


יחידה 21: הסתברות מותנית

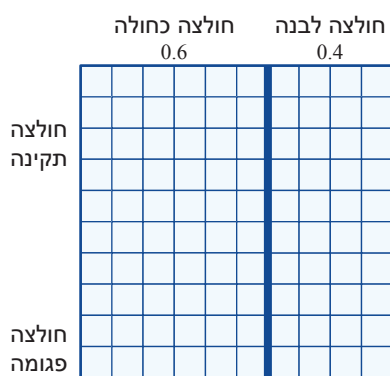
שיעור 1. מכירת חיסול

הסתברות של מאורעות תלויים

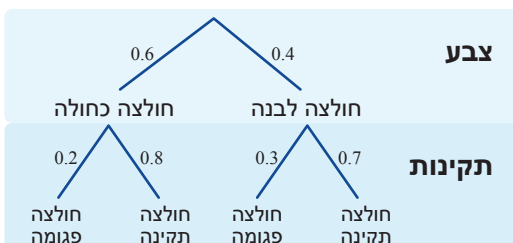


בארגז של מכירת חיסול, 60% מהחולצות כחולות והשאר לבנות. 20% מהחולצות הכחולות פגומות, ו-30% מהחולצות הלבנות פגומות. נועה בחרה באקראי חולצה מהארגז. מה ההסתברות שהחולצה תקינה?

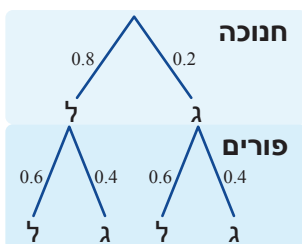
נלמד לחשב הסתברות של מאורעות תלויים.



1. א. לפניכם דיאגרמת שטח המחולקת לפי ההסתברות לבחירת חולצה לבנה או חולצה כחולה. העתיקו את הדיאגרמה למחברת. בכל אחד משני המלבנים העבירו קו אופקי לפי ההסתברות לבחירת חולצה תקינה או חולצה פגומה.
- ב. חשבו את ההסתברות שנועה תבחר מהארגז חולצה תקינה.



- ג. עידן שרטט דיאגרמת עץ. חשבו בעזרת דיאגרמת העץ את ההסתברות שנועה תבחר מהארגז חולצה תקינה. האם קיבלתם אותה תוצאה?



- ד. אייל אמר: ביחידה הקודמת כבר בנינו דיאגרמות עץ. לדוגמה, בנינו את הדיאגרמה של ירידת גשם בחנוכה ובפורים. מה ההבדל בין דיאגרמות עץ קודמות ובין דיאגרמת העץ בסעיף ג? מה חדש?

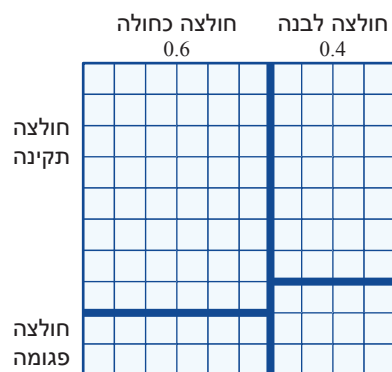


ישנם ניסויים שבהם ההסתברות בשלב השני תלויה בתוצאות השלב הראשון. במקרים אלה:

- **בדיאגרמת שטח** מחלקים כל אחד מהמלבנים שהתקבלו בשלב הראשון בדרך שונה.
- **בדיאגרמת עץ** בשלב השני ההסתברויות הרשומות על כל זוג ענפים שונות, בהתאם לתוצאות השלב הראשון.

דוגמה: במשימה 1

- **בדיאגרמת השטח**

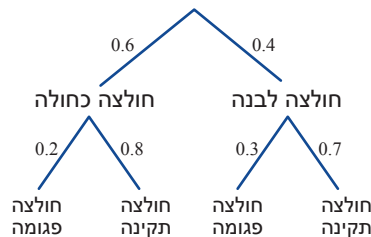


בשלב ראשון מחלקים את שטח הריבוע לשני מלבנים לפי צבע החולצה.

בשלב שני מחלקים כל מלבן **באופן שונה**, מכיוון שההסתברות לבחור חולצה פגומה או חולצה תקינה **תלויה** בצבע של החולצה שנבחרה בשלב הראשון.

במלבן של החולצה **הכחולה** ההסתברות לבחור חולצה פגומה היא 0.2 וההסתברות לבחור חולצה תקינה היא 0.8. במלבן של החולצה **הלבנה**, ההסתברות לבחור חולצה פגומה היא 0.3 וההסתברות לבחור חולצה תקינה היא 0.7.

- **בדיאגרמת העץ**



בשלב ראשון מחלקים לשני ענפים לפי צבע החולצה.

בשלב שני מחלקים לפי תקינות החולצה. חלוקת ההסתברויות על כל זוג ענפים **שונה** - בהתאם לצבע החולצה.

תזכורת: בדיאגרמת עץ **בכל נקודת פיצול**

סכום ההסתברויות הוא 1.

2. דני משתתף במטווח.

ההסתברות שיפגע במטרה בירייה ראשונה היא 0.4

אם דני **יפגע** במטרה בירייה הראשונה, ההסתברות שהוא יפגע במטרה השנייה היא 0.7

אם דני **לא יפגע** במטרה בירייה הראשונה, ההסתברות שהוא יפגע במטרה בירייה השנייה היא 0.45

א. מה ההסתברות שדני לא יפגע במטרה כלל?

ב. מה ההסתברות שדני יפגע במטרה **לפחות** פעם אחת?



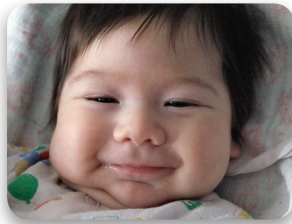
3. ההסתברות לפגוש אדם שגובהו מעל 1.80 מ' היא 0.2, וההסתברות לפגוש שחקן כדורסל היא 0.05 האם סביר להניח כי ההסתברות לפגוש שחקן כדורסל שגובהו מעל 1.80 מ' היא גם כן 0.05? הסבירו.



