

# יחידה 21: הסתברות מותנית

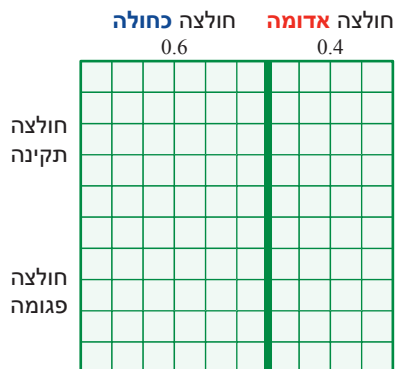
## שיעור 1. הסתברות של מאורעות תלויים

בארגז למכירת חיסול, 60% מהחולצות **כחולות** והשאר **אדומות**.  
20% מהחולצות הכחולות פגומות, 30% מהחולצות ה**אדומות** פגומות.  
נועה בחרה באקראי חולצה מהארגז.  
מה ההסתברות שהחולצה תקינה?



נלמד לחשב הסתברות של מאורעות תלויים.

1. לפניכם דיאגרמת שטח המחולקת לפי ההסתברות להוציא חולצה **כחולה** או חולצה **אדומה**.



א. חלקו את שני המלבנים חלוקה נוספת:

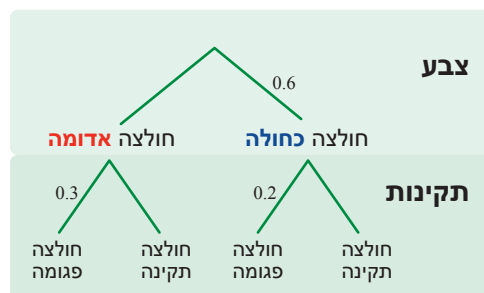
- את המלבן חולצה **כחולה** לפי: "תקינה" / "פגומה".
- את המלבן חולצה **אדומה** לפי: "תקינה" / "פגומה".

ב. חשבו את ההסתברות שנועה תבחר מהארגז חולצה **אדומה** פגומה.

ג. חשבו את ההסתברות שנועה תבחר מהארגז חולצה תקינה.

ד. **עידן** שרטט דיאגרמת עץ.

השלימו את ההסתברויות החסרות על ענפי העץ.



ה. מה ההסתברות שנועה תבחר מהארגז חולצה תקינה? חשבו בעזרת דיאגרמת העץ.  
האם קיבלתם אותה תוצאה?

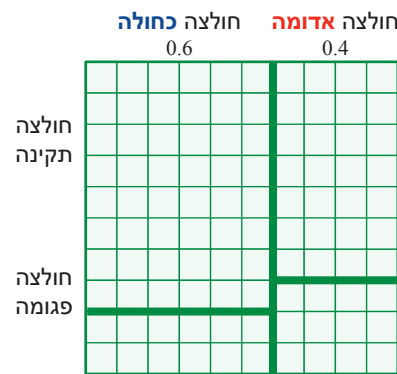


יש ניסויים בהם ההסתברות בשלב השני תלויה בתוצאות של השלב הראשון.

- **בדיאגרמת שטח:** בשלב השני, מחלקים אחרת כל מלבן, שהתקבל בשלב הראשון.
- **בדיאגרמת עץ:** ההסתברויות על הענפים המתאימים לשלב השני תלויות בתוצאות של השלב הראשון.

מטלה: במשימה 1

● **בדיאגרמת השטח:**



**בשלב ראשון** מחלקים את ריבוע השטח לשני מלבנים לפי צבע החולצה.

**בשלב שני** מחלקים אחרת כל מלבן על-פי אחוזי חולצות פגומות או חולצות תקינות לפי צבע החולצה שנבחרה בשלב הראשון.

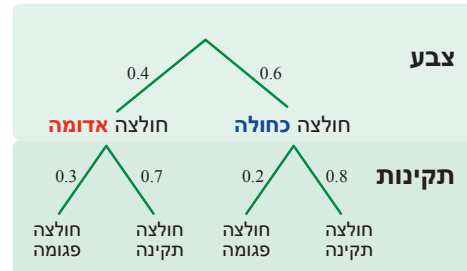
במלבן של החולצה ה**כחולה** ההסתברות להוציא חולצה פגומה היא 0.2 וההסתברות להוציא חולצה תקינה היא 0.8.

