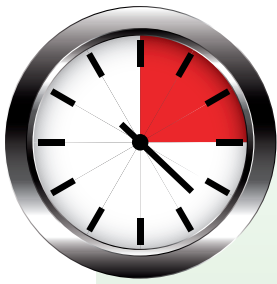


יחידה 19: הסתברות

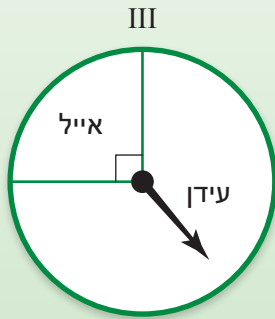
שיעור 1. נזכרים בהסתברות



אייל ועידן משחקים בשעונים.

כל אחד בתורו מסובב מחוג של אחד השעונים לפי בחירתו.

מנצח מי שהמחוג עוצר בשטח שעליו רשום שמו.



באיזה שעון כדאי לכל אחד מהמשתתפים לבחור?

כל ילד מסובב את השעון שבחר 120 פעמים.

שערו כמה פעמים בערך, צפוי שהמחוג יעצור בכל שטח, בכל שעון.

ניזכר איך לחשב הסתברויות כדי לשער תוצאות צפויות.

1. א. איזה שעון הוגן?

ב. אייל ועידן עומדים לסובב פעם אחת את המחוג בשעון (I)

האם נוכל לדעת מראש מי יזכה? הסבירו.

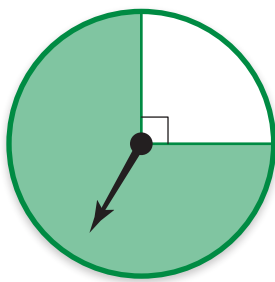
2. מסובבים את המחוג בשעון שבשרטוט.

א. מהי ההסתברות שהמחוג יעצור בשטח הירוק?

ב. מהי ההסתברות שהמחוג יעצור בשטח הלבן?

ג. יונתן מסובב את המחוג 200 פעמים.

כמה פעמים בערך, צפוי שהמחוג יעצור בשטח הירוק?



3. מטילים קוביית משחק רגילה.

א. חשבו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:

- לקבל את המספר 5

- לקבל את המספר 2

- לקבל מספר המתחלק ב-3

ב. מטילים את הקובייה 60 פעמים. כמה פעמים בערך, צפוי שיתקבל המספר 25?



במשימה 3 ההסתברות לקבל את המספר 5 בהטלת קובייה היא $\frac{1}{6}$
 כלומר, אם נטיל את הקובייה מספר רב של פעמים, יתקבל המספר 5 **בערך** ב- $\frac{1}{6}$ מהמקרים.
 למשל אם נטיל את הקובייה 60 פעמים, המספר 5 צפוי להתקבל **בערך** ב- $\frac{1}{6}$ מהמקרים, כלומר
בערך 10 פעמים.



4. בשקית 20 גולות: 10 אדומות, 8 כחולות, ו-2 ירוקות.

א. מוציאים גולה אחת מבלי להסתכל, גולה אחת.

חשבו את ההסתברויות להוציא:

גולה **אדומה** גולה **ירוקה** גולה **כחולה** גולה **כתומה**

ב. מוציאים גולה אחת, רושמים את הצבע שלך, ומחזירים אותה לשקית.

מוציאים עוד גולה רושמים את הצבע שלה ומחזירים לשקית.

חוזרים על התהליך הזה 50 פעמים.

כמה פעמים בערך, צפוי שתתקבל גולה **כחולה**?



ג. מוציאים מהשקית גולה ולא מחזירים לשקית.





כמה גולות צריך להוציא כדי להיות בטוחים שיש בידינו זוג גולות מאותו צבע?



אוסף משימות



1. חברו קו בין המקרה המתואר להסתברות המתאימה.

- | | | |
|-----------------|---|--|
| $\frac{1}{2}$ ● | ● | א. קבלת  בהטלת קוביית משחק |
| $\frac{1}{3}$ ● | ● | ב. קבלת  בהטלת מטבע של שקל |
| $\frac{1}{4}$ ● | ● | ג. קבלת ג  בסיבוב סביבון |
| $\frac{1}{6}$ ● | ● | ד. קבלת מספר זוגי בהטלת קובייה |
| | ● | ה. קבלת מספר גדול מ-4 בהטלת קובייה |
| | ● | ו. המחוג יעצור בשטח הירוק בשעון  |



2. מטילים קוביית משחק רגילה. בכל סעיף, חשבו את ההסתברות לקבל:

- א. את המספר 4 ב. מספר המתחלק ב- 5 ג. מספר קטן מ- 2 ד. מספר קטן מ- 7



3. מטילים קוביית משחק רגילה.

א. חשבו את ההסתברות לקבל מספר המתחלק ב- 3.

ב. מטילים את הקובייה 30 פעמים. כמה פעמים בערך, צפוי להתקבל מספר המתחלק ב- 3?

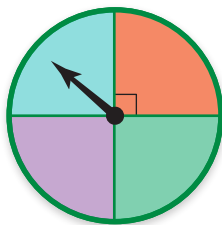


4. מסובבים את המחוג שבשרטוט.

א. מה ההסתברות שהוא יעצור על החלק הירוק?

ב. מסובבים את המחוג 16 פעמים, כמה פעמים בערך, המחוג צפוי לעצור על

החלק הירוק?

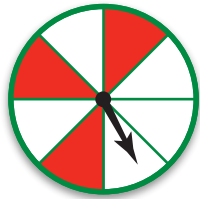


5. לפניכם שעון המחולק ל- 8 גזרות שוות.

א. מסובבים את המחוג. מה ההסתברות שהוא יעצור על החלק האדום?

ב. מסובבים את המחוג 16 פעמים.

כמה פעמים בערך, המחוג צפוי לעצור על החלק האדום?



6. בכד 10 כדורים: 4 אדומים, 5 כחולים, ו- 1 ירוק.

מוציאים מתוך הכד, מבלי להסתכל, כדור אחד.