אוסף משימות



1. **יונתן** מתאמן בזריקות לסל. הוא זורק לסל פעמיים. ההסתברות שיקלע לסל בזריקה ראשונה היא 0.3 אם יונתן **יקלע** לסל בזריקה הראשונה, ההסתברות שהוא יקלע לסל גם בזריקה השנייה היא 0.6 אם יונתן **לא יקלע** לסל בזריקה הראשונה, ההסתברות שהוא יקלע לסל בזריקה השנייה היא 0.35. א. מה ההסתברות שיונתן לא יקלע לסל כלל? ב. מה ההסתברות שיונתן יקלע לסל פעמיים?



2. בעיר "קרית בהירים" ההסתברות להולדת בת שווה להסתברות להולדת בן. סקר שנערך בעיר קבע כי, 40% מהבנות הן בעלות שיער בהיר, ו- 30% מהבנים הם בעלי שיער בהיר. בוחרים באקראי תינוק (בן או בת) מבין כל התינוקות בעיר. מה ההסתברות שנבחרה בת בעלת שיער כהה?



3. במדינת בלונד ההסתברות שיוולד תינוק בעל שיער בהיר היא $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{3}$ מבעלי השיער הבהיר הם בעלי עיניים כחולות ו- $\frac{1}{6}$ מבעלי השיער הכהה הם בעלי עיניים כחולות.

לאיזה מאורע הסתברות גדולה יותר:

לפגוש אדם בעל שיער בהיר ועיניים כחולות או לפגוש אדם בעל שיער כהה ועיניים כחולות?



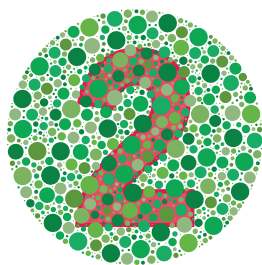
4. בקבוצת שומרי משקל 65% מחברי הקבוצה הן נשים והיתר גברים. לאחר חודש של שמירת משקל, ירדו במשקלם 60% מהנשים ו- 30% מהגברים. בוחרים באקראי אדם מהקבוצה. מה ההסתברות שהוא **לא** ירד במשקלו?



5. שכיחות של מחלה באפריקה היא 20%.
 ההסתברות שבדיקה מסוימת לאבחון המחלה תאבחן אותה אצל אדם חולה היא 0.9, וההסתברות שאותה בדיקה תאבחן אדם בריא כחולה היא 0.2
 אדם ניגש לבדיקה.
 א. מה ההסתברות שהוא בריא שאובחן כחולה?
 ב. מה ההסתברות שהוא חולה שאובחן כבריא?



6. $\frac{3}{5}$ מהניגשים למבחן נהיגה הם גברים.
 באוכלוסיית הגברים 8% הם עיוורי צבעים, ובין הנשים 0.5% הן עיוורות צבעים.
 א. מה ההסתברות, שאם נבחר שם מרשימת הנבחנים, הוא יהיה של אדם עיוור צבעים?
 ב. מה ההסתברות, שאם נבחר שם מרשימת הנבחנים, הוא יהיה של גבר שאינו עיוור צבעים?



דוגמה למבחן אישהארה:
 אדם שאינו מבחין בין הירוק
 לאדום אינו יכול לקרוא את
 הספרה שבתמונה

לקות הראייה **עיוורון צבעים** יכולה להיות מסוגים שונים ולהתבטא ברמות שונות, מחוסר הבחנה בצבע אחד ועד עיוורון צבעים מלא.



8% מהגברים וכ- 0.5% מהנשים באוכלוסייה הם עיוורי צבעים.
 ברוב המקרים מקור עיוורון הצבעים הוא גם גנטי המועבר בתורשה על ידי גן רצסיבי המצוי על כרומוזום ה-X. ולכן התכונה תבוא לידי ביטוי רק במידה ויש מולו כרומוזום שני שהוא בעל אותה לקות.
 מרבית עיוורי הצבעים אינם מבחינים בין ירוק לאדום, ובמקרים חמורים עיוורי הצבעים רואים את העולם בשחור לבן או בגווני אפור.

אצל גבר (XY) מצוי **עותק אחד** בלבד של הגן ולכן כל ליקוי בגן יבוא לידי ביטוי. אצל אישה (XX) מצויים שני כרומוזומי X. ליקוי בעותק אחד בלבד יפוצה על ידי העותק השני, ולכן הלקות תבוא לידי ביטוי רק במקרה של שני כרומוזומים פגומים.



7. שלושה מבקרי ספרות עומדים לכתוב ביקורת על ספר חדש.
 הראשון נוהג לכתוב ביקורת חיובית בשליש מן הספרים.
 השני נוהג לקרוא את מה שכתב הראשון, ובשני שלישים מהספרים הוא כותב את ההיפך.
 השלישי קורא את מה שכתבו שני קודמיו. אם הם מסכימים זה עם זה הוא כותב ההיפך משניהם. אם לא, אז במחצית מהספרים הוא כותב ביקורת חיובית ובמחצית ביקורת שלילית.
 בוחרים באקראי ספר שנסקר על-ידי שלושת המבקרים.
 א. מה ההסתברות שלספר שנבחר ביקורת חיובית יחידה? הסבירו.
 ב. מה ההסתברות שלספר שנבחר אין ביקורת חיובית? הסבירו.

שיעור 2. אליפות שחמט

תוצאות שאינן מובילות לשלב נוסף



נטע ומיכל הגיעו לשלב הגמר של תחרות שחמט ארצית. לפי כללי התחרות, עליהן לשחק זו עם זו סדרת משחקים, והראשונה שתנצח חמש פעמים היא האלופה. (משחקים המסתיימים בתיקו אינם נספרים.)

לנטע היו ארבעה ניצחונות ולמיכל שלושה. בגלל עייפות השחקנים, נדחה המשך התחרות ליום המחרת.