במלבן של החולצה ה**אדומה** ההסתברות להוציא חולצה פגומה היא 0.3 וההסתברות להוציא חולצה תקינה היא 0.7.

● **בדיאגרמת העץ**

**בשלב ראשון** מחלקים לשני ענפים לפי צבע החולצה. **בשלב שני** ההסתברות לתקינות החולצה נקבעת לפי צבע של החולצה שנבחרה בשלב הראשון.

תזכורת: בדיאגרמת עץ **בכל נקודת פיצול, סכום ההסתברויות הוא 1.**

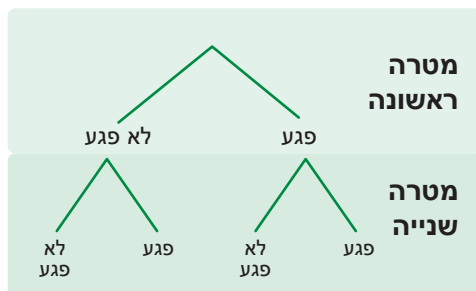


2. **דני** משתתף במטווח.

ההסתברות שיפגע במטרה ראשונה היא 0.4

אם דני **יפגע** במטרה הראשונה, ההסתברות שהוא יפגע במטרה השנייה היא 0.7

אם דני **לא יפגע** במטרה הראשונה, ההסתברות שהוא יפגע במטרה השנייה היא 0.5



א. השלימו את ההסתברויות על ענפי העץ.

ב. מה ההסתברות שדני לא יפגע במטרה כלל?

ג. מה ההסתברות שדני יפגע במטרה אחת?

3. 60% מהניגשים למבחן הנהיגה הם גברים.

ידוע כי 8% מאוכלוסיית הגברים הם עיוורי צבעים, ו-0.5% מאוכלוסיית הנשים הן עיוורות צבעים. בחרים באקראי אדם שניגש למבחן נהיגה.

א. מה ההסתברות שהאדם שנבחר יהיה גבר עיוור צבעים? (היעזרו בדיאגרמת עץ או בדיאגרמת שטח).

ב. מה ההסתברות שהאדם שנבחר יהיה אדם (גבר או אישה) עיוור צבעים?



הלקות **עיוורון צבעים** יכולה להיות מדרגת פגיעה קלה ביותר ועד עיוורון צבעים מלא. 8% מהגברים וכ-0.5% מהנשים באוכלוסייה הם עיוורי צבעים. עיוורון הצבעים מועבר בתורשה על ידי גן רצסיבי המצוי על כרומוזום ה-X. ולכן התכונה תבוא לידי ביטוי רק במידה ויש מולו כרומוזון שני שהוא בעל אותה לקות. מרבית עיוורי הצבעים אינם מבחינים בין ירוק לאדום ובמקרים חמורים עיוורי הצבעים רואים את העולם בשחור לבן או בגווני אפור.



אצל גבר (XY) מצוי **עותק אחד** בלבד של הגן ולכן כל ליקוי בגן יבוא לידי ביטוי. אצל אישה (XX) מצויים שני כרומוזומי X. ליקוי בעותק אחד בלבד יפוצה על ידי העותק השני ולכן הלקות תבוא לידי ביטוי רק במקרה של שני כרומוזומים פגומים.

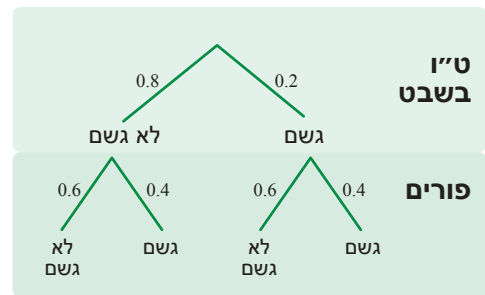
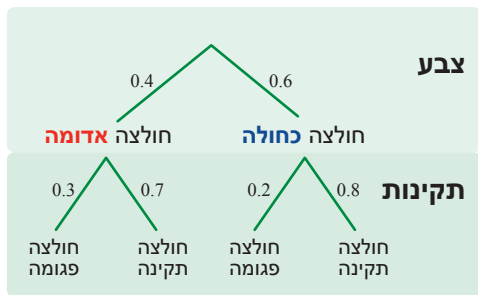


4. **אייל** אמר: ביחידה הקודמת כבר בנינו דיאגרמות עץ.