חשבו את ההסתברויות להוציא:

- א. כדור אדום. ב. כדור כחול. ג. כדור ירוק. ד. כדור שחור.



7. בכד נמצאים כדורים בצבעים שונים.

$\frac{1}{3}$ מהם בצבע אדום, $\frac{1}{5}$ מהם בצבע כחול, $\frac{3}{10}$ מהם בצבע ירוק, והשאר בצבע סגול.

א. בוחרים כדור מבלי להסתכל. לאיזה צבע כדור יש את ההסתברות הגדולה ביותר להבחר?

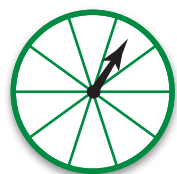
ב. בכד 20 כדורים אדומים. כמה כדורים מכל צבע בכד?



8. לפניכם שעון המחולק ל- 10 גזרות שוות,

צבעו את השעון כך שיתקבלו ההסתברויות הבאות:

לקבל צהוב - 0.4 אדום - 0.1 ירוק - 0.2 כחול - 0.3



שיעור 2. הסתברות של מספר תוצאות אפשריות



הציונים במבחן מתמטיקה של תלמידי כיתה ט היו:

10	9	8	7	6	5	4	ציון
5	8	10	7	6	3	1	מספר תלמידים

תלמיד מהכיתה נבחר באקראי. שערך לאיזה מאורע ההסתברות הגדולה ביותר.

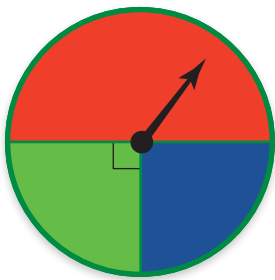
- נבחר תלמיד שציונו 8,
- נבחר תלמיד שציונו לפחות 8,
- נבחר תלמיד שציונו לכל היותר 8.

ניזכר איך לחשב הסתברויות של מאורעות המורכבים מכמה תוצאות אפשריות.

1. מהו הציון הממוצע של התלמידים במבחן זה?
מה ההסתברות שציונו של תלמיד שנבחר הוא פחות מהממוצע?



- משמעות הביטוי "לפחות [מספר]" היא המספר עצמו וכל המספרים הגדולים ממנו.
צ/מ: במשימה 1 לפחות 8 משמעותו הציון 8 או יותר (8, 9, 10).
- משמעות הביטוי "לכל היותר [מספר]" היא המספר עצמו וכל המספרים הקטנים ממנו.
צ/מ: במשימה 1 לכל היותר 8 משמעותו 8 או פחות (4, 5, 6, 7, 8).
- משתמשים בביטויים "לפחות [מספר]" "לכל היותר [מספר]" אם רוצים לכלול את המספר עצמו.



2. מסובבים את המחוג של השעון שבשרטוט עד שהוא נעצר.
עומר ינצח אם המחוג יעצור על השטח **הכחול** או על השטח הירוק.
יונתן ינצח אם המחוג יעצור על השטח **האדום**.
א. למי מהילדים סיכוי טוב יותר לנצח?
ב. חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים:
 - המחוג יעצור בשטח **האדום**.
 - המחוג יעצור בשטח **הכחול**.
 - המחוג יעצור בשטח **הכחול** או בשטח הירוק.
 - המחוג **לא** יעצור בשטח **הכחול**.
- ג. מסובבים את המחוג 200 פעמים. כמה פעמים בערך, המחוג צפוי לעצור:
 - בשטח **האדום**?
 - בשטח **הכחול** או בשטח הירוק? הסבירו.



- ההסתברות לקבלת מאורע אחד או מאורע שני (בתנאי שאין קשר ביניהם), היא ההסתברות לקבלת מאורע אחד **ועוד** ההסתברות לקבלת מאורע שני. כלומר, סכום ההסתברויות של שני המאורעות.

דוגמה: במשימה 2, ההסתברות שהמחוג יעצור בשטח **הכחול** היא $\frac{1}{4}$

ההסתברות שהמחוג יעצור בשטח **הירוק** היא $\frac{1}{4}$

ההסתברות שהמחוג יעצור בשטח **הכחול** או בשטח **הירוק**, היא: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

- ההסתברות **לא** לקבל מאורע היא ההסתברות לקבל את כל המאורעות האחרים, פרט למאורע זה. **דוגמה:** במשימה 2, ההסתברות שהמחוג **לא** יעצור בשטח **הכחול** היא ההסתברות שהמחוג

יעצור בשטח **האדום** או בשטח **הירוק**. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3. במשפחה שלושה ילדים.

בכור	אמצעי	צעיר

א. רשמו בטבלה את כל האפשרויות של בנים ובנות במשפחה.

ב. בכמה אפשרויות **הבכור** הוא **בן**?

אם נבחר משפחה באקראי, מה ההסתברות **שהבכור** במשפחה הוא **בן**?

אם נבחר משפחה באקראי, מה ההסתברות **שרק הבכור** במשפחה הוא **בן**?

ג. איזו הסתברות גדולה יותר:

שיהיו במשפחה 2 בנים או שיהיו במשפחה 3 בנים?

ד. איזו הסתברות גדולה יותר:

שיהיו במשפחה 2 בנים או שיהיו במשפחה 2 בנות?

ה. איזו הסתברות גדולה יותר:

שיהיו במשפחה לפחות 2 בנים או שיהיו במשפחה לכל היותר 2 בנים?





קיימים מחקרים לגבי תפיסות מוטעות בהסתברות אצל ילדים. מיכל גולן ומירה ברקן חקרו את הנושא בקרב תלמידי כיתות ו- ח. בין יתר השאלות הן שאלו גם את השאלה הבאה: **מה הסיכויים להולדת בן או בת במשפחה, בה יש כבר שלושה בנים? הסבירו.**

תחילה, נסו לענות בעצמכם על שאלה זו.

רוב התלמידים שענו תשובה נכונה (מחצית מהתלמידים) השתמשו בגישה ההסתברותית.