במשחק נכחו קבוצת חברים של נטע וקבוצת חברים של מיכל. כל קבוצה הייתה גאה ביותר בנציגתה ורצתה שתזכה באליפות. התפתחה ביניהן שיחה על ההסתברות של כל שחקנית לזכות באליפות.

כולם הסכימו שנטע ומיכל שחקניות שקולות. פירושו של דבר הוא, שהסתברויות הניצחון שלהן במשחק בודד שוות זו לזו ($\frac{1}{2}$ ו- $\frac{1}{2}$). כמו כן הסכימו כולם, שבמצב העניינים הנוכחי, סביר יותר שנטע תזכה באליפות.

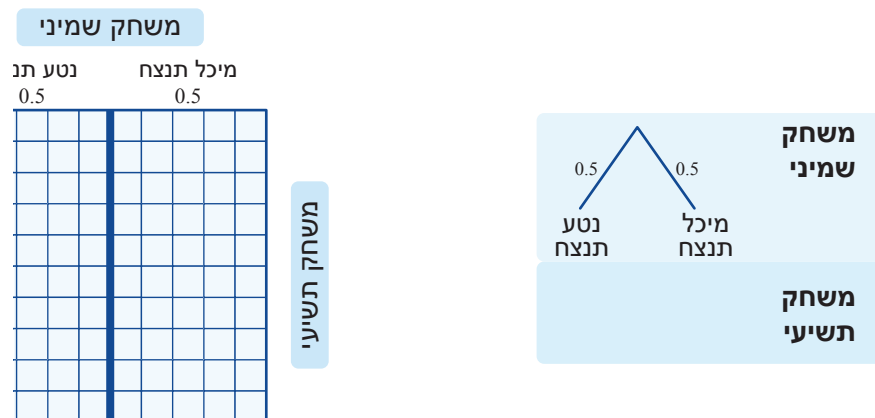
החברים של נטע אמרו: לנטע חסר רק ניצחון אחד ולמיכל חסרים שני ניצחונות, יחס ההסתברויות הוא 1:2, לכן ההסתברות שנטע תזכה באליפות היא $\frac{2}{3}$ ושמיל תזכה רק $\frac{1}{3}$

החברים של מיכל אמרו: נטע ניצחה 4 פעמים ומיכל ניצחה 3 פעמים, יחס הסתברויות האליפות הוא 3:4, לכן ההסתברות שנטע תזכה באליפות היא $\frac{4}{7}$ ושמיל תזכה $\frac{3}{7}$

שמע **עומר** את הוויכוח, ואמר: כולכם טועים. הסבירו מדוע.

נמשיך לחשב הסתברות של מאורעות תלויים.

1. לפניכם דיאגרמת עץ ודיאגרמת שטח המציגות את ההסתברות של כל שחקנית לנצח במשחק השמיני.



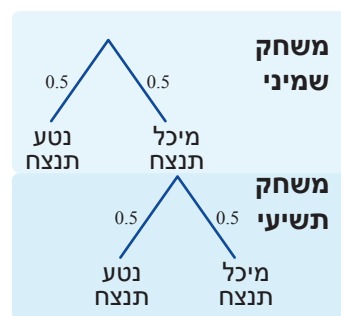
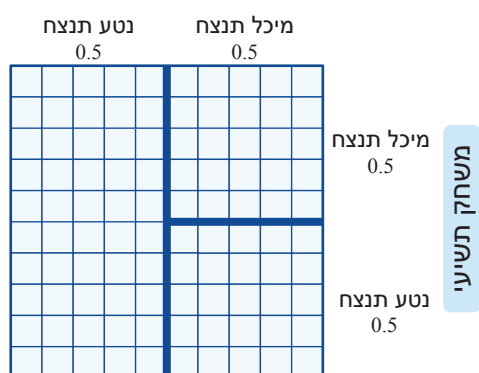
- העתיקו את הדיאגרמות למחברת והשלימו לפי ההסתברויות של כל שחקנית לנצח במשחק התשיעי.
- חשבו את ההסתברות של כל שחקנית לזכות באליפות.



במשימה 1, במשחק השמיני ישנן שתי תוצאות אפשריות: שנטע תנצח או שמיכל תנצח.

- אם נטע תנצח היא תזכה באליפות ולכן לא יהיה משחק נוסף. במקרה זה: **בדיאגרמת העץ לא יהיו הסתעפויות נוספות מענף זה.**
- אם מיכל תנצח, יהיה משחק נוסף. במקרה זה: **בדיאגרמת העץ נפצל את הענף "מיכל תנצח" לשני ענפים נוספים, ובדיאגרמת השטח לא תהיה חלוקה נוספת של מלבן זה.**

משחק שמיני



2. 0.3 מהלומדים נהיגה מצליחים במבחן הנהיגה בפעם הראשונה.

0.6 מבין אלה שנכשלו בפעם הראשונה, עוברים בפעם השנייה.

א. מצאו את ההסתברות שתלמיד הלומד נהיגה יצטרך להיבחן בפעם השלישית. היעזרו בדיאגרמת עץ או בדיאגרמת שטח.



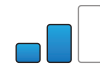
ב. 0.8 מבין אלה שנכשלו במבחן נהיגה בפעם השנייה, עוברים בפעם השלישית.

מצאו את ההסתברות שתלמיד הלומד נהיגה יצטרך להיבחן בפעם הרביעית.





5. 0.3 מתושבי העיר "עלית" הם עולים חדשים.
 0.6 מהעולים החדשים בעיר לומדים עברית באולפן.
 א. מה ההסתברות לפגוש בעיר תושב הלומד באולפן?
 ב. מה ההסתברות לפגוש בעיר תושב שאינו לומד באולפן?



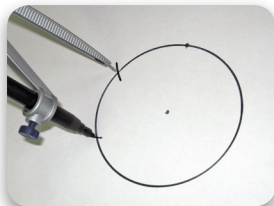
6. בחברת התעופה "כיף באוויר" 12% מהמטוסים מגיעים באיחור ליעדם.
 35% מהמטוסים המגיעים באיחור, מאחרים ביותר משעה.
 מה ההסתברות שמטוס מגיע ליעד באיחור של יותר משעה?