חזרה

ובשיעור זה בנינו את הדיאגרמה:

ביחידה הקודמת בנינו את הדיאגרמה:



מה ההבדל בין הדיאגרמות בשיעורים הקודמים ובין הדיאגרמות בשיעור זה? מה חדש?



1. יונתן מתאמן בזריקות לסל. הוא זרק כדור לסל פעמיים.

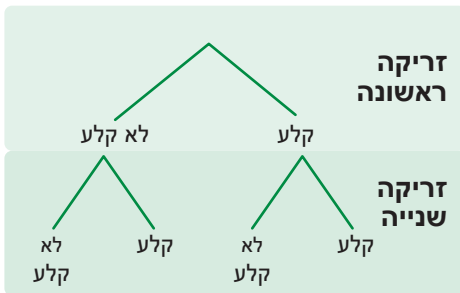
ההסתברות שיקלע לסל בזריקה ראשונה היא 0.3

אם יונתן יקלע לסל בזריקה הראשונה, ההסתברות שהוא יקלע לסל גם בזריקה השנייה היא 0.6  
אם יונתן לא יקלע לסל בזריקה הראשונה, ההסתברות שהוא יקלע לסל בזריקה השנייה היא 0.2,

א. השלימו את ההסתברויות על ענפי העץ.

ב. מה ההסתברות שיונתן לא יקלע לסל כלל?

ג. מה ההסתברות שיונתן יקלע לסל פעמיים?



2. ב"קריית בהירים" ההסתברות להולדת בת שווה להסתברות להולדת בן.

בסקר נמצא כי ההסתברות להולדת תינוקת בעלת שיער בהיר היא 0.4

וההסתברות להולדת תינוק בעל שיער בהיר היא 0.3

בוחרים באקראי תינוק מבין כל התינוקות בקרייה

א. לפניכם דיאגרמת שטח המחולקת לפי ההסתברות להולדת

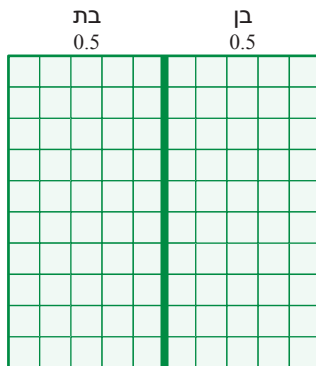
בן או בת.

חלקו את שני המלבנים חלוקה נוספת:

את המלבן הולדת בת לפי: "שיער בהיר" / "שיער כהה".

את המלבן הולדת בן לפי: "שיער בהיר" / "שיער כהה".

ב. מה ההסתברות שזו בת בעלת שיער בהיר?



3. במפעל אלקטרוניקה 70% מהעובדים הם גברים.

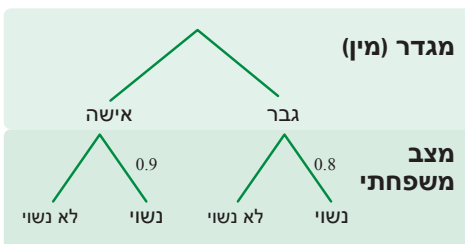
80% מבין העובדים הגברים במפעל נשואים,

90% מבין הנשים העובדות במפעל נשואות.

בוחרים באקראי עובד (גבר או אישה).

א. השלימו את ההסתברויות החסרות בדיאגרמת העץ.

ב. מה ההסתברות שהעובד שנבחר אינו נשוי?





