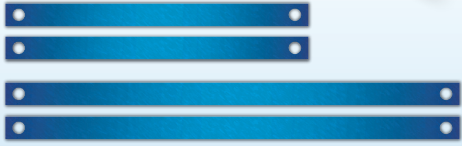


יחידה 11: דלתון וטרפז

שיעור 1. תכונות הדלתון

משתמשים בשני זוגות רצועות שוות



חברו את הרצועות בקצוות כדי ליצור מרובע.
איזה מרובע קיבלתם?

האם אפשר לקבל מרובע שאינו מקבילית?

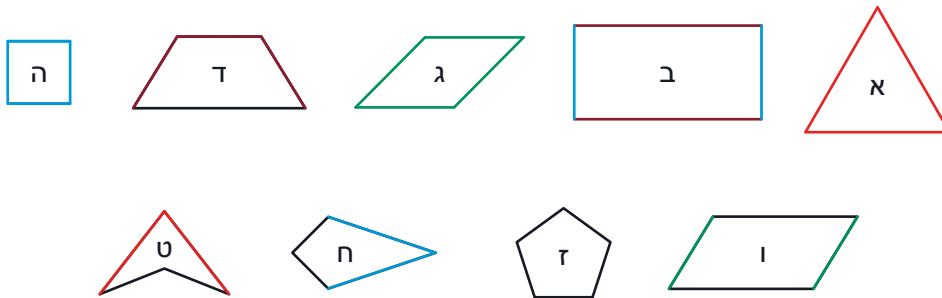
מִשְׁכּוּ אֶת הַקּוּדְקוּדִים הַחוּצָה וּפְנִימָה. מֵה מִשְׁתַּנָּה וּמֵה אֵינּוּ מִשְׁתַּנָּה:
גודל הזוויות? סכום הזוויות? ההקבלה של צלעות? ההיקף? השטח?

נכיר את הדלתון ואת תכונותיו.

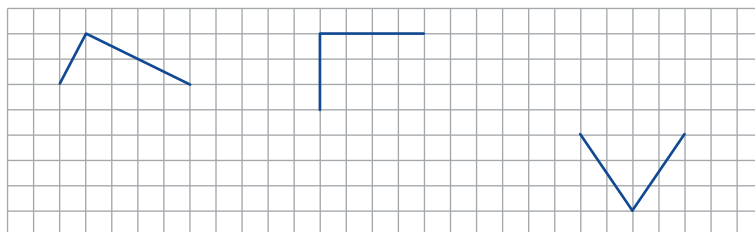


הגדרה: מרובע בעל שני זוגות נפרדים של צלעות סמוכות שוות, נקרא **דלתון**.

1. במצולעים הבאים צלעות שוות צבועות באותו צבע.
מצאו **דלתונים**. הסבירו מדוע הצורות האחרות אינן דלתונים.

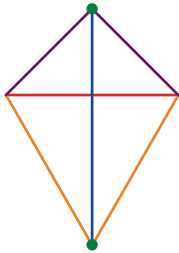


2. בכל שרטוט שתי צלעות סמוכות של דלתון. העתיקו את השרטוטים לדף משובץ והשלימו.



3. שרטטו דלתון.

- א. סמנו את הקודקודים בהם נפגשות צלעות שוות.
ב. חברו את שני הקודקודים שסימנתם. איך נקרא הקטע?



קודקוד שבו נפגשות שתי צלעות שוות של דלתון, נקרא **קודקוד הראש**.
האלכסון המחבר את שני **קודקודי הראש** של דלתון נקרא **אלכסון ראשי**,
האלכסון השני נקרא **אלכסון משני**.



4. לפניכם תכונות הריבוע:

כל הזוויות שוות

האלכסונים שווים זה לזה

האלכסונים חוצים את הזוויות

הצלעות הנגדיות מקבילות

כל הצלעות שוות

האלכסונים חוצים זה את זה

האלכסונים מאונכים זה לזה

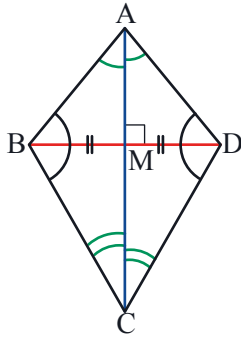
- א. אילו תכונות מתקיימות בכל הדלתונים?
ב. אילו תכונות מתקיימות רק בחלק מהדלתונים?
נסחו כל תכונה כך, שתתקיים בכל הדלתונים.

5. נוכיח את תכונות הדלתון.

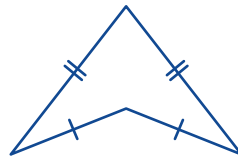
- א. שרטטו דלתון. העבירו את **האלכסון הראשי** בדלתון.
מצאו משולשים חופפים. הוכיחו את החפיפה.
אילו תכונות אפשר להסיק מן החפיפה?
ב. העבירו גם את **האלכסון המשני** בדלתון.
מצאו משולשים חופפים. הוכיחו את החפיפה.
אילו תכונות אפשר להסיק מן החפיפה?



תכונות הדלתון:



- האלכסון הראשי חוצה את **זוויות הראשי**:
 $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DCA, \sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$
- **האלכסון הראשי** חוצה את האלכסון המשני: $BM = MD$
- **האלכסון הראשי** מאונך לאלכסון המשני: $AC \perp BD$
- הזוויות שמול האלכסון הראשי שוות זו לזו: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$



6. במשימה 1 ראיתם דלתון קעור:

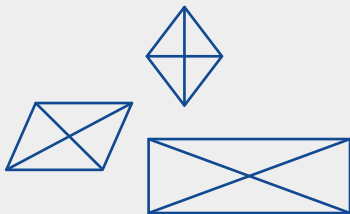
דינה אמרה: האלכסונים בדלתון קעור אינם נפגשים.
לילי אמרה: אפשר להמשיך את האלכסון הראשי, ואז הוא ייפגש עם האלכסון המשני.
 כל תכונות הדלתון מתקיימות גם בדלתון קעור.
 האם הבנות צודקות? אם כן, הוכיחו. אם לא, ציירו דוגמה נגדית.



תזכורת: מצולע שלפחות אחת מזוויותיו גדולה מזווית שטוחה, נקרא **מצולע קעור**.



למילה **אלכסון** יש משמעות שונה בשימוש היומיומי ובגאומטריה.
 בשפת היומיום, **אלכסון** הוא קו נטוי, שאינו מאוזן או
 מאונך, למשל: חוצים את הכביש ישר ולא **באלכסון**.



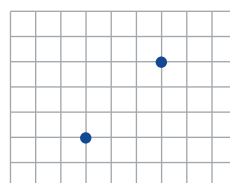
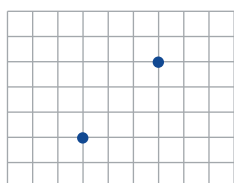
בגאומטריה, **אלכסון** הוא קטע המחבר קודקודים שאינם סמוכים
 במצולע. **אלכסון** במצולע הוא לעיתים נטוי ולעיתים מאוזן.
 האם תוכלו למצוא מילים נוספות בעברית שהמשמעות שלהן
 במתמטיקה שונה מהמשמעות שלהן בשפת היומיום?



