המשולש.



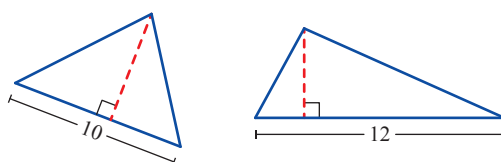
2. לפניכם מלבן ובתוכו משולש. חשבו את שטח המשולש.



3. שטח המשולש בשרטוט 30 סמ"ר. חשבו את אורך הניצב השני.



4. שני המשולשים בשרטוט שווים בשטחם.



אורך הגובה במשולש אחד גדול ב- 1 ס"מ מאורך הגובה במשולש השני. מצאו את אורכי הגבהים ואת שטחי המשולשים.

5. אורכי שתיים מצלעות המשולש שבשרטוט הם: 25 ס"מ ו- 30 ס"מ.

אורכי הגבהים לצלעות האלה הם: 24 ס"מ ו- 20 ס"מ.

א. התאימו לכל צלע את אורך הגובה שלה.

ב. חשבו את שטח המשולש בשתי דרכים שונות.