## שיעור 2. לפעמים לא ממשיכים

מקרים בהם יש תוצאות שאינן מובילות לשלב נוסף



**אֵלָה ואריאל** משחקות משחק. הן מטילות קובייה. אם מקבלים 6, אריאל יורדת במגלשה ומנצחת. אם מקבלים מספר שונה מ-6, אֵלָה יורדת **מדרגה אחת**. (אֵלָה צריכה לרדת 5 מדרגות כדי לנצח). שיערו אם המשחק הוגן. למי, לדעתכם, יש סיכוי גדול יותר לנצח?

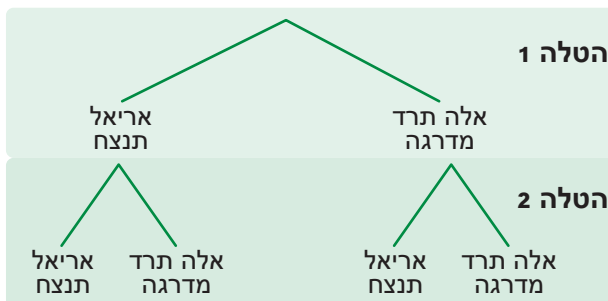
**נלמד לחשב הסתברות במקרים בהם חלק מהתוצאות אינן מובילות לשלב נוסף.**



1. א. השלימו את ההסתברויות המתאימות בדיאגרמת העץ.

ב. המורה ביקשה לשרטט את השלב הבא בדיאגרמת העץ (הטלת קובייה בפעם השנייה).

**עדי** שרטטה את הדיאגרמה הבאה:



**גלי** שרטטה את הדיאגרמה הבאה:



מי מהבנות שרטטה את תחילת הדיאגרמה בדרך נכונה? הסבירו.

רשמו את ההסתברויות על כל ענף בדיאגרמה שבחרתם.

ג. מהו המספר הגדול ביותר של הטלות קובייה במשחק?

כמה שלבים יהיו בדיאגרמת העץ? הסבירו את תשובתכם.

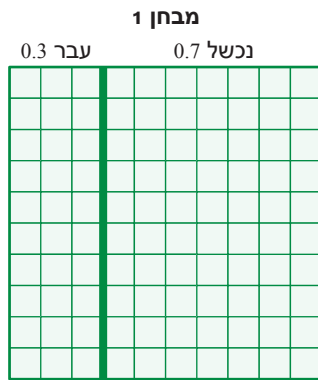
ד. חשבו את ההסתברות שאֵלָה תנצח.

ה. חשבו את ההסתברות שאריאל תנצח (היעזרו בתוצאה של סעיף ד).

ו. האם המשחק הוגן? האם צדקתם בהשערתכם?



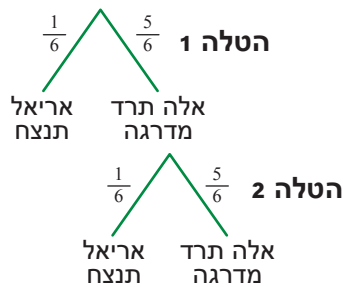
ז. האם הוספה או הורדה של מדרגה בדרכה של אֵלָה תהפוך את המשחק להוגן?



2. 30% מהלומדים נהיגה מצליחים במבחן הנהיגה בפעם הראשונה. 60% מן הנכשלים בפעם הראשונה, עוברים בפעם השנייה.
- א. לפניכם ריבוע שטח המחולק לפי ההסתברות שתלמיד יעבור או ייכשל במבחן הנהיגה הראשון. השלימו את השלב השני של הדיאגרמה: חלקו כל מלבן בעזרת קו רוחבי, וכתבו הסתברויות מתאימות.
- ב. חשבו את ההסתברות שתלמיד הלומד נהיגה יצטרך להיבחן בפעם השלישית.