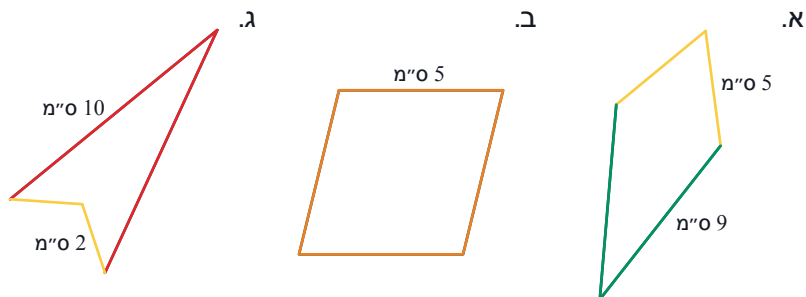
1. בכל סעיף, שרטטו דלתון על דף משובץ:

א. שתי הנקודות - קודקודים נגדיים.

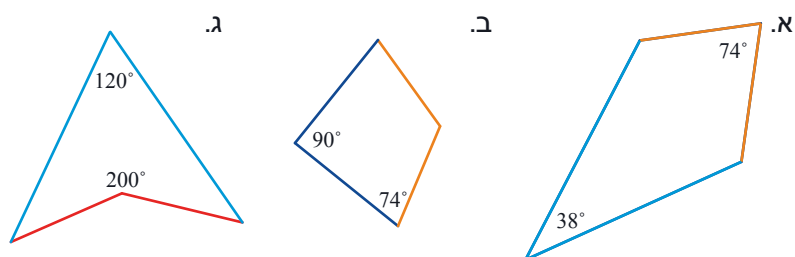
ב. שתי הנקודות - קודקודים סמוכים.



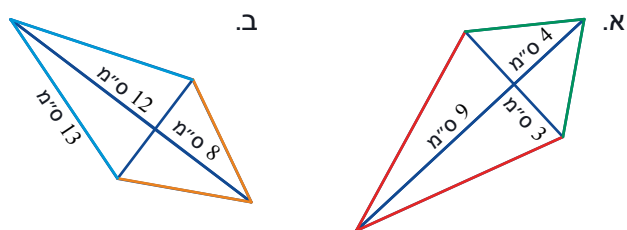
2. מצאו את אורכי הצלעות החסרות בכל דלתון. (צלעות שוות צבועות באותו צבע).



3. מצאו את הזוויות החסרות בכל דלתון. (צלעות שוות צבועות באותו צבע).

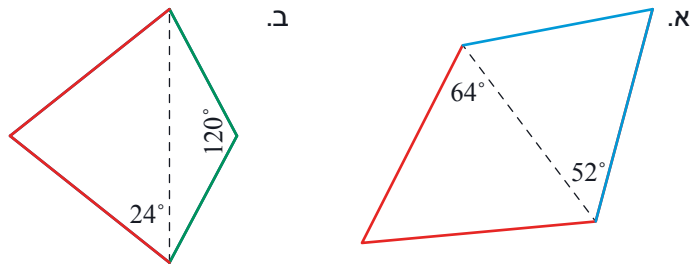


4. חשבו את אורכי צלעות הדלתון לפי הנתונים בשרטוט (צלעות שוות צבועות באותו צבע).

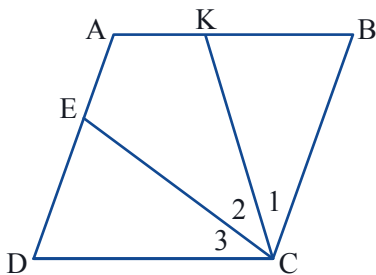




5. מצאו את גודל כל הזוויות של הדלתון לפי הנתונים בשרטוט (צלעות שוות צבועות באותו צבע).



6. בדלתון ABCD, $BC = CD$, $AB = AD = 10$ ס"מ, אורך האלכסון הראשי 20 ס"מ, ואורך האלכסון המשני 12 ס"מ.
 א. שרטטו דלתון ורשמו על הקטעים המתאימים את האורכים שלהם.
 ב. חשבו את אורכי הצלעות BC ו-CD.



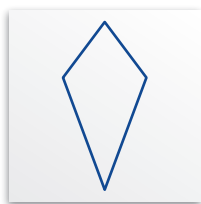
7. ABCD מעוין.

$$\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2 = \sphericalangle C_3 = \alpha$$

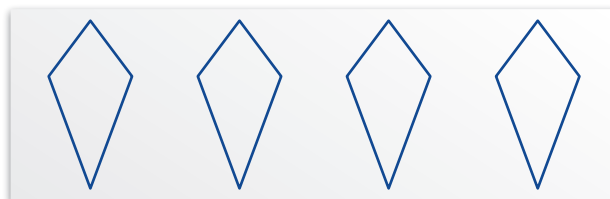
- א. הוכיחו: AECK דלתון.
 ב. נתון גם: $AB = CK$. מה תוכלו לומר על משולש KCB?
 מצאו את α במקרה זה.
 ג. מצאו את α אם נתון $CK \perp AB$.
 שרטטו שרטוט מתאים למקרה זה.



8. א. קפלו נייר וגזרו משולש, כך שתקבלו חלון בצורת דלתון:



ב. כמה פעמים יש לקפל את הדף, כדי לגזור משולש אחד ולקבל 4 דלתונים?



שיעור 2. מזהים דלתון



אילן וגיא בנו עפיפונים בצורה של דלתונים. הם יצרו את השלד משני מקלות לבנים באורך 40 ס"מ, 28 ס"מ (כמו בציור). האם אפשר להסיק ששניהם בנו אותו עפיפון? הסבירו.

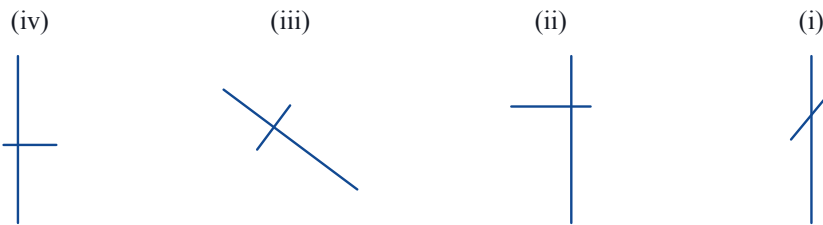
נכיר תנאים מספיקים לקיום דלתון.



1. באתר "מתמטיקה משולבת" במדור פעילויות מחשב, נמצא הקובץ "בונים עפיפונים". בפעילות נחקר כיצד בונים שלד של עפיפון בצורת דלתון. בצעו את הפעילות לפי ההוראות.



2. א. אילן רצה לבנות שלד לעפיפון שלו. איזה שלד יכול להתאים? הסבירו.



- ב. כמה עפיפונים שונים אפשר לבנות לדעתכם בעזרת שני מקלות מסוימים? הסבירו.
ג. מה המשותף לכל העפיפונים האפשריים?