7. בערב המסיבה, נורית רוצה להדליק נרות. ההסתברות שתמצא נרות בביתה היא 0.8
 אם לא תמצא נרות בבית, היא תלך לקנות בחנות. ההסתברות שתמצא חנות פתוחה היא 0.9, וההסתברות
 שיהיו בחנות נרות היא 0.6
 מה ההסתברות שנורית תדליק נרות בערב המסיבה?



8. נועה מחפשת חומר לעבודה בהיסטוריה באתרים באינטרנט.
 ההסתברות שתמצא חומר לעבודה באתר הראשון היא 0.9
 אם נועה לא תמצא חומר באתר הראשון, היא תחפש באתר שני.
 ההסתברות שתמצא חומר לעבודה באתר השני היא 0.8
 אם נועה לא תמצא חומר באתר השני, היא תחפש באתר שלישי.
 ההסתברות שתמצא חומר לעבודה באתר השלישי היא 0.7
 אם נועה לא תמצא חומר באתר השלישי, היא לא תכין את העבודה.
 מה ההסתברות שנועה תכין את העבודה בהיסטוריה?



9. מורה בוחרת תלמיד לפי הגרלה המתנהלת כך:
 התלמידים מטילים קובייה לפי התור.
 הראשון שיקבל 6 ייבחר.
 אייל הוא התלמיד העשירי בתור. מה ההסתברות שהוא ייבחר?



10. בעקבות תקלה נעצרה מכונית בצד הדרך.
 מחצית מהאנשים העוברים בדרך הבחינו במכונית.
 מחצית מהאנשים שהבחינו במכונית הם אכפתיים ועוצרים ליד המכונית.
 למחצית מהאנשים שעצרו יש את הידע הטכני הדרוש לאיתור התקלה.
 מה ההסתברות שאדם שעבר בדרך הוא אדם אכפתי עם ידע טכני שחילץ את המכונית?

שיעור 3. בלי החזרות

הסתברות של מאורעות שבהם הכמות משתנה



בארוחת בוקר בטיוול שנתי, הכינו לתלמידים כריכים ארוזים בסלים. בכל סל 15 כריכים: 4 כריכי גבינה, 5 כריכי טונה ו- 6 כריכי שוקולד. כל תלמיד בוחר באקראי 2 כריכים. שירה ודנה אוהבות מאוד כריכי שוקולד. **שירה** החליטה להוציא את שני הכריכים משני סלים שונים, כדי שההסתברות לקבל לפחות כריך שוקולד אחד תהיה גבוהה יותר. **דנה** החליטה להוציא את שני הכריכים מאותו סל, כדי שההסתברות לקבל לפחות כריך שוקולד אחד תהיה גבוהה יותר. שערו: איזו החלטה טובה יותר?

נלמד לחשב הסתברות של מאורעות שבהם הכמות הכללית משתנה.

1. א. מה ההסתברות שלפחות כריך אחד ששירה תוציא יהיה כריך שוקולד?
ב. מה ההסתברות שלפחות כריך אחד שדנה תוציא יהיה כריך שוקולד?
ג. למי מהבנות סיכוי גבוהה יותר לקבל כריך שוקולד?

2. בכד 16 כדורים: 4 כדורים **כחולים** ו- 12 כדורים **אדומים**.
אייל מוציא מתוך הכד שני כדורים בזה אחר זה (ללא החזרה).
א. שרטטו במחברת דיאגרמת עץ וכתבו את ההסתברויות המתאימות על ענפי העץ.
ב. חשבו את ההסתברות להוציא שני כדורים **כחולים**.
ג. חשבו את ההסתברות להוציא שני כדורים **אדומים**.

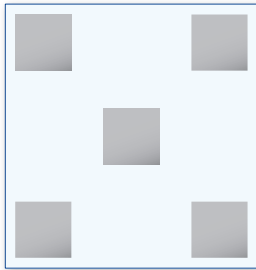


במאורעות דו-שלביים שבהם מתוארות הוצאות אקראיות וללא החזרות מכמות נתונה, לאחר הוצאה ראשונה הכמות הכללית משתנה, ובעקבותיה משתנה גם ההסתברות של התוצאות בשלב השני. **משימה 2**: בשלב הראשון הוצא כדור ולכן נותרו בכד 15 כדורים. בשלב השני ההסתברות להוציא כדור תלויה בצבע הכדור שהוצא בשלב הראשון.

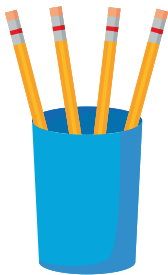
אם **בשלב הראשון** הוצא כדור **כחול**, אז נותרו בכד 3 כדורים כחולים (הסתברות של $\frac{3}{15}$) ו- 12 אדומים (הסתברות של $\frac{12}{15}$)
אם **בשלב הראשון** הוצא כדור **אדום**, אז נותרו בכד 4 כדורים כחולים (הסתברות של $\frac{4}{15}$) ו- 11 אדומים (הסתברות של $\frac{11}{15}$)
ההסתברות להוציא שני כדורים **כחולים** היא $\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$



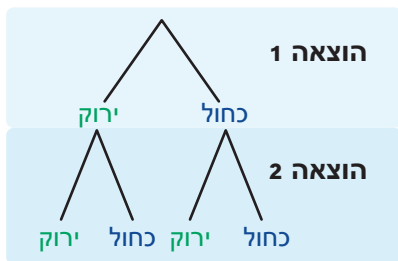
3. בפיצרייה נותנים לכל קונה כרטיס מזל ובו 5 ריבועי גירוד. תחת שני ריבועים מופיעה כוס שתייה. מגרדים שני ריבועים בלבד. אם בשניהם מופיעה כוס שתייה, מקבלים שתייה מתנה. מה ההסתברות לזכות בשתייה מתנה?