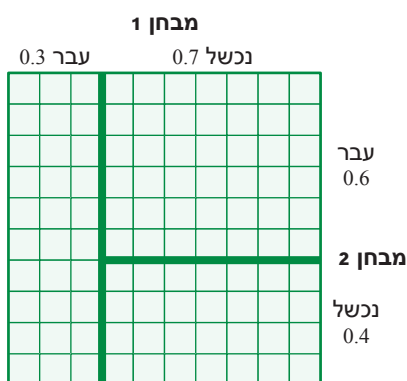


במשחק שבפתיחת השיעור, בהטלת הקובייה בפעם הראשונה יש שתי תוצאות אפשריות:



- הקובייה תראה את המספר 6, אריאל תגלוש במגלשה ותנצח, או שהקובייה תראה מספר שונה מ-6 ואֶלָה תרד מדרגה אחת. אם הקובייה תראה את המספר 6, **אריאל תנצח** ולכן **לא יהיה משחק נוסף**. במקרה זה, בדיאגרמת העץ **לא יהיו הסתעפויות נוספות מענף זה**.
- הקובייה תראה מספר שונה מ-6, **אֶלָה תרד מדרגה ויהיה משחק נוסף**. במקרה זה, בדיאגרמת העץ **נפצל את הענף "אֶלָה תרד מדרגה" לשני ענפים נוספים**.

במשימה 2 אם תלמיד עבר את מבחן הנהיגה בפעם הראשונה **לא יהיה מבחן נוסף**.



במקרה זה, בדיאגרמת השטח **לא מחלקים** את המלבן "עבר במבחן ראשון", **חלוקה נוספת**.

אם התלמיד לא עבר את המבחן בפעם הראשונה, **יהיה מבחן נוסף**.

במקרה זה, בדיאגרמת השטח, **מחלקים את המלבן "נכשל במבחן ראשון" לשני מלבנים**, (עבר במבחן שני או "נכשל במבחן השני").





5. במדינת "דרייבלנד" 60% מהתושבים הם מעל גיל 16. 75% מהתושבים מעל גיל 16 הם בעלי רישיון נהיגה. מה ההסתברות לפגוש במדינה תושב בעל רישיון נהיגה? היעזרו בדיאגרמת עץ או דיאגרמת שטח.



6. בשדה עגבניות משתמשים בחומר נגד מזיקים. ההסתברות שהריסוס יצליח היא 70%. אם הריסוס לא הצליח (כלומר נשאר מזיקים בשדה), מרססים שוב בתכשיר המשמיד מזיקים ב- 90% מהמקרים. א. מה ההסתברות ששני הריסוסים לא יועילו? ב. מה ההסתברות שהטיפול במזיקים יצליח?



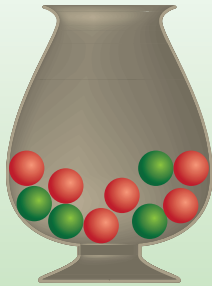
7. ההסתברות להצליח בניסוי בפעם הראשונה היא 60%. אם הניסוי לא יצליח, יערכו את הניסוי שוב. ההסתברות להצליח בניסוי בפעם השנייה היא 75%. א. מה ההסתברות ששני הניסויים לא יצליחו? ב. מה ההסתברות שאחד הניסויים יצליח?



8. הילה מחפשת באתרים באינטרנט חומר לעבודה בהיסטוריה. ההסתברות שתמצא חומר לעבודה באתר הראשון היא 0.9. אם הילה לא תמצא חומר באתר הראשון, היא תחפש באתר שני. ההסתברות שתמצא חומר לעבודה באתר השני היא 0.8. אם הילה לא תמצא חומר באתר השני, היא תחפש באתר שלישי. ההסתברות שתמצא חומר לעבודה באתר השלישי היא 0.7. אם הילה לא תמצא חומר באתר השלישי, היא לא תכין את העבודה. מה ההסתברות שהילה תכין את העבודה בהסטוריה?

## שיעור 3. בלי החזרות

הסתברות של מאורעות בהם הכמות משתנה



כד מכיל 10 כדורים: 4 ירוקים ו- 6 אדומים.

אייל מוציא מתוך הכד כדור אחד, ולאחר מכן הוא מוציא כדור שני (מבלי להחזיר את הכדור הראשון).

חשבו את ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים.

נלמד לחשב הסתברות של מאורעות בהם הכמות הכללית משתנה.