מקור העפיפון בסין העתיקה, שם בנו את העפיפונים מנייר ומבמבוק ויצרו אותם בצורות של חרקים, ציפורים, חיות או צורות מהמיתולוגיה. האגדה מספרת כי בעת מלחמה היו קושרים ילדים לעפיפונים ומעיפים אותם לגובה, לצורך תצפית ומודיעין. תוכלו למצוא באינטרנט סרטונים על בניית עפיפונים (kite making) ועל העפת עפיפונים (kite running).





משפט: אם במרובע האלכסונים מאונכים זה לזה, ואלכסון אחד חוצה את האחר, אז המרובע הוא **דלתון**.

3. שרטטו שרטוט מתאים למשפט, כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח, והוכיחו את המשפט.



4. רק אחת הטענות הבאות נכונה. מצאו את הטענה הנכונה, הסבירו את בחירתכם.

הסבירו על ידי דוגמאות נגדיות, מדוע כל אחת מהטענות האחרות אינה נכונה.

א. דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.

ב. דלתון הוא מרובע שאחד האלכסונים מחלק אותו לשני משולשים שווי שוקיים.

ג. דלתון הוא מרובע שאחד האלכסונים מחלק אותו לשני משולשים חופפים.

ד. דלתון הוא מרובע שבו האלכסונים מאונכים זה לזה.

ה. דלתון הוא מרובע שאחד האלכסונים שלו חוצה את הזוויות.

5. במשימה 4 מצאתם טענה אחת נכונה. נסחו אותה בניסוח של "אם" ... "אז".

שרטטו שרטוט מתאים, כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח, והוכיחו.



כדי להוכיח שמרובע הוא דלתון, מספיק להראות שמתקיים אחד התנאים:

- אלכסוני המרובע מאונכים זה לזה, ואלכסון אחד חוצה את האחר.

- אלכסון אחד במרובע חוצה את הזוויות.



6. מניחים קיסם על הדלתון. הקיסם מחלק את הדלתון לשתי צורות.

א. הניחו קיסם המחלק את הדלתון לשני מרובעים.

ב. הניחו קיסם המחלק את הדלתון למחומש ולמשולש.

ג. הניחו קיסם המחלק את הדלתון לשני משולשים חופפים.

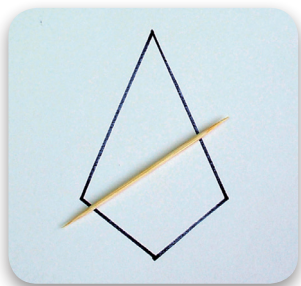
ד. הניחו קיסם המחלק את הדלתון לשני משולשים לא חופפים.

ה. **הדס** אמרה: קיבלתי שני משולשים לא חופפים שווי שוקיים.

שרטטו את הדלתון וסמנו היכן הניחה הדס את הקיסם.

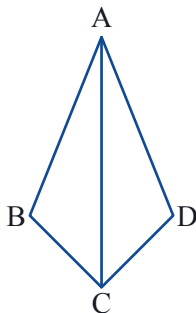
ו. **מתן** אמר: אפשר ליצור דלתון משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף.

האם מתן צודק? הסבירו.





אוסף משימות



1. נתון: מרובע ABCD

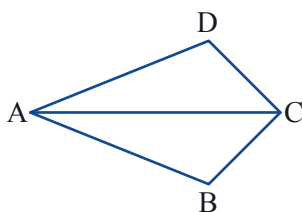
$$AB = AD$$

האלכסון AC חוצה את הזווית A.

א. סמנו את הנתונים בשרטוט.

ב. אילו משולשים צריך לחפוף כדי להוכיח שהמרובע הוא דלתון?

לפי איזה משפט חפיפה?



2. נתון: מרובע ABCD

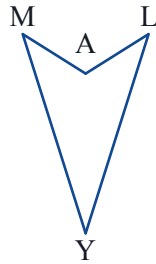
$$AB = AD$$

האלכסון AC חוצה את הזווית A.

סמנו את הנתונים בשרטוט והוכיחו שהמרובע הוא דלתון.

3. הוכיחו:

אם במרובע אלכסון אחד מאונך לאלכסון האחר, וגם חוצה את אחת הזוויות, אז המרובע הוא דלתון.

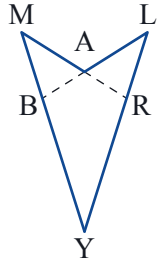


4. נתון: $MA = AL$

$MY = LY$

א. איזה מרובע הוא $MALY$?

ב. הוכיחו: $\sphericalangle M = \sphericalangle L$

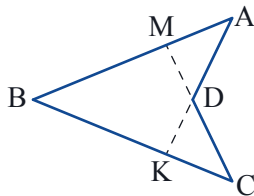


5. בדלתון $MALY$, המשיכו את LA עד לנקודת החיתוך עם MY וסימנו אותה ב- B .

המשיכו את MA עד לנקודת החיתוך עם LY וסימנו אותה ב- R .

האם אפשר להסיק שהמרובע $BARY$ הוא דלתון?

אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



6. נתון: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$

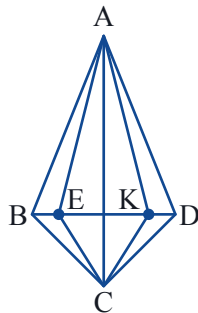
$AB = BC$

א. הוכיחו: $\triangle ABK \cong \triangle CBM$

ב. הוכיחו: $AM = KC$

ג. הוכיחו: $AD = DC$

ד. האם יש דלתונים בשרטוט? מי הם?

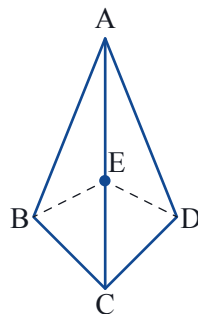


7. נתון: $ABCD$ דלתון, $BE = KD$ (ראו שרטוט).

א. האם מרובע $AECK$ הוא דלתון? כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח.

ב. אילו זוגות משולשים צריך לחפוף כדי להוכיח?

על איזה משפט חפיפה מסתמכים?



8. נתון: $ABCD$ דלתון.

$BC = CD, AB = AD$

E נקודה על האלכסון AC .

א. האם המרובעים $ABED$ ו- $BCDE$ הם דלתונים?

ב. כמה זוגות משולשים צריך לחפוף כדי להוכיח? הסבירו.



9. נתון: $ABCD$ דלתון.

$BC = CD, AB = AD$

E נקודה על האלכסון AC .

המשכו של BE חותך את DC ב- K .

המשכו של DE חותך את BC ב- G .

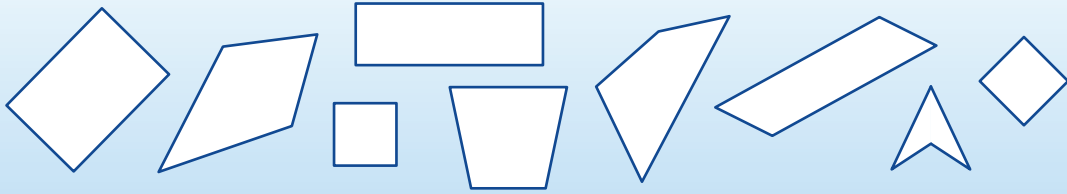
האם מרובע $CGEK$ הוא דלתון? כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח, והוכיחו.