(גם במקרה זה, הסיכוי להולדת בן הוא חצי, ולהולדת בת - חצי.)

התלמידים שטעו נקטו בגישה הרגשית (למשל, "אם יש במשפחה שלושה בנים, רוב הסיכויים שתיוולד בת, כי זה מוגזם! כולם מחכים לבת"). או מתוך נסיון חייהם (למשל, "רוב הסיכויים שיוולד עוד בן. אני רוצה בת, אבל יודע שיוולד עוד בן").



אוסף משימות



1. מטילים קוביית משחק רגילה.

חֲשבו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:

- א. לקבל את המספר 4 או 5. ד. לקבל לכל היותר 3.
 ב. לקבל מספר ראשוני. ה. לקבל מספר קטן מ- 3.
 ג. לקבל מספר המתחלק ב- 3. ו. לקבל לפחות 5.



2. לפניכם טבלה המתארת את צורת הבילוי המועדפת על תלמידי כיתה ט.

ספורט	בילוי עם חברים	צפייה בטלוויזיה	משחקי מחשב	צורת הבילוי המועדפת
5	12	8	15	מספר תלמידים

א. כמה תלמידים בכיתה?

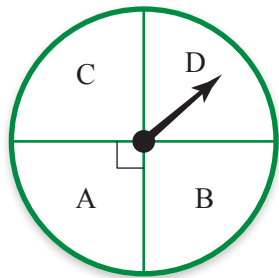
ב. תלמיד מהכיתה נבחר באקראי. מה ההסתברות שצורת הבילוי העדיפה עליו היא צפייה בטלוויזיה?



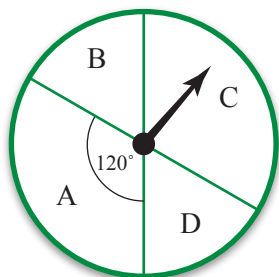
3. רושמים על שבעה פתקים את שמות ימי השבוע. על כל פתק רשום שמו של יום אחר. מקפלים את הפתקים ושמים בקופסה. מה ההסתברות להוציא פתק עם שם של יום המתחיל באות "ש"?



4. נועם בִּדְק מְכוֹנָה הַמְמַלֵּאת בְּקִבּוּקֵי מַיִם שֶׁל לִיטֵר אֶחָד. הוּא בָּחַר 100 בְּקִבּוּקִים וּמֵדַד אֶת נֶפֶח הַמַּיִם בְּכָל בְּקִבּוּק. ב- 10 בְּקִבּוּקִים נֶפֶח הַמַּיִם הִיָּה פָּחוֹת מִ- 1 לִיטֵר מַיִם. ב- 55 בְּקִבּוּקִים נֶפֶח הַמַּיִם הִיָּה בְּדִיּוּק 1 לִיטֵר מַיִם. בְּשָׂאֵר הַבְּקִבּוּקִים הַנֶּפֶח הִיָּה יוֹתֵר מִ- 1 לִיטֵר מַיִם. הִשְׁתַּמְשׂוּ בְּנִתּוּנִים שְׁנוּעִם מֵצֵא כְּדֵי לְשַׁעַר אֶת הַהִסְתַּבְּרוֹת שֶׁהַבְּקִבּוּק הַבֹּא:
- יְכִיל בְּדִיּוּק 1 לִיטֵר מַיִם.
 - יְכִיל יוֹתֵר מִ- 1 לִיטֵר מַיִם.
 - לֹא יְכִיל בְּדִיּוּק 1 לִיטֵר מַיִם.

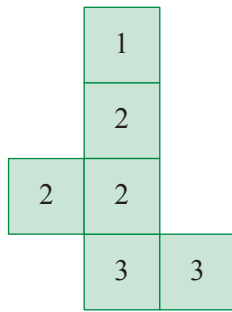


5. מְסוֹבְבִים אֶת הַמַּחּוּג שֶׁל הַשַּׁעוֹן בְּשֵׁרֶטוּט.
- מָה הַהִסְתַּבְּרוֹת שֶׁהַמַּחּוּג יַעֲצוֹר בְּשֵׁטַח A?
 - מָה הַהִסְתַּבְּרוֹת שֶׁהַמַּחּוּג יַעֲצוֹר בְּשֵׁטַח B אוּ בְּשֵׁטַח C?
 - מָה הַהִסְתַּבְּרוֹת שֶׁהַמַּחּוּג לֹא יַעֲצוֹר בְּשֵׁטַח D?
 - מְסוֹבְבִים אֶת הַמַּחּוּג 80 פְּעָמִים.
- כַּמָּה פְּעָמִים בְּעֵרֶךְ, הַמַּחּוּג צָפוּי לַעֲצוֹר בְּשֵׁטַח A אוּ בְּשֵׁטַח C?



6. מְסוֹבְבִים אֶת הַמַּחּוּג שֶׁל הַשַּׁעוֹן בְּשֵׁרֶטוּט.
- מָה הַהִסְתַּבְּרוֹת שֶׁהַמַּחּוּג יַעֲצוֹר בְּשֵׁטַח A?
 - מָה הַהִסְתַּבְּרוֹת שֶׁהַמַּחּוּג יַעֲצוֹר בְּשֵׁטַח B אוּ בְּשֵׁטַח C?
 - מָה הַהִסְתַּבְּרוֹת שֶׁהַמַּחּוּג לֹא יַעֲצוֹר בְּשֵׁטַח D?
 - מְסוֹבְבִים אֶת הַמַּחּוּג 90 פְּעָמִים.
- כַּמָּה פְּעָמִים בְּעֵרֶךְ, הַמַּחּוּג צָפוּי לַעֲצוֹר בְּשֵׁטַח A אוּ בְּשֵׁטַח C?