1. א. אייל אמר: בשלב הראשון הוצאתי כדור אדום אז ההסתברות שאוציא כדור אדום גם בשלב

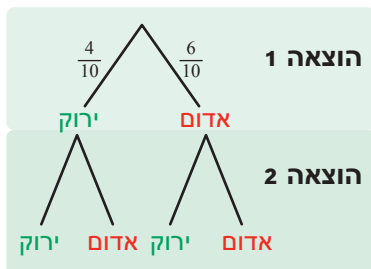
השני היא  $\frac{5}{9}$

האם אייל צודק? מדוע במכנה יש 9?

ב. השלימו את ההסתברויות על ענפי העץ בשלב 2 ( הוצאה 2).

ג. חשבו את ההסתברות שאייל יוציא שני כדורים ירוקים.

ד. חשבו את ההסתברות שאייל יוציא שני כדורים אדומים.



2. האם ההסתברות שאייל יוציא תחילה כדור ירוק ואחריו כדור אדום,

שווה להסתברות שאייל יוציא תחילה כדור אדום ואחריו ירוק?

הסבירו.



במאורעות דו-שלביים בהם מתוארות הוצאות אקראיות מכמות נתונה ללא החזרות, לאחר ההוצאה הראשונה הכמות הכללית משתנה, ובעקבותיה משתנה גם ההסתברות של התוצאות בשלב השני.

דוגמה: במשימה 1, בשלב הראשון לאחר שאייל הוציא כדור אחד נותרו בכד 9 כדורים.

לכן, בשלב השני ההסתברות להוציא כדור תלויה בצבע הכדור שהוצא בשלב הראשון.

אם בשלב הראשון אייל הוציא כדור ירוק,

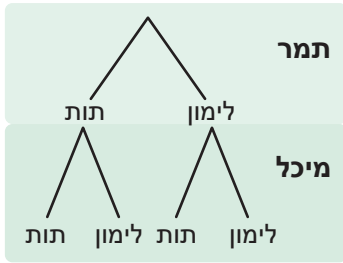
אז נותרו בכד 3 כדורים ירוקים (וההסתברות להוצאת כדור שני ירוק היא של  $\frac{3}{9}$ ) ו- 6

אדומים. (וההסתברות להוצאת כדור שני אדום היא  $\frac{6}{9}$ )

אם בשלב הראשון, אייל הוציא כדור אדום, אז נותרו בכד 4 כדורים ירוקים (הסתברות

לכדור שני ירוק היא  $\frac{4}{9}$ ) ו- 5 אדומים (הסתברות לכדור שני אדום היא  $\frac{5}{9}$ ).

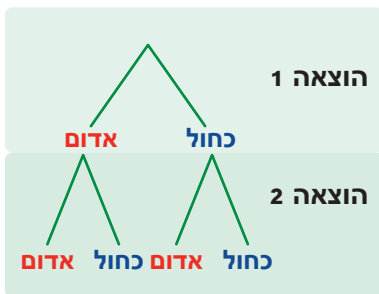
כך למשל, ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים היא  $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$



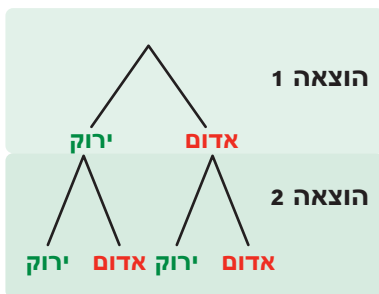
3. **נועה** הביאה 25 ארטיקים לחלק לתלמידי הכיתה. 15 ארטיקים בטעם לימון ו-10 ארטיקים בטעם תות. נועה נתנה, מבלי להסתכל, ארטיק לתמר וארטיק למיכל. א. השלימו את ההסתברויות על ענפי העץ. ב. מה ההסתברות שתמר ומיכל קיבלו ארטיקים בטעמים שונים?



4. כד מכיל 10 כדורים: 5 ירוקים, 3 אדומים, 2 כחולים. עומר מוציא מתוך הכד שני כדורים בזה אחר זה. א. השלימו את ההסתברויות בשלב הראשון בדיאגרמת העץ. ב. השלימו את השלב השני בדיאגרמת העץ. ב. מה ההסתברות להוציא שני כדורים ירוקים?