4. במשחק 4 משתתפים. כדי לקבוע מי יהיה השחקן הפותח, שמים בכוס ארבעה עפרונות זהים שרק אחד מהם מחודד. אחד המשתתפים בוחר עיפרון. אם הוא בוחר בעיפרון המחודד הוא השחקן הפותח. אם לא, משתתף שני בוחר עיפרון. אם הוא זה שבחר בעיפרון המחודד הוא השחקן הפותח. וכך הלאה... (שחקן שבחר עיפרון לא מחזיר אותו לכוס). כאשר אחד המשתתפים בוחר בעיפרון המחודד תהליך הבחירה נפסק. א. מה ההסתברות שבחירת העיפרון המחודד תיעשה על-ידי השחקן הראשון? על-ידי השחקן השני? על-ידי השחקן השלישי? ב. האם בחירת השחקן הפותח בדרך זו הוגנת? הסבירו.



אוסף משימות



1. בכד 20 כדורים: 8 כדורים כחולים ו- 12 כדורים ירוקים. עידן מוציא מתוך הכד, באקראי וללא החזרה, שני כדורים בזה אחר זה. א. העתיקו את דיאגרמת העץ, והשלימו את ההסתברויות המתאימות. ב. חשבו את ההסתברות להוציא: (i) שני כדורים כחולים. (ii) שני כדורים ירוקים.



2. בכד 12 כדורים: 7 כדורים כחולים ו- 5 כדורים אדומים. יובל מוציא מתוך הכד, באקראי וללא החזרה, שני כדורים בזה אחר זה. א. חשבו את ההסתברות להוציא שני כדורים כחולים. ב. חשבו את ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים.



3. בכד 15 כדורים: 6 כחולים 4 אדומים ו- 5 ירוקים.

עומר מוציא מתוך הכד, באקראי וללא החזרה, שני כדורים בזה אחר זה.

א. חשבו את ההסתברות להוציא שני כדורים **כחולים**.

ב. חשבו את ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים.



4. בקופסא 12 פתקים. על כל פתק כתוב מספר שלם מ- 1 עד 12.

א. תלמיד בוחר פתק (ולא מחזיר אותו). מה ההסתברות שהמספר שבחר הוא 25?

ב. התלמיד בוחר פתק נוסף. מה ההסתברות שהמספר שבחר בפעם השנייה הוא 25?



5. בקייטנה השתתפו 20 ילדים. במהלך הקייטנה נערכו שתי הגרלות.

כל ילד יכול לזכות רק בפרס אחד.

בהגרלה הראשונה זכה ילד אחד בכרטיס כניסה ללונה פארק.

בהגרלה השנייה זכו 3 ילדים בכרטיס לסרט.

בוחרים באקראי ילד מהקייטנה.

א. מה ההסתברות שהילד יזכה בכרטיס לסרט?

ב. מה ההסתברות לא לזכות כלל?



6. בשקית 25 מטבעות שוקולד: 8 מטבעות שוקולד מריר, 5 מטבעות שוקולד לבן, והיתר מטבעות שוקולד חלב.

נועה מוציאה שני מטבעות שוקולד מהשקית בזה אחר זה (ללא החזרה).

א. מה ההסתברות ששני המטבעות מאותו סוג?

ב. מה ההסתברות שלפחות מטבע אחד הוא שוקולד לבן?



7. **מאיה** נעלה את אופניה במנעול שהקוד שלו מורכב מ- 4 ספרות.

מאיה זכרה שהשתמשה בספרות 1, 3, 5, 7 אך לא זכרה את

הסדר של הספרות.

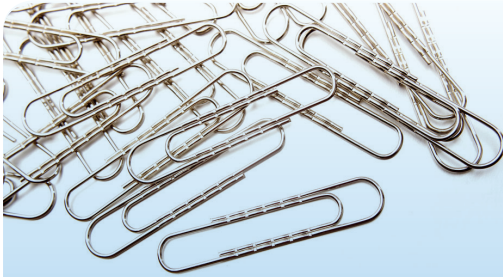
א. כמה אפשרויות יש לסידור 4 הספרות בקוד?

ב. מה ההסתברות שדנה תצליח לפתוח את המנעול בניסיון שלישי?



שיעור 4. במחשבה תחילה

ניתוח משחקים בהסתברות



נשחק בזוגות את המשחק "במחשבה תחילה".
(ראו הוראות במשימה 1)

הסבירו את השיקולים שלכם בהנחת האטבים על הלוח.

ננתח ונבדוק את הסיכויים לנצח במשחקי ההסתברות.

1. שחקו בזוגות את המשחק "במחשבה תחילה", מספר פעמים.

הוראות המשחק:

- כל שחקן בוחר באחד מצדי הלוח.
- כל שחקן מניח 11 אטבים בצד שבחר לפי שיקוליו. אפשר להניח יותר מאטב אחד בכל מקום.
- בכל תור, מטילים את שתי הקוביות. כל שחקן בודק אם יש לו אטב המונח על סכום המספרים שהתקבלו בהטלת הקוביות. אם יש לו אטב על המספר המתאים לסכום שהתקבל, הוא מוריד אותו מהלוח.
- מנצח:** אם סכום המספרים על הקוביות הוא 8 ולשני השחקנים יש אטבים על המספר 8, כל שחקן מוריד אטב אחד מהלוח.
- חוזרים על המשחק עד שאחד השחקנים הוריד את כל האטבים שלו מהלוח.
- מנצח במשחק:** השחקן המוריד ראשון את כל האטבים שלו מהלוח.

לוח המשחק

												שחקן א
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
												שחקן ב

2. א. הכינו במחברת לוח חיבור מ-1 עד 6, לרישום סכומי המספרים המתקבלים על הקוביות.
 ב. ענו על השאלות:

- האם ההסתברויות לקבלת הסכומים 2 עד 12 שוות ביניהן?
- לאיזה סכום הסתברות גדולה יותר להתקבל: סכום 11 או סכום 9? הסבירו.
- מצאו סכומים אחרים שההסתברות שלהם להתקבל שונה.
- כמה פעמים מופיע הסכום 7? מה ההסתברות לקבל סכום 7?
- לאילו סכומים ההסתברות הנמוכה ביותר להתקבל?