שיעור 3. משפחת הדלתונים

סוגי דלתונים ושטח דלתון

אילו מהמרובעים הם דלתונים?



נכיר מרובעים נוספים המקיימים תכונות של דלתון.

סוגי דלתונים

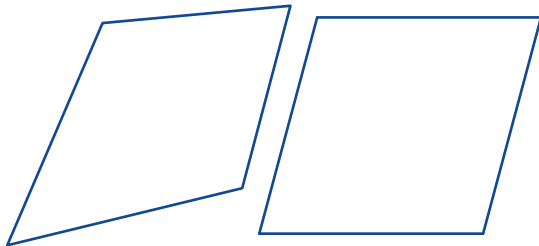
1. שני אמרה: המעוין הוא סוג של דלתון.

הודיה אמרה: המעוין הוא דלתון "משופץ".

א. האם הבנות צודקות? הסבירו.

ב. האם כל מעוין הוא דלתון? אם כן, הסבירו. אם לא, הראו דוגמה נגדית.

ג. האם כל דלתון הוא מעוין? אם כן, הסבירו. אם לא, הראו דוגמה נגדית.



2. א. העתיקו את הדלתונים שבשרטוט וגזרו אותם.

קפלו כל דלתון גזור, לאורך האלכסון הראשי.

בדקו: האם האלכסון הראשי הוא חוצה זווית?

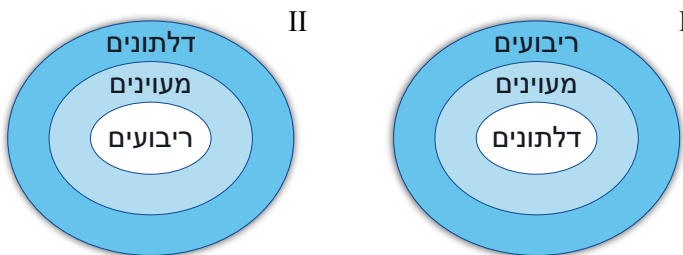
ב. קפלו כל דלתון גזור, לאורך האלכסון המשני.

האם גם אלכסון זה הוא חוצה זווית?

ג. באיזה סוג דלתון שני האלכסונים חוצים את הזוויות? הסבירו.



3. א. בחרו את התרשים הנכון:

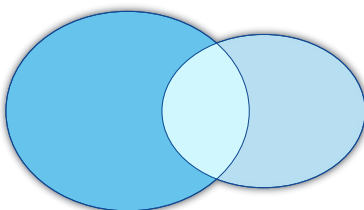


ב. העתיקו את התרשים, ושבצו במקומות המתאימים:

מקביליות, מעוינים, דלתונים.

ג. תארו בתרשים את הקשר בין דלתונים ומלבנים.

ד. תארו בתרשים את הקשר בין דלתונים וריבועים.





במשימה 3 מלאתם תרשים המבטא קשרים בין קבוצות. תרשים כזה נקרא **דיאגרמת ון**. המצאת דיאגרמת ון מיוחסת לג'ון ון (John Venn), מתמטיקאי ופילוסוף בריטי בן המאה ה-19, אף שנעשה שימוש בשיטה זו הרבה לפני כן.

שטח דלתון



4. בתחילת השיעור הקודם בִּדְקַנּוּ אפשרויות שונות לבניית עפיפון ממקלות באורך 40 ס"מ ו-28 ס"מ.

אילן וגיא בְּנוּ שני עפיפונים שונים בצורת דלתון, מאותם מקלות.

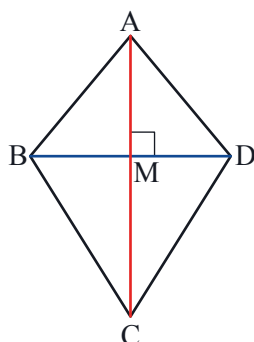
א. הציעו מידות מתאימות להיקף העפיפון של אילן ולהיקף העפיפון של גיא.

ב. מהו השטח של כל אחד מהעפיפונים? כיצד חישבתם?

ג. **חני** אמרה: השטח של כל הדלתונים שאפשר לבנות מהמקלות האלו הוא 560 סמ"ר. האם חני צודקת? אם כן, הוכיחו. אם לא, הציעו מידות לעפיפון ששטחו שונה.



שטח **דלתון** שווה לחצי מכפלת האלכסונים.



הוכחה:

האלכסון המשני מחלק את הדלתון לשני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף. סכום הגבהים של שני המשולשים הוא האלכסון הראשי של הדלתון.

שטח המשולש ABD הוא: $\frac{BD \cdot AM}{2}$, שטח המשולש BCD הוא: $\frac{BD \cdot MC}{2}$

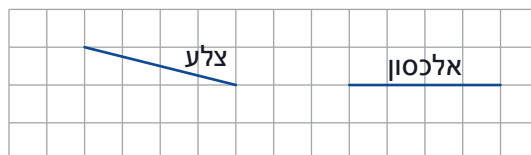
שטח הדלתון שווה לסכום שטחי שני המשולשים:

$$\frac{BD \cdot AM}{2} + \frac{BD \cdot MC}{2} = \frac{BD \cdot (AM + MC)}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2}$$





1. שרטטו על דף משובץ, דלתון שאינו מעוין.



2. קבעו אם ייתכן, נמקו את תשובתכם בעזרת שרטוט מתאים.

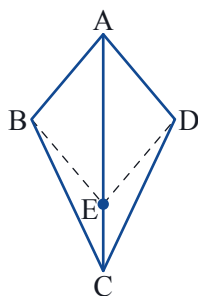
- האם ייתכן שתהיה בדלתון רק זווית ישרה אחת?
- האם ייתכן שבדלתון יש בדיוק שתי זוויות ישרות?
- האם ייתכן שבדלתון יש בדיוק שלוש זוויות ישרות?
- האם ייתכן שכל הזוויות בדלתון הן זוויות ישרות?



3. א. העתיקו את המשולש על דף משובץ.
 שרטטו משולש חופף לו, כך שלשני המשולשים צלע משותפת ויתקבל דלתון.



ב. בכמה אופנים אפשר לשרטט משולש חופף בעל צלע משותפת, כך שיתקבל דלתון? שרטטו את הדלתונים.



4. נתון: ABCD דלתון.

$$BC = CD, AB = AD$$

E נקודה על האלכסון AC.

$$BE \parallel AD$$

מהו סוג המרובע ABED? הוכיחו.



5. נתון: דלתון ELAD

$$EL = ED$$

$$LA = AD$$

LP תיכון לצלע ED ב- ΔLED

DR תיכון לצלע LE ב- ΔLED

M נקודת מפגש התיכונים.

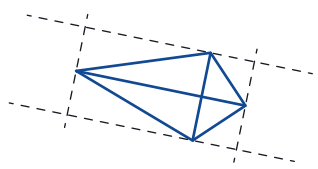
א. מהו סוג המרובע PERM? הוכיחו.