1. כד מכיל 16 כדורים: 4 כחולים ו-12 אדומים. רותם מוציאה מתוך הכד שני כדורים בזה אחר זה. א. השלימו את ההסתברויות על ענפי העץ בשלב 1. ב. השלימו את ההסתברויות על ענפי העץ בשלב 2 (הוצאה 2). ג. חשבו את ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים.



2. כד מכיל 12 כדורים: 7 ירוקים ו-5 אדומים. יובל מוציא מתוך הכד שני כדורים בזה אחר זה. א. השלימו את ההסתברויות על ענפי העץ. ב. חשבו את ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים.

3. סל מכיל 25 כדורים: 10 כתומים ו- 15 צהובים.  
**רועי** מוציא מתוך הסל שני כדורים בזה אחר זה.  
מה ההסתברות להוציא שני כדורים באותו צבע?



4. בשק 30 כובעים: 20 שחורים ו- 10 אפורים.  
**עידן** מוציא כובע מבלי להסתכל, ואחריו יובל מוציא כובע נוסף  
מבלי להסתכל.  
מה ההסתברות ששניהם הוציאו כובע מאותו צבע?



5. כד מכיל 20 כדורים: **10 ירוקים**, **5 אדומים**, **5 כחולים**.  
ליאור מוציאה מתוך הכד שני כדורים בזה אחר זה.  
א. מה ההסתברות שליאור הוציאה שני כדורים ירוקים?  
ב. מה ההסתברות שליאור הוציאה כדור ירוק?



6. כד מכיל 20 כדורים: **15 ירוקים** **5 אדומים**.  
**ענת** מוציאה מתוך הכד שלושה כדורים בזה אחר זה.  
מה ההסתברות שענת תוציא שלושה כדורים **ירוקים**?

## שיעור 4. הכמות משתנה

בקופסה 15 פתקים. על כל פתק כתוב מספר אחד שלם מ-1 עד 15. בחרים פתק מבלי להסתכל. לאיזה מבין הפתקים הבאים הסיכוי הגדול ביותר להיבחר:



פתק שעליו מספר המתחלק ב-3?

פתק שעליו מספר המתחלק ב-4?

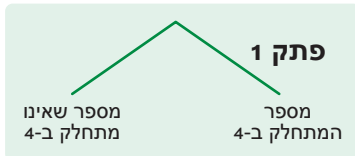
פתק שעליו מספר המתחלק ב-5?

נתרגל הסתברות של מאורעות בהם הכמות הכללית משתנה.

1. א. יעל מוציאה פתק מהקופסה (ואינה מחזירה אותו בחזרה).

מה ההסתברות, שעל הפתק רשום מספר המתחלק ב-4?

השלימו את ההסתברויות המתאימות על ענפי העץ.



ב. שירה מוציאה פתק שני מהקופסה. שרטטו את השלב השני בדיאגרמת העץ.

חשבו את ההסתברות, שעל הפתק רשום מספר המתחלק ב-4?

2. בכוס 10 עפרונות זהים שרק שניים מהם מחודדים.

תומר לוקח עיפרון מהכוס ואחריו יואב לוקח עיפרון מהכוס.

מה ההסתברות ששני העפרונות שנלקחו מהכוס מחודדים? שרטטו דיאגרמת עץ מתאימה.



3. בהגרלה 20 פתקים בתוך קופסה. רק על פתק אחד כתוב "זכיית!".

שני אנשים מוציאים בזה אחר זה פתק אחד מהקופסה.

מה ההסתברות שהאדם השני יוציא את פתק הזכייה?



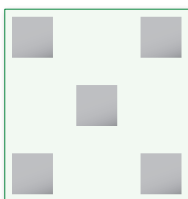
4. בפיצרייה נותנים לכל קונה כרטיס מזל ובו 5 ריבועים.

הריבועים מכסים 5 ציורים שונים. בשני ריבועים מופיעה כוס שתייה.

מגרדים שני ריבועים בלבד.

אם בשניהם מופיעה כוס שתייה, מקבלים שתייה מתנה.

מה ההסתברות לזכות בכוס שתייה חינם?