7. בְּכַד 8 גּוֹלוֹת יְרוּקוֹת, 6 גּוֹלוֹת כְּחוֹלוֹת, 4 גּוֹלוֹת אֲדוּמוֹת ו- 2 גּוֹלוֹת סִגּוּלוֹת. מוֹצִיָּאִים מֵהַכַּד גּוֹלָה אַחַת, מְבַלִּי לְהִסְתַּכֵּל.
- מָה הַהִסְתַּבְּרוֹת שֶׁהַגּוֹלָה שְׁמוֹצִיָּאִים תִּהְיֶה בְּצֵבַע כְּחוֹל?
 - מָה הַהִסְתַּבְּרוֹת שֶׁהַגּוֹלָה שְׁמוֹצִיָּאִים תִּהְיֶה בְּצֵבַע סִגּוּל אוּ יְרוּק?
 - מָה הַהִסְתַּבְּרוֹת שֶׁהַגּוֹלָה שְׁמוֹצִיָּאִים לֹא תִהְיֶה בְּצֵבַע אֲדוּם?



8. לפניכם פריסה של קובייה מיוחדת.

א. חשבו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:

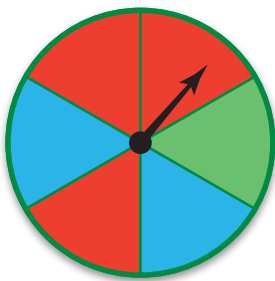
- לקבל את המספר 2

- לקבל את המספר 3

- לקבל את המספר 2 או את המספר 3

ב. מצאו מאורע שההסתברות שלו היא $\frac{1}{6}$

ג. מטילים את הקובייה 300 פעמים. כמה פעמים בערך, צפוי להתקבל המספר 3?



9. לפניכם שעון המחולק ל-6 גזרות שוות.

סובבו את המחוג מספר פעמים.

אריאל ספרה ומצאה שהמחוג עצר על הצבע **האדום** 60 פעמים.

א. כמה פעמים בערך, אפשר להניח שהמחוג עצר בשטח **הכחול**?

ב. כמה פעמים בערך, אפשר להניח שהמחוג עצר בשטח **הירוק**?

ג. כמה פעמים בערך, אפשר להניח שסובבו את המחוג של השעון?

10. הרכיבו מהספרות 2, 5, 8 מספרים דו ספרתיים. (מותר להשתמש פעם אחת בכל ספרה).

א. כמה מספרים כאלה יש? רשמו אותם.

ב. בוחרים מספר באקראי. מה ההסתברות שהמספר הנבחר הוא:

- מספר זוגי? - קטן מ- 250?

- מתחלק ב- 5? - לפחות 252?



11. אבי, בני, גילה, דני, והילה נבחרו לייצג את בית הספר בתחרות.

באוטובוס יש מקום רק לשלושה תלמידים. עורכים הגרלה בין חמשת הילדים.

א. רשמו את כל האפשרויות של שלושה מתוך חמשת הילדים.

(כתבו רק את האות הראשונה מכל שם לדוגמה: א, ב, ג)

ב. חשבו את ההסתברויות למאורעות הבאים:

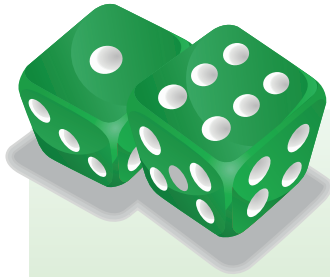
- שנבחרו שתי בנות.

- שגילה נבחרה.

- שנבחרו לפחות שני בנים.

שיעור 3. מכפלה זוגית או אי זוגית

הסתברות של מאורעות דו-שלביים



מטילים שתי קוביות לפי התור ומכפילים את המספרים המתקבלים.
נועה מקבלת נקודה אם המכפלה זוגית.
דניאל מקבלת נקודה אם המכפלה אי זוגית.
 מנצחת במשחק השחקנית שצברה הכי הרבה נקודות.
 מי לדעתכם תנצח? הסבירו.

נלמד לחשב הסתברויות של מאורעות דו שלביים.

x	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3				12		
4						
5			15			
6						

1. א. שחקו בזוגות את המשחק 20 פעמים.
השוו את תוצאות הכיתה כולה.
- ב. למי מהבנות סיכוי גבוה יותר לנצח? הסבירו.
- ג. השלימו את הטבלה.
 - כמה תוצאות בטבלה?
 - מה ההסתברות לקבל מכפלה זוגית?
 - מה ההסתברות לקבל מכפלה אי זוגית?



x	1	3	5	2	4	6
1	1	3	5	2	4	6
3	3	9	15	6	12	18
5	5	15	25	10	20	30
2	2	6	10	4	8	12
4	4	12	20	8	16	24
6	6	18	30	12	24	36

2. **עידן** סידר את טבלת המכפלות כך:
 צבעו את כל האזורים בהם המכפלה זוגית.
 האם קל יותר לקבוע מי תנצח בעזרת הטבלה של עידן? הסבירו.

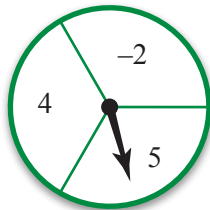


במאורעות דו שלביים, בהם מדובר במספר גדול של תוצאות, נוח ויעיל לייצג את התוצאות בטבלה. כדי לחשב הסתברות של מאורע מתוך הטבלה, סופרים את מספר התוצאות המתאימות למאורע מתוך סך כל האפשרויות שמופיעות בטבלה.

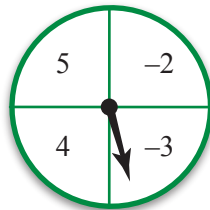
דוגמה: במשימה 1, המספר 12 מופיע בטבלה 4 פעמים מתוך 36 האפשרויות הקיימות בטבלה. לכן, ההסתברות לקבל את המספר 12 בהטלת שתי קוביות היא $\frac{4}{36}$

3. מסובבים את המחוג של כל אחד מהשעונים המשורטטים.

שעון II



שעון I



מחשבים את מכפלת המספרים המתקבלים. (כל שעון מחולק לחלקים שווים).

עומר מנצח - אם מכפלת המספרים חיובית.

אייל מנצח - אם מכפלת המספרים שלילית.