ב. האם האלכסון EM של המרובע PERM, והאלכסון EA של הדלתון, נמצאים על אותו ישר? הסבירו.

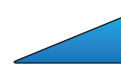
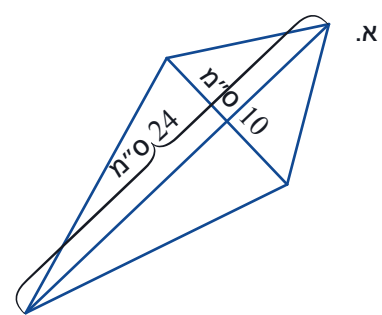
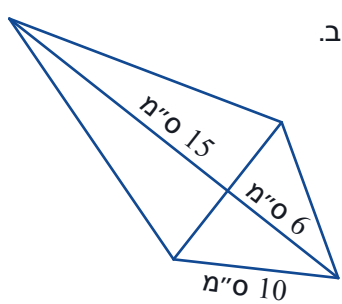


6. דרך קודקודי הדלתון שרטטו ישרים מקבילים לאלכסונים.

איזה מרובע נוצר? הסבירו.



7. חשבו את שטחי הדלתונים לפי הנתונים בשרטוט.



8. ראינו ששטח דלתון קמור שווה לחצי מכפלת אלכסוניו.

האם גם שטח דלתון קעור שווה לחצי מכפלת האלכסונים? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

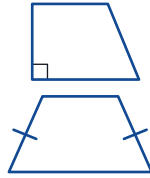


9. הוכיחו: שטח מרובע שאלכסוניו ניצבים זה לזה שווה לחצי מכפלת האלכסונים.



בטרפז, סכום זוג זוויות **ליד אותה שוק**, שווה 180° .
סכום זוג זוויות **ליד אותו בסיס**, אינו שווה 180° .

תזכורת: טרפז בעל זווית ישרה נקרא **טרפז ישר זווית**.



תזכורת: טרפז בעל שוקיים שוות נקרא **טרפז שווה שוקיים**.

5. א. האם קיים טרפז קעור? אם כן, שרטטו, אם לא, הסבירו מדוע.
ב. האם טרפז יכול להיות דלתון? אם כן, שרטטו. אם לא, הסבירו מדוע.

6. א. מה תוכלו לומר על הזוויות בטרפז ישר זווית? נמקו.
ב. האם מרובע שבו שתי זוויות ישרות הוא בהכרח טרפז ישר זווית?
אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

7. מה תוכלו לומר על הזוויות בטרפז שווה שוקיים? הוכיחו.

8. א. האם **מרובע** שבו שני זוגות של זוויות שוות הוא בהכרח טרפז שווה שוקיים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
ב. האם **טרפז** שבו שני זוגות של זוויות שוות הוא בהכרח טרפז שווה שוקיים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



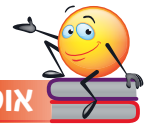
משפט: אם הטרפז שווה שוקיים, אז הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
משפט הפוך: אם בטרפז, הזוויות ליד אותו בסיס שוות, אז הטרפז הוא שווה שוקיים.



המילה טרפז מורכבת מהמילים היווניות טטרה (ארבע) ו-פזה (רגל).
המתמטיקאי היווני אוקלידס השתמש בשם טרפז (ביוונית trapézion)
לכל צורה בצורת לוח שולחן.



טרפז הוא גם שמו של מכשיר התעמלות. הטרפז מורכב משני חבלים המשתלשלים
מהתקרה וביניהם מתוח מוט. הלוליינים בקרקס מבצעים על הטרפז תרגילי
אקרובטיקה. השם טרפז רומז למרובע הנוצר משני החבלים, מהמוט המחובר להם
ומקטע התקרה התומך במכשיר.



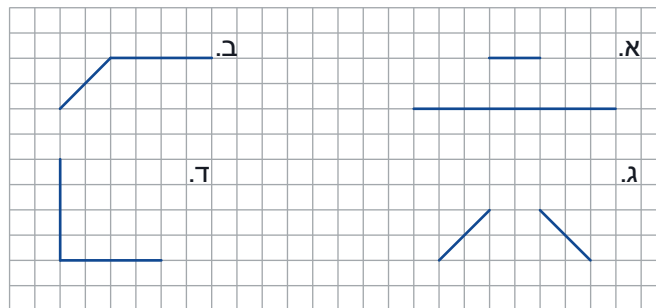
אוסף משימות



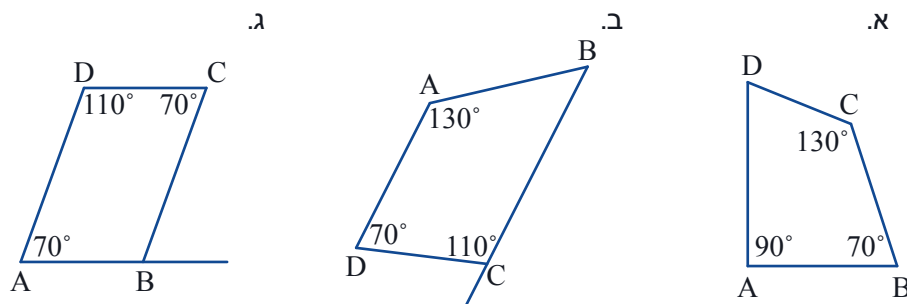
1. מצאו טרפזים בסביבה. הנה דוגמה:



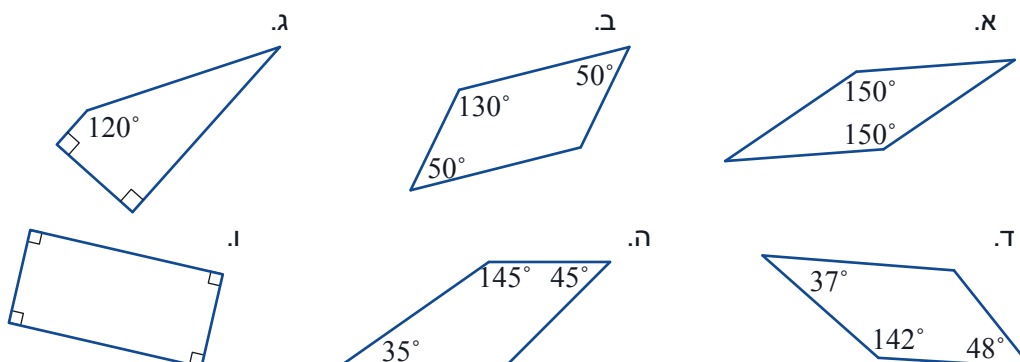
2. העתיקו על דף משובץ והשלימו כל שרטוט, כך שיתקבל טרפז.



3. אילו מהמרובעים הם טרפזים?