3. לאור הממצאים שלכם במשימה הקודמת:
 באיזה אופן הייתם מסדרים כעת את האטבים על לוח המשחק?

הכנה למשחק

מוציאים ממשחק דומינו את שבע האבנים המכילות את המספר 0.
 מסדרים את 21 האבנים הנותרות, כך שהקו המפריד בין זוג המספרים יהיה קו שבר, ושני המספרים יוצרים שבר שאינו גדול מ-1.
 למשל

$\frac{3}{5}$	יוצר את השבר	
$\frac{2}{2}$	יוצר את השבר	
$\frac{1}{4}$	יוצר את השבר	

4. בכיתה ט שיחקו את המשחק דומינו קטן או שווה ל-1
הוראות המשחק:

מוציאים באקראי אבן אחת מאבני הדומינו.

דניאל מנצחת אם השבר שהוצא קטן מ- $\frac{2}{3}$

מיכאל מנצח אם השבר גדול או שווה ל- $\frac{2}{3}$

א. שערו אם המשחק הוגן.

ב. כתבו את השברים המתקבלים ממשחק הדומינו מהקטן לגדול. כתבו שברים שווים אחד תחת השני.

ג. מה ההסתברות ש**דניאל** תנצח?

ד. מה ההסתברות ש**מיכאל** ינצח?

ה. האם המשחק הוגן? הסבירו.



משחק הדומינו הומצא בסין בשנת 1120. הדומינו הגיע לאירופה רק במאה ה-19 וקיימת מחלוקת אם הובא מסין או הומצא באירופה (ללא קשר למשחק הקיים בסין).

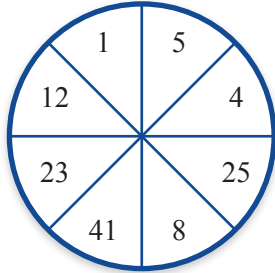


אבני הדומינו הזכירו במראן בגד לבן עם נקודות שחורות שלבשו הכמרים שנקרא domino, ומכאן שמו.

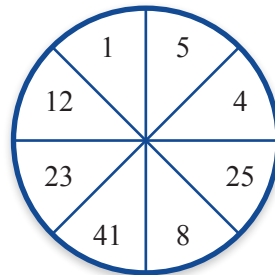
כל אבן דומינו מייצגת אחת מ-21 התוצאות השונות בהטלת שתי קוביות משחק.

בגרסה האירופאית הוסיפו גם את המספר 0 ולכן נוספו עוד 7 אבנים.

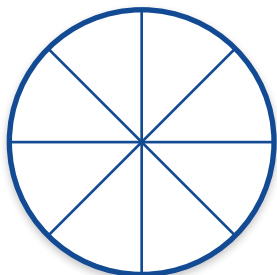
עם השנים התפתחו גרסאות נוספות של משחק הדומינו, לדוגמה: טריומינו.



1. על החוגה רשומים מספרים. במשחק ארבעה משתתפים. כל שחקן בוחר תכונה אחת של מספרים.
- אלי** בחר את התכונה: המספר כפולה של 5
- בני** בחר את התכונה: המספר גורם של 12
- גלי** בחרה את התכונה: המספר אי זוגי
- דני** בחר את התכונה: המספר חד ספרתי
- מסובבים את המחוג 10 פעמים. שחקן מקבל נקודה אם המספר מקיים את התכונה שבחר.
- שאלה:** אם מתקבל המספר 5, אלי, גלי ודני מקבלים נקודה.
- א. למי הסיכוי הגבוה ביותר לנצח?
- ב. כמה נקודות, בערך, יצבור כל אחד מהמשתתפים?



2. על החוגה רשומים מספרים. במשחק ארבעה משתתפים. כל שחקן בוחר **שתיים** מתכונות המספרים הבאות:
- המספר כפולה של 5
 - המספר גורם של 24
 - המספר כפולה של 4
 - המספר אי-זוגי
 - המספר גורם של 12
 - המספר חד-ספרתי
- מסובבים את המחוג 10 פעמים.
- שחקן מקבל נקודה אם המספר מקיים אחת או שתיים מהתכונות שבחר.
- א. **נטע** בחרה את התכונות: כפולה של 5 ומספר אי זוגי. מה ההסתברות של **נטע** לנצח?
- ב. **דנה** בחרה את התכונות: גורם של 24 ומספר חד ספרתי. מה ההסתברות של **דנה** לנצח?
- ג. **תמר** בחרה את התכונות: כפולה של 4 וכפולה של 5. מה ההסתברות של **תמר** לנצח?
- ד. אילו שתי תכונות כדאי לבחור כדי לנצח?



3. כתבו שש תכונות משלכם ובחרו מספרים לחוגה.
- כל שחקן בוחר שתי תכונות.
- א. אילו שתי תכונות כדאי לבחור כדי לנצח?
- ב. לאיזו בחירה הסיכוי הנמוך ביותר לנצח?

שיעור 5. שאלות נוספות



למדנו לחשב הסתברויות של מאורעות שונים.

בשיעור זה, נפתור שאלות נוספות.

1. לפניכם המבחן של **תמי**.

קבעו לכל תשובה אם היא נכונה או לא נכונה. הציעו תיקון לתשובות שגויות.

מבחן בהסתברות

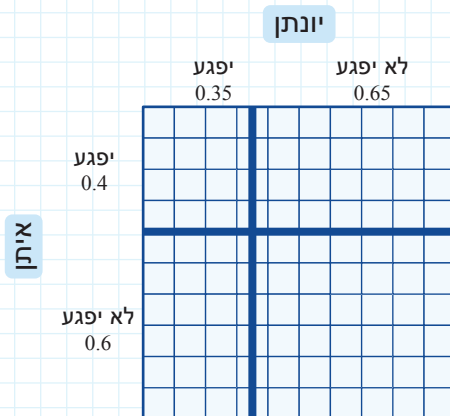
1. יונתן ואיתן יורים חץ למטרה.

ההסתברות שיונתן יפגע במטרה היא 0.35. ההסתברות שאיתן יפגע במטרה היא 0.4

א. מה ההסתברות ששניהם גם יחד יפגעו במטרה?