א. שיערו אם המשחק הוגן?
ב. השלימו את הטבלה.

ג. מצאו בעזרת הטבלה את ההסתברות ש**עומר** ינצח, ואת ההסתברות ש**אייל** ינצח.
ד. האם צדקתם בהשערתכם?

שעון I

	x			
שעון II				



אוסף משימות



1. מעיין ודור משחקים במשחק "סולמות וחבלים".

הם מטילים שתי קוביות וצועדים מספר צעדים לפי סכום המספרים על שתי הקוביות. המנצח הוא השחקן המגיע בדיוק למשבצת ה-100 למי מהילדים סיכוי גדול יותר לנצח במהלך הבא?

94	95	96 ^{דור}	97	98	99	100 _{מעיין}
93 _{מעיין}	92	91	90	89	88	87



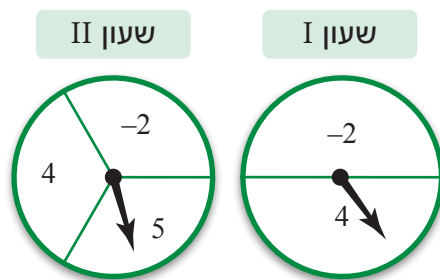
ליאור \ ענת	1	2	3	4	5
1					
2				6	
3		5			
4					
5					

2. **ליאור וענת** משחקות במשחק "זוג או פרט".
הן מראות בו זמנית מספר אצבעות ביד ימין.
ליאור מנצחת אם סכום האצבעות ששתיהן מראות הוא מספר זוגי.
ענת מנצחת אם סכום האצבעות הוא מספר אי-זוגי.
א. קְשְמו את כל הסכומים בטבלה.
ב. מה ההסתברות **שליאור** תנצח?
מה ההסתברות **שענת** תנצח? הסבירו.



x	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

3. מטילים שתי קוביות משחק רגילות וכופלים את המספרים המתקבלים.
א. קְשְמו בטבלה את מכפלת המספרים המתקבלים על שתי הקוביות.
ב. מצאו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:
- המכפלה שווה ל-4.
- המכפלה שווה ל-5.
- המכפלה היא 20 או 30.
- המכפלה גדולה מ-20.
ג. מצאו מאורע שההסתברות שלו היא $\frac{4}{36}$.



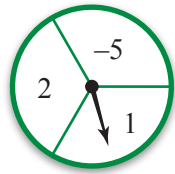
4. מסובבים את המחוג של כל אחד מהשעונים המשורטטים, ומחשבים את מכפלת המספרים המתקבלים.

שעון I

x	-2	4
-2		
4		
5		

שעון II

- א. השלימו את הטבלה. כמה תוצאות בטבלה?
ב. חשבו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:
- מכפלת המספרים -10.
- מכפלת המספרים -4.
- מכפלת המספרים שלילית.
ג. מצאו מאורע שההסתברות שלו $\frac{1}{3}$.

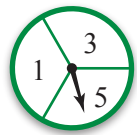


x				

5. לפניכם שעון המחולק לשלושה חלקים שווים. מסובבים את המחוג בשעון פעמיים.

- א. רשמו את המכפלות של שני המספרים המתקבלים.
 ב. חשבו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:
 - תתקבל מכפלה חיובית.
 - תתקבל מכפלה שלילית.
 - תתקבל מכפלה שווה ל-1.
 ג. מצאו מאורע שההסתברות שלו $\frac{2}{9}$.

שעון II



שעון I



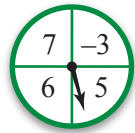
6. לפניכם שני שעונים, כל שעון מחולק ל-3 חלקים שווים. מסובבים את המחוגים בשני השעונים, ומחשבים את המכפלה של המספרים המתקבלים.

שעון I

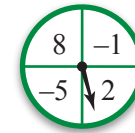
x	2	5	6
שעון II	1		
	3		
	5		

- א. השלימו את הטבלה. כמה תוצאות בטבלה?
 ב. חשבו את ההסתברות למאורעות הבאים:
 - מכפלת המספרים 6
 - מכפלת המספרים 25
 - מכפלת המספרים זוגית
 - מכפלת המספרים אי-זוגית

שעון II



שעון I



7. מסובבים את שני המחוגים של שני השעונים המשורטטים, ומחשבים את מכפלת המספרים המתקבלים. **רועי** מנצח - אם מכפלת המספרים חיובית. **רותם** מנצחת - אם מכפלת המספרים שלילית.

x				

- א. שער, אם המשחק הוגן?
 ב. השלימו את הטבלה.
 ג. מצאו בעזרת הטבלה את ההסתברות ש**רועי** ינצח ואת ההסתברות ש**רותם** תנצח.
 ד. האם צדקתם בהשערתכם?

שיעור 4. במחשבה תחילה

ניתוח משחקים בהסתברות



נשחק בזוגות את המשחק "במחשבה תחילה".
(ראו הוראות במשימה 1)

הסבירו את שיקוליכם בהנחת האטבים על הלוח.

ננתח ונבדוק את הסיכויים לנצח במשחק.

1. שחקו בזוגות את המשחק "במחשבה תחילה" מספר פעמים.

אביזרים למשחק

- 2 קוביות משחק.
- 22 אטבים (11 לכל שחקן)

הוראות המשחק

- כל שחקן בוחר באחד מצידי הלוח.
- במהלך המשחק מטילים שתי קוביות ומסתכלים על סכום הנקודות שעליהן.
- כל שחקן מניח 11 אטבים על הצד שלו לפי שיקוליו. אפשר להניח יותר מאטב אחד על כל מספר.
- בכל תור, מטילים את שתי הקוביות.
- כל שחקן בודק אם יש לו אטב המונח על סכום המספרים שהתקבל בהטלת הקובייה.
- אם יש לו אטב על המספר המתאים הוא מוריד אותו מהלוח.
- **מנצח:** אם סכום המספרים על הקוביות הוא 8 ולשני השחקנים יש אטבים על המספר 8, כל שחקן מוריד אטב אחד מהלוח.
- חוזרים על המשחק עד שאחד השחקנים מוריד את כל האטבים מהלוח.