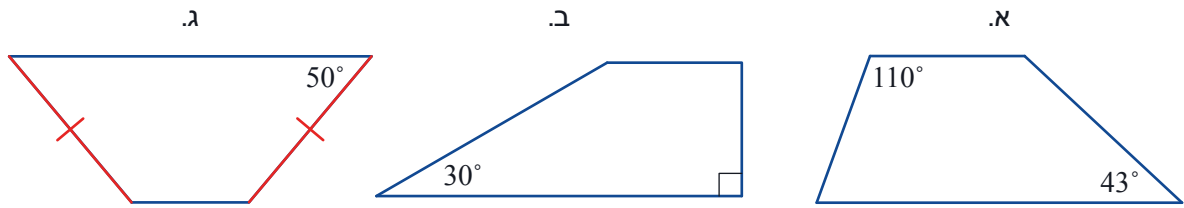


4. אילו מהמרובעים הם טרפזים?

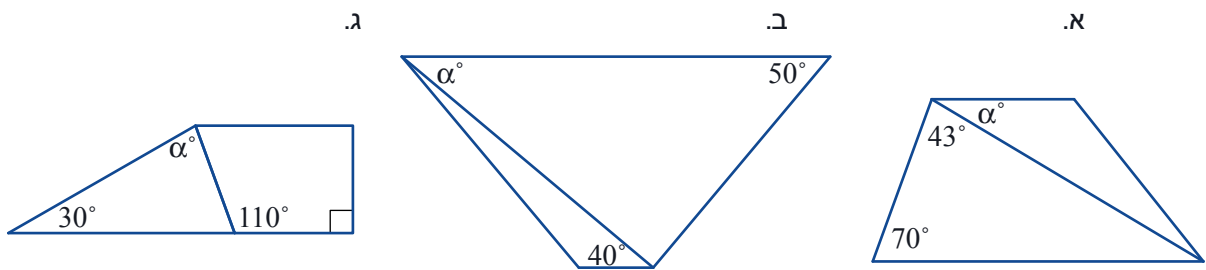




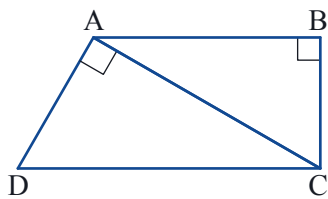
5. לפניכם טרפזים. חשבו את הזוויות החסרות.



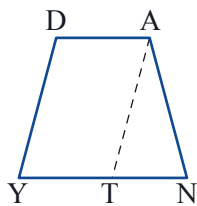
6. לפניכם טרפזים. חשבו את הזווית α בכל טרפז.



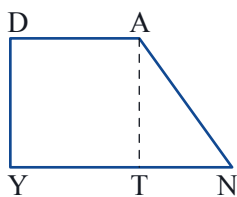
7. בשרטוט טרפז ישר זווית ABCD, שבו האלכסון ניצב לשוק. בחרו ערך כלשהו לזווית D, וחשבו את שאר הזוויות.

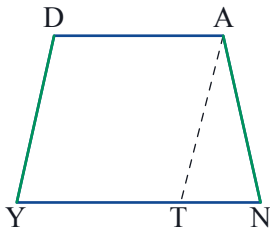


8. בטרפז DANY, הקטע AT מקביל לשוק DY (ראו ציור). האם מרובע DATY הוא מקבילית? הסבירו.

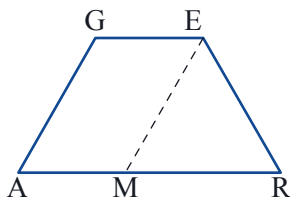


9. בטרפז ישר זווית DANY, הקטע AT מקביל לשוק DY (ראו ציור). האם מרובע DATY הוא מקבילית? מלבן? הסבירו.

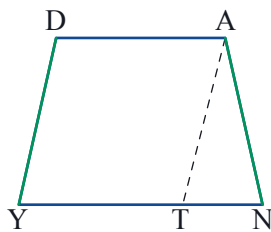




10. המרובע DANY הוא טרפז שווה שוקיים. הקטע AT מקביל לשוק DY. איזה סוג משולש הוא ATN? הסבירו.



11. המרובע GERA הוא טרפז שווה שוקיים. $\angle A = 60^\circ$, $GA \parallel EM$.
 א. חשבו את כל הזוויות.
 ב. נתון גם: $GA = 6$ ס"מ, $GE = 5$ ס"מ. חשבו את היקף הטרפז.



12. בטרפז DANY, הקטע AT מקביל לשוק DY (ראו ציור), ונוצר מעוין DATY. איזו תכונה מיוחדת מתקיימת בטרפז DANY?



13. בטרפז שרטטו מקבילים לשוקיים. המקבילים נפגשו על בסיס הטרפז.

- א. מה תוכלו לומר על הטרפז? מה תוכלו לומר על שלושת המשולשים שהתקבלו? הוכיחו.
- ב. אם הטרפז הוא שווה שוקיים, אילו משולשים התקבלו?



משימות נוספות



14. שרטטו על דף משובץ:
 א. טרפז ישר זווית שהקטע AB הוא הבסיס הגדול שלו.
 ב. טרפז ישר זווית שהקטע AB הוא שוק שלו.
 ג. טרפז שווה שוקיים שהקטע AB הוא הבסיס הגדול שלו.





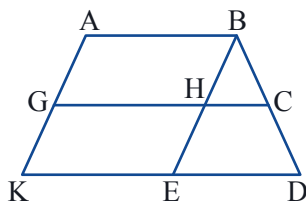
15. העתיקו את המקבילית.



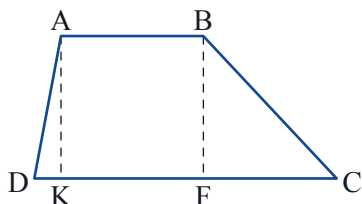
- שרטטו קטע המחלק את המקבילית לשתי מקביליות.
- שרטטו קטע המחלק את המקבילית לשני טרפזים.
- שרטטו קטע המחלק את המקבילית למשולש ולטרפז.



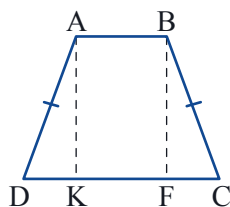
16. בשרטוט $AK \parallel BE$, $AB \parallel GC \parallel KD$
כמה טרפזים וכמה מקביליות בשרטוט?



17. ABCD טרפז ($AB \parallel CD$)
AK ו-BF הם גבהים בטרפז.
לאילו צורות מחולק הטרפז? נמקו.

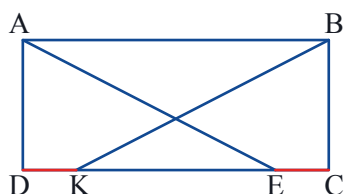


- ABCD טרפז שווה שוקיים ($AD = BC$, $AB \parallel CD$).
AK ו-BF הם גבהים בטרפז.
לאילו צורות מחולק הטרפז? האם המשולשים בשרטוט חופפים?
- ABCD טרפז ישר זווית ($\sphericalangle D = 90^\circ$, $AB \parallel CD$).
אם ישרטטו את הגובה של הטרפז, לאילו צורות יחולק הטרפז?
שרטטו שרטוט מתאים.



19. ABCD מלבן. $DK = CE$.

- האם המרובע ABKE הוא טרפז שווה שוקיים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע.
- מה יקרה אם ABCD מקבילית,
האם ABKE יהיה טרפז שווה שוקיים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע.