שרטטו דיאגרמת שטח או דיאגרמת עץ.

ב. מה ההסתברות שיונתן יפגע במטרה ואיתן לא?



פתרון

א. ההסתברות ששניהם יפגעו במטרה היא

$$0.35 \cdot 0.4 = 0.14$$

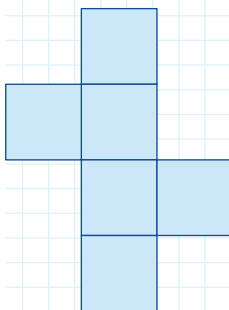
ב. ההסתברות שיונתן יפגע במטרה ואיתן לא היא

$$0.35 \cdot 0.6 = 0.21$$

2. על קוביית משחק מופיעים רק שני מספרים 1 ו-2.

הטילו את הקובייה 120 פעמים. המספר 1 התקבל 97 פעמים, והמספר 2 התקבל 23 פעמים.

על כמה מפאות הקובייה, סביר להניח כי רשום המספר 1? ועל כמה פאות רשום המספר 2? הסבירו.



פתרון

$$\frac{97}{120} \approx \frac{100}{120} \approx \frac{5}{6} \text{ היא המספר 1}$$

המספר 1 יופיע 5 פעמים, המספר 2 יופיע פעם אחת.

3. בסל 9 כדורים: 3 כדורים אדומים ו- 6 כדורים ירוקים.

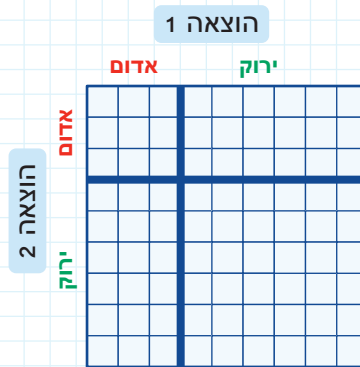
א. מוציאים מתוך הסל כדור אחד ורושמים את הצבע שלו. מחזירים את הכדור לסל. מוציאים שוב ורושמים את הצבע שלו. מה ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים?

ב. מוציאים מתוך הסל, באקראי וללא החזרה, שני כדורים בזה אחר זה. מה ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים?

פתרון

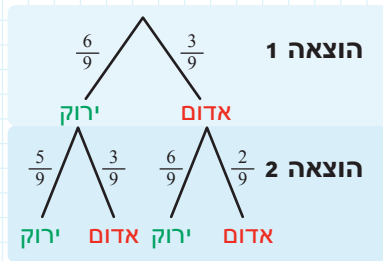
א. ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים

$$\frac{6 \cdot 3}{100} + \frac{3 \cdot 6}{100} = \frac{36}{100}$$



ב. ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים

$$\frac{6}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{36}{81}$$



4. בחברת התעופה "סקיי", ההסתברות שמזוודה תגיעה בטיסה ליעדה היא 0.96. ההסתברות שהמזוודה תינזק במהלך הטיסה היא 0.1. נועם טס ללונדון עם חברת "סקיי". מה ההסתברות שנועם יקבל את המזוודה בטיסת "סקיי" ללונדון בזמן ובמצב תקין?



פתרון

ההסתברות שנועם יקבל את המזוודה בזמן ובמצב תקין היא:

$$0.96 \cdot 0.1 = 0.096$$

5. מחצית מהנבחנים השתתפו בשיעור חזרה.

0.8 מבין משתתפי שיעור החזרה הצליחו במבחן.

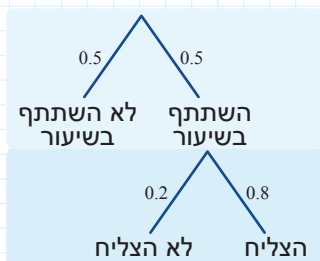
0.3 מבין התלמידים שלא השתתפו בשיעור החזרה הצליחו במבחן.

מה ההסתברות שאם נבחר נבחן באקראי הוא הצליח במבחן?

פתרון

ההסתברות שנבחן יצליח במבחן

$$0.5 \cdot 0.8 = 0.4$$





אוסף משימות



1. **מעין דור** משחקים במשחק "סולמות וחבלים". הם מטילים שתי קוביות וצועדים מספר צעדים לפי סכום המספרים על שתי הקוביות. המנצח הוא השחקן המגיע בדיוק למשבצת ה-100 למי מהילדים סיכוי גבוה יותר לנצח במהלך הבא?

94	95	96 ^{ז'ל}	97	98	99	100 ^{ניצחון}
93 ^{אזין}	92	91	90	89	88	87



2. בשקית 7 סוכריות בטעם תות ו-5 סוכריות בטעם לימון. **רותם** מוציאה באקראי שתי סוכריות מהשקית ואוכלת אותן. שתי הסוכריות שאכלה היו בטעם תות. לאחר מכן היא מוציאה באקראי סוכריה שלישית. מה אפשר לומר לגבי הטעם האפשרי של הסוכריה:
- סביר יותר שהוא יהיה תות מאשר לימון.
 - סביר יותר שהוא יהיה לימון מאשר תות.
 - הסבירות שהוא יהיה תות שווה לסבירות שהוא יהיה לימון.
 - אי אפשר לדעת לאיזה טעם סבירות גדולה יותר.



3. בעיר עין-ורד ההסתברות שתיוולד בת היא 0.5 ההסתברות שיוולד בן בעל שיער בהיר היא 0.2 ההסתברות שתיוולד בת בעלת שיער בהיר היא 0.3 בחרים באקראי תינוק (בן או בת) מבין כל התינוקות בעיר.
- מה ההסתברות שנבחרה בת בעלת שיער בהיר?
 - מה ההסתברות שנבחר תינוק (בן או בת) בעל שיער כהה?