לוח המשחק

שחקן ב'

שחקן א'

	2	2	
	3	3	
	4	4	
	5	5	
	6	6	
	7	7	
	8	8	
	9	9	
	10	10	
	11	11	
	12	12	

- **מנצח במשחק:** השחקן המוריד ראשון את כל האטבים שלו מהלוח.

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. השלימו את הטבלה וענו על השאלות.

- האם לכל סכום מ-2 עד 12 אותה הסתברות?
- לאיזה סכום הסתברות גדולה יותר להתקבל, ל-11 או ל-9? הסבירו.
- מצאו עוד שני סכומים שהסתברות שלהם להתקבל שונה.
- כמה פעמים מופיע הסכום 7? מה ההסתברות לקבל 7?
- לאיזה סכומים ההסתברות הנמוכה ביותר להתקבל?



3. לאור הממצאים שלכם במשימה הקודמת, באיזה אופן הייתם מסדרים כעת את האטבים על לוח המשחק?

הסתברות (Probability) התפתחה מתוך רצון להבין עקרונות הקשורים במשחקי מזל. במאה ה-17 החלו מתמטיקאים לחקור הסתברויות לזכייה במשחקי מזל. המתמטיקאים בלז פסקל (Blaise Pascal) ופייר דה פרמה (Pierre de Fermat) פיתחו תורת הסתברות שבה הם מגדירים באופן מדויק את כל התוצאות האפשריות של ניסוי, ומייחסים הסתברות מסוימת לכל תוצאה. כיום, עקרונות ההסתברות מהווים בסיס לתחומי מדע רבים ומגוונים למשל: פיזיקה (מכניקה סטטיסטית, תרמודינמיקה, תורת הקוונטים), כלכלה (ניהול כספים, ניהול סיכונים) רפואה (קביעת סיכונים, אבחונים).

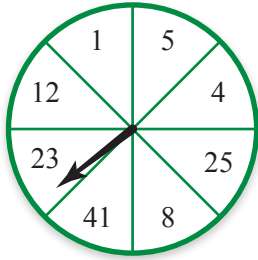


מצאו באינטרנט דוגמה לשימוש בהסתברות באחד התחומים המדעיים.





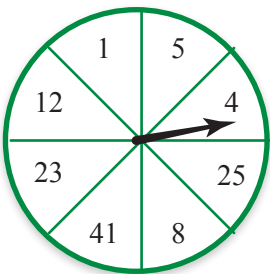
אוסף משימות



1. על החוגה רשומים מספרים. במשחק מזל ארבעה משתתפים. כל שחקן בוחר תכונה אחת של מספרים. **אלי** בחר את התכונה - המספר כפולה של 5 **בני** בחר את התכונה - המספר גורם של 12 **גדי** בחר את התכונה - המספר אי זוגי **דני** בחר את התכונה - המספר חד ספרתי. שחקן זוכה בנקודה אם המספר מקיים את התכונה שבחר.

זכרון: אם מתקבל המספר 5 אלי, גלי ודני זוכים בנקודה.

- א. למי יש את הסיכוי הגדול ביותר לזכות בנקודה?
ב. כמה נקודות בערך, צפוי לצבור כל אחד מהמשתתפים?



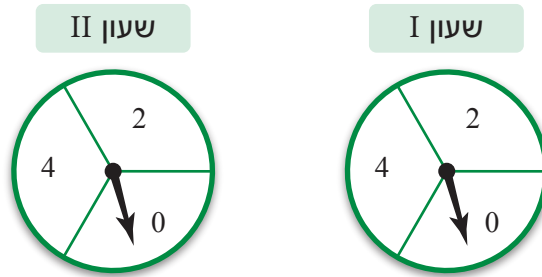
2. על החוגה רשומים מספרים. במשחק ארבעה משתתפים. כל שחקן בוחר **שתיים מתכונות** המספרים הבאות.
- המספר כפולה של 5
 - המספר כפולה של 4
 - המספר גורם של 12
 - המספר גורם של 24
 - המספר אי זוגי
 - המספר חד ספרתי

שחקן זוכה בנקודה אם המספר מקיים את **אחת או שתיים** מהתכונות שבחר.

- א. **אלון** בחר את התכונות: כפולה של 5 ומספר אי זוגי. מה ההסתברות ש**אלון** יזכה בנקודה?
ב. **דנה** בחרה את התכונות: גורם של 24 ומספר חד ספרתי. מה ההסתברות ש**דנה** תזכה בנקודה?
ג. **תמר** בחרה את התכונות: כפולה של 4 וכפולה של 5. מה ההסתברות ש**תמר** תזכה בנקודה?
ד. אילו שתי תכונות כדאי לבחור כדי לזכות בנקודה?



3. לפניכם שני שעונים זהים המחולקים לשלושה חלקים שווים.



מסובבים את המחוג של כל שעון ומחשבים את סכום המספרים המתקבלים.

+	0	2	4
0			
2			
4			

א. השלימו את הטבלה.

ב. מצאו הסתברות מתאימה:

- לקבל סכום 4

- לקבל סכום 6

- לקבל סכום 8

ג. דור צריך לבחור באחד הסכומים האפשריים.

אם הסכום שבחר יתקבל, דור יזכה בנקודה.

באיזה סכום כדאי לו לבחור? הסבירו.



4. מטילים שתי קוביות משחק רגילות ורושמים את המספר הגדול מבין השניים.

אם מתקבל אותו מספר על שתיהן, רושמים מספר זה.

(i) הכינו טבלה המתאימה לרישום כל התוצאות האפשריות והשלימו אותה.

(ii) חשבו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:

א. לקבל את המספר 6. ג. לקבל מספר זוגי. ה. לקבל מספר גדול מ-3.

ב. לקבל את המספר 1. ד. לקבל מספר אי-זוגי. ו. לקבל מספר קטן מ-5.