שיעור 5. עוד על טרפז

אלכסונים בטרפז שווה שוקיים ושטח טרפז



קפלו דף נייר וגזרו ממנו טרפז שווה שוקיים.
קפלו את הטרפז שגזרתם לפי ציר הסימטריה ולפי האלכסונים.
האם לדעתכם האלכסונים בטרפז שווה שוקיים:

- שווים זה לזה?
- חוצים זה את זה?
- מאונכים זה לזה?
- חוצים את זוויות הטרפז?

נחקור את תכונות האלכסונים בטרפז שווה שוקיים.

אלכסונים בטרפז שווה שוקיים



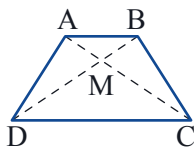
1. א. מהי התכונה של אלכסונים בטרפז שווה שוקיים?

ב. כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח.

ג. האם המשולשים ADC, ו-BCD הם משולשים חופפים? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו.

ד. מה אפשר להסיק מחפיפת המשולשים?

ה. נסחו את המשפט שהוכחתם.



משפט:

אם טרפז הוא שווה שוקיים, אז האלכסונים שווים.

המשפט ההפוך: אם בטרפז האלכסונים שווים, אז הטרפז הוא שווה שוקיים.

המשפט ההפוך נכון, אך לא נוכיח אותו.

אפשר להוכיח את המשפט בדרכים שונות.

לפניכם הוכחה לקריאה עצמית והוכחה אחרת מופיעה באוסף המשימות.

הוכחה לקריאה עצמית:

נשתמש במשולשים הדומים ממשימה 2, כדי להוכיח את המשפט ההפוך:

אם בטרפז האלכסונים שווים זה לזה, אז הטרפז הוא שווה שוקיים.

$$\triangle CDM \sim \triangle ABM$$

הוכחנו כי האלכסונים יוצרים משולשים דומים, לכן:

$$\frac{CM}{AM} = \frac{DM}{BM}$$

יחס הדמיון בין צלעות מתאימות במשולשים דומים:

$$\frac{CM}{AM} + 1 = \frac{DM}{BM} + 1$$

נוסיף 1 לכל אגף:

$$\frac{CM + AM}{AM} = \frac{DM + BM}{BM} \Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{BD}{BM}$$

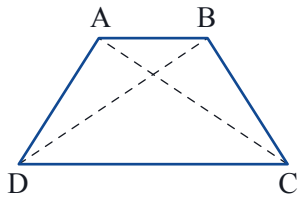
נפשט:

האלכסונים שווים: $AC = BD$, ומכאן לפי הפרופורציה גם $AM = BM$.

קיבלנו משולש ABM שווה שוקיים, וגם משולש CDM שווה שוקיים.

עכשיו נוכל להראות שהמשולשים AMD ו-BMC הם משולשים חופפים (לפי צלע, זווית, צלע)

ומהחפיפה נובע: $AD = BC$, כלומר: **הטרפז הוא שווה שוקיים.**



2. סמנו ב-M את נקודת המפגש של האלכסונים.

א. הוכיחו: המשולשים ABM ו-CDM הם משולשים דומים.

ב. האם בכל טרפז האלכסונים יוצרים משולשים דומים? הוכיחו.



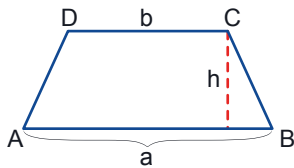
3. הגדרנו: מרובע בעל זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות, נקרא **טרפז**.

מה יקרה אם נשמיט את המילה "בלבד" מההגדרה?

א. האם אחרי שהשמטנו את המילה "בלבד", המקבילית היא טרפז?

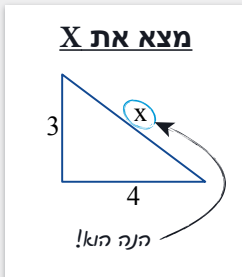
ב. אילו משפטים שהוכחנו על אלכסוני הטרפז עדיין מתקיימים?

שטח טרפז



תזכורת: שטח הטרפז שווה למחצית המכפלה של סכום הבסיסים בגובה.

$$S = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

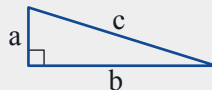


למשפט פיתגורס התפרסמו הוכחות רבות. ייתכן שזהו המשפט המתמטי בעל מספר ההוכחות הרב ביותר. באינטרנט תוכלו למצוא מאות הוכחות שונות למשפט פיתגורס.



נוכח מחדש את **משפט פיתגורס** בעזרת שטח של טרפז ישר זווית.

את ההוכחה הזו כתב הנשיא ה-20 של ארה"ב, ג'יימס גרפילד (Garfield).



א. נתון משולש ישר זווית.

כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח.

ב. מניחים שני משולשים ישרי זווית חופפים ומחברים את הקודקודים, כך:

איזה סוג של משולש נוצר בין שני המשולשים? הוכיחו.

איזה מרובע נוצר משלושת המשולשים? הוכיחו.

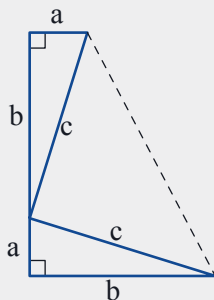
ג. חשבו את שטח הטרפז בשתי דרכים:

(1) לפי נוסחת שטח טרפז

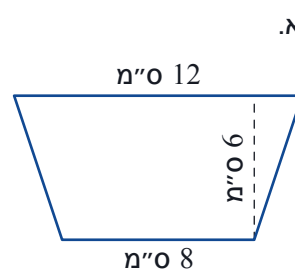
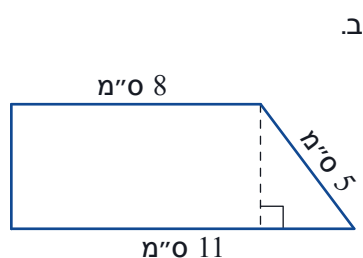
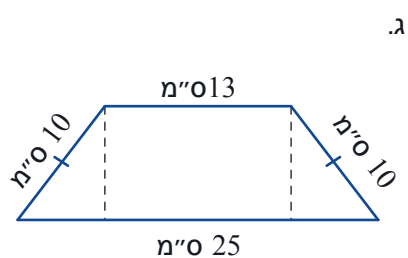
(2) לפי סכום שטחי שלושת המשולשים המרכיבים את הטרפז

ד. השווו בין שני חישובי השטח שכתבתם. פשטו את המשוואה שקיבלתם.

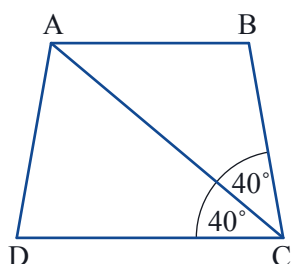
האם הוכחתם את משפט פיתגורס?



4. חשבו את השטח של כל טרפז.