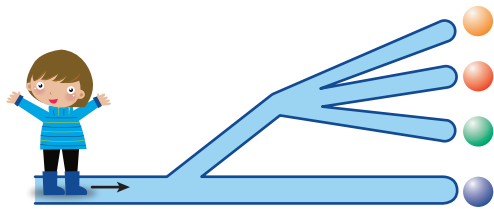


4. ההסתברות להצליח בניסוי בפעם הראשונה היא 60%. אם הניסוי לא יצליח יערכו את הניסוי שוב. ההסתברות להצליח בניסוי בפעם השנייה היא 75%.
- מה ההסתברות ששני הניסויים לא יצליחו?
 - מה ההסתברות שאחד הניסויים יצליחו?





5. **עומר** עומד בתחילת שביל המוביל לארבעה כדורים. בכל צומת הוא בוחר את דרכו באופן אקראי. לאיזה כדור ההסתברות הגבוהה ביותר להיבחר? חשבו אותה.



6. השכיחות היחסית של מספר הילדים במשפחה נתונה בטבלה.

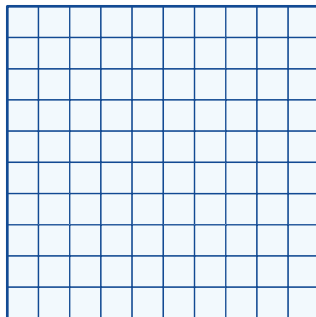
מספר הילדים במשפחה	0	1	2	3 או יותר
השכיחות היחסית של המשפחות	0.25	0.2	0.25	0.3

ידוע כי ההסתברות להולדת בן היא 0.5

א. העתיקו את ריבוע השטח למחברת וחלקו אותו בקווים אופקיים לפי ההסתברות למספר הילדים במשפחה.

ב. חלקו את ריבוע השטח בקו אנכי לפי ההסתברות להולדת בן או בת.

ג. מה ההסתברות שבמדגם מקרי תיבחר משפחה עם ילד אחד והוא יהיה בן?



7. כדורסלן זורק כדור לסל פעמיים.

ההסתברות שיקלע לסל בזריקה בודדת היא 0.65
מה ההסתברות שהשחקן יקלע לסל **לפחות** פעם אחת?



8. **אורטל** משחקת פעמיים במשחק מחשב.

ההסתברות לזכות בשני המשחקים היא 0.0144

א. מה ההסתברות לזכות במשחק אחד?

ב. מה ההסתברות שאורטל תזכה **לכל היותר** במשחק אחד?



9. בכד 12 כדורים: חלקם **כחולים** וחלקם **אדומים**.

מוציאים מתוך הסל כדור אחד ורושמים את צבעו. מחזירים את הכדור לסל. מוציאים שוב כדור ורושמים את צבעו. ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא $\frac{4}{9}$

א. כמה כדורים מכל צבע בכד?

ב. חשבו את ההסתברות להוציא:

(i) שני כדורים **כחולים**. (ii) שני כדורים **אדומים**.



שומרים על כושר

פתרון משוואות עם שברים אלגבריים

1. פתרו.

$$\frac{2x-3}{5} = 5 \quad \text{א.} \quad 5 - \frac{2}{3}x = \frac{7}{2} \quad \text{ג.} \quad \frac{2x}{3} + \frac{x+1}{2} = 13 + 2x \quad \text{ה.}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 10 \quad \text{ב.} \quad \frac{4x}{5} - \frac{2x}{3} = 2 \quad \text{ד.} \quad 2 - \frac{x}{3} = \frac{2-3x}{5} \quad \text{ו.}$$

2. כתבו את תחום ההצבה ופתרו.

$$\frac{x+1}{3} = 0 \quad \text{א.} \quad \frac{x^2-x}{x+5} = 0 \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2-x}{x(x-1)} = 0 \quad \text{ג.} \quad \frac{3}{x+1} = 0 \quad \text{ד.}$$

3. כתבו את תחום ההצבה ופתרו.

$$\frac{x^2-4}{x+2} = 2 \quad \text{א.} \quad \frac{6}{x+1} + \frac{5}{x} = 2 \quad \text{ג.} \quad \frac{4x}{2x+1} + \frac{3}{x+3} = 1 \quad \text{ה.}$$

$$\frac{x^2-9}{x-3} = 6 \quad \text{ב.} \quad \frac{10}{2x-3} + \frac{5}{2x+3} = 3 \quad \text{ד.} \quad \frac{x+3}{x+1} - \frac{x}{x-1} = 0 \quad \text{ו.}$$

4. פרקו לגורמים, כתבו את המכנים כמכפלות, רשמו תחום הצבה ופתרו.

$$\frac{3}{1+x} - \frac{x+2}{1-x} = \frac{9}{1-x^2} \quad \text{זלזלה:}$$

$$\frac{3}{1+x} - \frac{x+2}{1-x} = \frac{9}{1-x^2} \quad / \cdot (1-x)(1+x), x \neq 1, x \neq -1$$

$$3(1-x) - (x+2)(1+x) = 9$$

$$3 - 3x - x - x^2 - 2x - 2 = 9$$

$$-x^2 - 6x - 8 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$(x+4)(x+2) = 0$$

$$x_1 = -4, \quad x_2 = -2$$

$$\frac{5}{2x-1} + \frac{3}{2x+1} = \frac{18}{4x^2-1} \quad \text{א.} \quad \frac{1}{2x-4} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{2} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{x}{3(x-5)} + \frac{1}{x+5} = \frac{2x}{x^2-25} \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{x^2} - \frac{x+1}{2x^2+2x} = -\frac{1}{2x} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{8}{2x-4} + \frac{5}{x+2} = 5 \quad \text{ג.} \quad \frac{6}{x-3} - \frac{5}{x} = \frac{32}{x^2-9} \quad \text{ו.}$$

5. קבוצת עובדים רצתה לקנות מתנה במחיר של 600 שקלים.

הם חילקו ביניהם את הסכום שווה בשווה, אבל ברגע האחרון הצטרפו עוד 5 עובדים ולכן כל אחד שילם

6 שקלים פחות מהסכום שהיה צריך לשלם בתחילה.

מצאו: כמה עובדים היו בקבוצה בתחילה? התייחסו לתנאים המגבילים והסבירו.