שיעור 5. יעול טבלת ההסתברות



לתומר ויואב שתי קוביות משחק מיוחדות. הם מטילים את הקוביות. על הפאות של קובייה א רשומים 3 מספרים חיוביים ו-3 מספרים שליליים. על הפאות של קובייה ב רשומים 2 מספרים חיוביים ו-4 מספרים שליליים. **תומר** מנצח אם מכפלת המספרים שהקוביות מראות היא חיובית. **יואב** מנצח אם מכפלת המספרים שהקוביות מראות היא שלילית.

האם המשחק הוגן?

הציעו דרך להכין את טבלת התוצאות (מבלי לציין במפורש את המספרים בה), כך שנוכל לקבוע את סיכויי הניצחון של כל משתתף.

נלמד כיצד לייעל את טבלת ההסתברות.

1. א. כתבו בטבלה, במשבצות המתאימות, "חיובי" לתוצאה חיובית ו-"שלילי" לתוצאה שלילית. קבעו מה ההסתברות של כל שחקן לנצח.

קובייה ב

	x	חיובי	חיובי	שלילי	שלילי	שלילי	שלילי
קובייה א	חיובי						
	חיובי						
	חיובי						
	שלילי						
	שלילי						
	שלילי						
	שלילי						

קובייה ב

		חיובי	שלילי				
קובייה א	חיובי						
	חיובי						
	שלילי						
	שלילי						

- ב. **אייל** אמר: כדאי לחלק את הלוח מראש לחלק "חיובי" ולחלק "שלילי" לכל קובייה, ואז לצבוע את השטחים בהם המכפלה חיובית. כך אפשר בקלות לקבוע אם המשחק הוגן. צבעו את כל המשבצות בהם תתקבל תוצאה חיובית. מה ההסתברות לקבל תוצאה חיובית?



קובייה ב

	חיובי	שלילי			
קובייה א	חיובי				
	שלילי				

אפשר לחשב הסתברויות גם במקרים בהם לא רושמים את התוצאות האפשריות אלא רק מייצגים כל סוג של תוצאה לפי מספר הפעמים שהיא מופיעה.

טבלה כזו נקראת גם **דיאגרמת שטח**.

דוגמה: במשימה 1 סעיף ב חילקנו את הטבלה לאזורים חיוביים ושליליים וצבענו את השטחים החיוביים (ראו שרטוט).

2. עופרה ואיילת יורות חץ למטרה.

ההסתברות שעופרה תפגע במטרה היא $\frac{3}{10}$. ההסתברות שאיילת תפגע במטרה היא $\frac{4}{10}$.

איילת

	פגעה	החטיאה			
עופרה	פגעה				
	החטיאה				

א. מה ההסתברות שעופרה לא תפגע במטרה?

מה ההסתברות שאיילת לא תפגע במטרה?

ב. חילקנו את הריבוע (10x10 משבצות) בקו אופקי

ל"פגעה" ו"החטיאה" עבור עופרה,

ובקו אנכי ל"פגעה" ו"החטיאה" עבור איילת.

מה ההסתברות ששתיהן גם יחד יפגעו במטרה? הסבירו.

מה ההסתברות שעופרה תפגע במטרה ואיילת לא? הסבירו.



בדיאגרמת שטח מחלקים את הריבוע אופקית ואנכית בהתאם להסתברויות הנתונות.

בריבוע משובץ אפשר לחשב הסתברות של מאורע באמצעות

ספירת המשבצות המתאימות למאורע, וחישוב החלק שמספר

זה מהווה מתוך כל המשבצות.

אפשר גם לחשב שטח המלבנים המתאימים למאורע.

דוגמה: במשימה 2 כדי לחשב את ההסתברות ששתי

הקלעיות יפגעו במטרה, סופרים את מספר

המשבצות המתאימות למאורע, מתוך כל המשבצות.

ספרנו 12 משבצות מתוך 100,

ולכן ההסתברות היא $\frac{12}{100}$

איילת

	פגעה	החטיאה			
עופרה	פגעה				
	החטיאה				

3. בסל 8 כדורים: 3 אדומים ו- 5 ירוקים.

מוציאים מתוך הסל כדור אחד ורושמים את הצבע שלו.
מחזירים את הכדור לסל. מוציאים עוד כדור ורושמים את הצבע שלו.

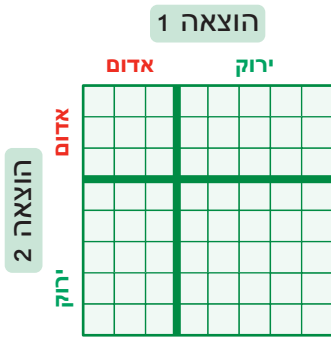
א. רשמו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות
(היעזרו בדיאגרמה):

- להוציא שני כדורים ירוקים.

- להוציא שני כדורים אדומים.

- להוציא שני כדורים בצבעים שונים.

ב. מה סכום ההסתברויות שקיבלתם לכל המאורעות בסעיף א? הסבירו מדוע.



אוסף משימות



1. אייל וטמיר מתאמנים בזריקת כדור לסל.

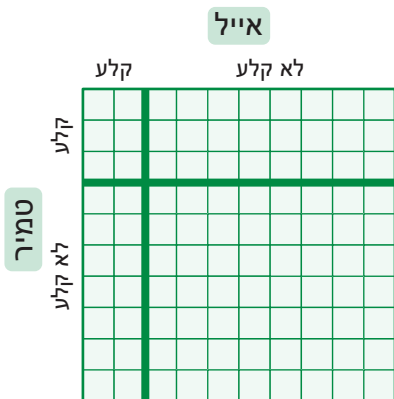
אייל מצליח לקלוע לסל ב- $\frac{2}{10}$ מהמקרים.

טמיר מצליח לקלוע לסל ב- $\frac{3}{10}$ מהמקרים.

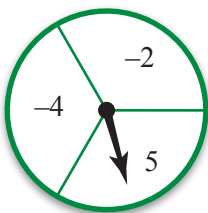
חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים:

א. שניהם יצליחו לקלוע לסל.