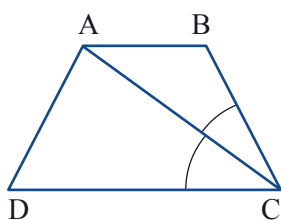


אוסף משימות



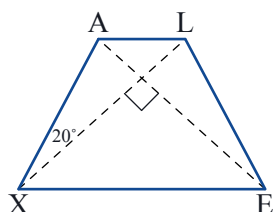
1. בשרטוט טרפז שבו האלכסון AC חוצה את הזווית C.

- א. חשבו את זוויות המשולש ACB.
 ב. איזה סוג משולש הוא ACB? הסבירו.



2. טענה: בטרפז, אם האלכסון חוצה את הזווית, אז מתקבל משולש שווה שוקיים.

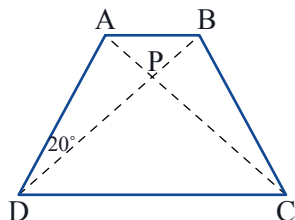
- א. כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח.
 ב. הוכיחו.



3. ALEX טרפז שווה שוקיים.

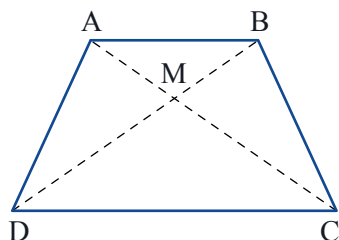
$$\angle AXL = 20^\circ$$

האלכסונים מאונכים זה לזה. חשבו את כל הזוויות של הטרפז לפי הנתונים בשרטוט.



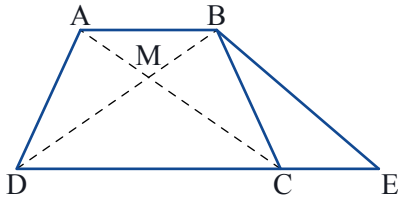
4. ABCD טרפז שווה שוקיים. $\angle ADB = 20^\circ$. $PD = PC$.

חשבו את כל זוויות הטרפז לפי הנתונים. הסבירו את דרך החישוב.



5. בטרפז ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה M,

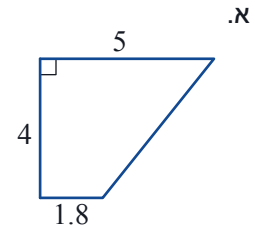
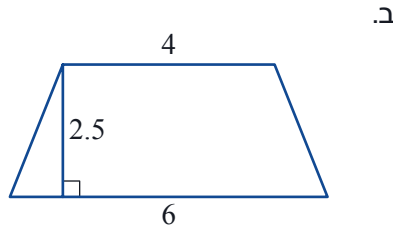
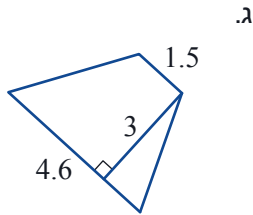
יוצרים משולשים שווי שוקיים: AMB, CMD. הוכיחו כי הטרפז הוא שווה שוקיים.



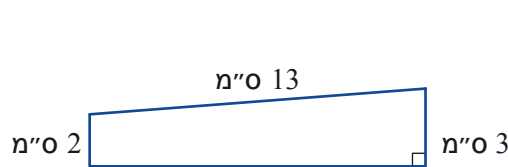
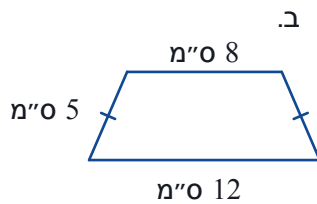
6. הוכיחו את המשפט ההפוך: אם בטרפז האלכסונים שווים, אז הטרפז הוא שווה שוקיים.
(רמז: BE מקביל לאלכסון AC).
כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח, והוכיחו את המשפט.



7. חשבו את השטח של כל טרפז (המידות בס"מ).



8. חשבו שטח והיקף של כל טרפז. היעזרו במחשבון.



9. גזרו שני טרפזים שווים שוקיים חופפים.

- הצמידו את הטרפזים, כך שתתקבל מקבילית. שרטטו את המקבילית.
- הצמידו את הטרפזים, כך שיתקבל משושה. שרטטו את המשושה.
- שי ורון פתרו את סעיף ב, וקיבלו שרטוטים שונים. הייתכן?



10. במרובע זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות, וזוג אחד של צלעות נגדיות שוות.

- האם המרובע הוא בהכרח מקבילית? נמקו.
- האם המרובע הוא בהכרח טרפז? נמקו.
- האם המרובע הוא בהכרח מקבילית או טרפז? נמקו.
- אם המרובע הוא טרפז, האם הוא בהכרח טרפז שווה שוקיים? נמקו.



11. בציר שולחן שצורתו טרפז שווה שוקיים, ובו הבסיס הקטן שווה לשוק, והבסיס הגדול כפול מהבסיס הקטן.

- מהן מידות זוויות הטרפז?
- מדוע, לדעתכם, מייצרים שולחנות שהם בעלי צורה זאת?



שומרים על כושר

1. היחס בין מספר הבנים למספר הבנות בכיתה ט הוא 5:3.
א. מה מספר הבנות אם מספר הבנים בכיתה ט הוא 15?
ב. מה מספר הבנים אם מספר הבנות בכיתה ט הוא 15?
ג. בכיתה ט יש 32 ילדים. כמה מהם בנים וכמה מהן בנות?
2. היחס בין מספר התלמידים שהצליחו במבחן למספר התלמידים שנכשלו בו הוא 4:3
36 תלמידים הצליחו במבחן.
מה מספר התלמידים שנבחנו?
3. בארגז 24 תפוזים ואשכוליות.
א. האם ייתכן שהיחס בין מספר התפוזים למספר האשכוליות הוא 6:5? הסבירו.
ב. רשמו יחס אפשרי בין מספר התפוזים למספר האשכוליות בארגז.
מה מספר התפוזים ומה מספר האשכוליות, לפי היחס שרשמתם? הראו חישוב.
4. עומר ועידן קנו כרטיס הגרלה שמחירו 70 שקלים.
עומר שילם 20 ש"ח ועידן שילם 50 ש"ח.
כיצד יחלקו ביניהם את הזכייה אם זכו ב 1,400 ש"ח?
5. בכד 16 כדורים שחורים ו-12 כדורים לבנים.
א. מה היחס בין מספר הכדורים השחורים למספר הכדורים הלבנים בכד?
ב. בוחרים כדור מבלי להסתכל:
- מה ההסתברות שבחרו כדור לבן?
- מה ההסתברות שבחרו כדור שחור?
6. היחס בין גודל הזוויות במשולש הוא 3:2:1. חשבו את הגודל של כל זווית במשולש.
7. במקבילית, היחס בין הגודל של זוג זוויות סמוכות הוא 5:4. חשבו את זוויות המקבילית.
8. במשולש ישר זווית, היחס בין אורכי הניצבים הוא 12:5, ואורך הניצב הקטן הוא 2.5 ס"מ.
מהו היחס בין הניצב הגדול ליתר?
9. היקף מלבן 70 ס"מ. היחס בין אורכי הצלעות 3:2.
חשבו את שטח המלבן.