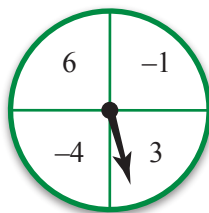
ב. שניהם לא יצליחו לקלוע לסל.



שעון II



שעון I



שעון I

	X	חיובי	שלילי
שעון II	חיובי		
	שלילי		

2. טלי רווית מסובבת את שני המחוגים

של שני השעונים המשורטטים

(כל שעון מחולק לחלקים שווים).

טלי מנצחת אם מכפלת שני המספרים חיובית.

רווית מנצחת אם מכפלת שני המספרים שלילית.

א. האם המשחק הוגן?

ב. השלימו בטבלה את המכפלות "חיובי" "שלילי" בכל שטח.

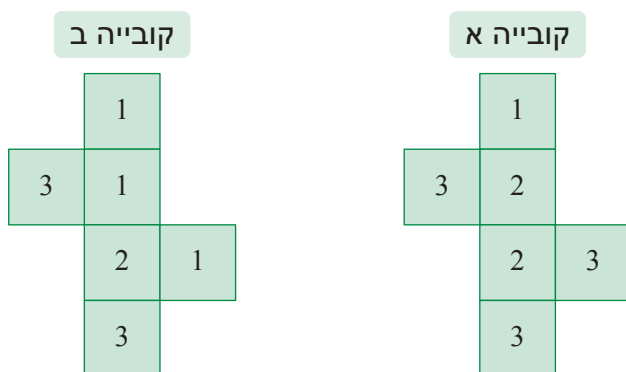
ג. צבעו בצבע אחד את השטחים המתאימים לניצחון של טלי,

ובצבע אחר את השטחים המתאימים לניצחון של רווית.

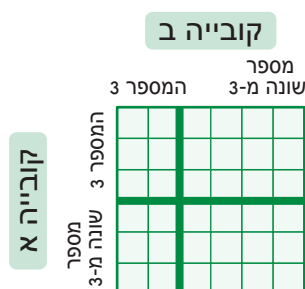
ד. חשבו את ההסתברות של כל אחת מהן לנצח.



3. לפניכם פריסה של שתי קוביות. מטילים את שתי הקוביות.



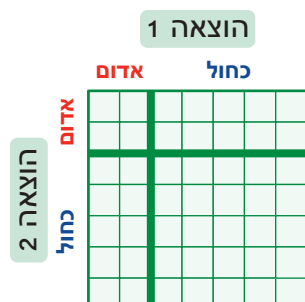
הטבלה מחולקת לפי ההסתברות שעל הקובייה מתקבל המספר 3.



- מה ההסתברות שעל קובייה א מתקבל המספר 3?
- מה ההסתברות שעל קובייה ב מתקבל המספר 3?
- מהי ההסתברות שעל שתי הקוביות מתקבל 3? הסבירו.
- לאיזה מהמאורעות הבאים הסתברות גדולה יותר. הסבירו. על שתי הקוביות מתקבל המספר 3 או על שתי הקוביות מתקבל מספר שונה מ-3?



4. בסל 7 כדורים: 2 אדומים ו-5 כחולים.



- מוציאים מתוך הסל כדור אחד ורושמים את הצבע שלו. מחזירים את הכדור לסל. מוציאים כדור נוסף ורושמים את הצבע שלו. חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים (היעזרו בדיאגרמת שטח):
- להוציא שני כדורים כחולים.
 - להוציא שני כדורים אדומים.



5. בסל 10 כדורים: 7 אדומים ו-3 כחולים.

- מוציאים מתוך הסל כדור אחד ורושמים את הצבע שלו. מחזירים את הכדור לסל. מוציאים עוד כדור ורושמים את הצבע שלו.
- שרטטו דיאגרמת שטח מתאימה, כולל קווי חלוקה.
 - חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים:
 - להוציא שני כדורים כחולים.
 - להוציא שני כדורים אדומים.
 - להוציא שני כדורים בצבעים שונים.



שומרים על כושר

1. חברו כל משוואה לפתרונה.

- | | | |
|-----|---|---------------------------|
| 3 | • | $\frac{x+4}{3} = 12$ |
| 15 | • | $\frac{5x-1}{4} = 5 + 3x$ |
| 32 | • | $2x - \frac{x-3}{6} = 6$ |
| -28 | • | $\frac{3x-5}{2} - 5x = 1$ |
| -1 | • | $\frac{x+5}{4} = 2x - 25$ |
| -3 | • | $\frac{2x}{7} = 20 + x$ |

2. פתרו את המשוואות.

- | | | | | | |
|--|----|------------------------------------|----|----------------------------------|----|
| $\frac{2x}{3} + \frac{x+1}{2} = 13 + 2x$ | ה. | $\frac{4x}{5} - \frac{2x}{3} = 2$ | ג. | $\frac{2x-3}{5} = 5$ | א. |
| $\frac{5x-8}{3} = x + \frac{x}{3} - 2$ | ו. | $\frac{9-5x}{3} + \frac{x}{2} = 3$ | ד. | $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ | ב. |

3. נתון ריבוע שאורך הצלע שלו x .

יצרו מלבן שאורך אחת מצלעותיו גדול פי 2 מאורך צלע הריבוע, ואורך הצלע השנייה קטן ב- 2 ס"מ, מאורך צלע הריבוע.

א. אילו מספרים יכול x לקבל? הסבירו.

ב. קשמו ביטוי לשטח הריבוע.

קשמו ביטויים לצלעות המלבן והוסיפו בשרטוט.

קשמו ביטוי לשטח המלבן.

ג. אם היקף הריבוע 32 ס"מ,

חשבו את שטח הריבוע?

חשבו את שטח המלבן?

ד. אם שטח הריבוע שווה לשטח המלבן.

קשמו משוואה מתאימה.

פתרו ומצאו את אורך צלע הריבוע, ואת אורכי צלעות המלבן.