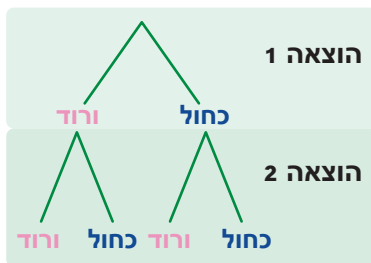




## אוסף משימות



1. בקופסה 20 פתקים. על כל פתק רשום מספר שלם מ- (-10) ל- 10 (ללא אפס). מוציאים שני פתקים בזה אחר זה. היעזרו בדיאגרמת עץ וחשבו את ההסתברות להוציא שני מספרים חיוביים.



2. בכד 12 כדורים: 2 כחולים ו- 10 ורודים.

עידן מוציא מתוך הכד שני כדורים בזה אחר זה.  
 א. השלימו את ההסתברויות המתאימות על ענפי העץ.  
 ב. מה ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים?



3. בסל 9 כדורים: 3 אדומים ו- 6 ירוקים.

א. מוציאים מהסל כדור אחד ורושמים את הצבע שלו, ומחזירים את הכדור לסל. מוציאים שוב ורושמים את הצבע של הכדור. מה ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים?  
 ב. מוציאים מתוך הסל שני כדורים בזה אחר זה. מה ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים?



4. בקופסה 12 פתקים. על כל פתק רשום מספר אחד מבין המספרים 1 – 12.

א. תלמיד ראשון בוחר פתק (ולא מחזיר אותו בחזרה). מה ההסתברות שהמספר שבחר הוא 5?  
 ב. תלמיד שני בוחר פתק. מה ההסתברות שהמספר שבחר הוא 5?



5. בקיטנה השתתפו 20 ילדים. במהלך הקיטנה נערכו שתי הגרלות. כל ילד יכול לזכות רק בפְּרָס אחד. בהגרלה ראשונה זוכה ילד אחד בכרטיס ללונה פארק, והוא אינו משתתף בהגרלה שנייה. בהגרלה שנייה זוכים 3 ילדים בכרטיס לסרט. בוחרים באקראי ילד מהקיטנה.

א. מה ההסתברות שהילד יזכה בכרטיס לסרט?  
 ב. מה ההסתברות לא לזכות כלל?



6. בשקית 25 מטבעות שוקולד: 8 מטבעות שוקולד מריר, 5 מטבעות שוקולד לבן והשאר שוקולד חלב. נועה מוציאה שתי מטבעות שוקולד מהשקית בזו אחר זו. מה ההסתברות ששתי המטבעות יהיו מאותו סוג?



## שומרים על כושר

1. פתרו את המשוואות.

א.  $(2x - 1)^2 = 72 + (x + 7)^2$   
ב.  $(x - 4)^2 = (x + 2)(2x - 1) - 8$   
ג.  $2x(x + 2) + 3(x - 3) = 0$   
ד.  $(x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 2x^2 + 3$

2. מכפלת שני מספרים 48.

- א. סמנו ב-  $x$  את אחד המספרים.  
רשמו ביטוי למספר השני.  
ב. אילו מספרים יכול  $x$  לקבל? הסבירו.  
ג. סכום שני המספרים 16. מצאו את המספרים.

3. מכפלת שני מספרים 135.

- א. סמנו ב-  $x$  את אחד המספרים.  
רשמו ביטוי למספר השני.  
ב. אילו מספרים יכול  $x$  לקבל? הסבירו.  
ג. סכום שני המספרים 42. הייתכן? הסבירו.

4. שטחו של מלבן 48 סמ"ר.

- א. סמנו ב-  $x$  את אורך אחת הצלעות של המלבן.  
רשמו ביטוי לאורך הצלע השנייה ולהיקף המלבן.  
ב. אילו מספרים יכול  $x$  לקבל? הסבירו.  
ג. היקף המלבן 32 ס"מ.  
רשמו משוואה מתאימה ופתרו אותה.  
ד. מהם אורכי צלעות המלבן?

5. שטחו של מלבן הוא 20 סמ"ר.

- א. סמנו ב-  $x$  את אורך אחת הצלעות של המלבן.  
רשמו ביטוי לאורך הצלע השנייה.  
ב. אילו מספרים יכול  $x$  לקבל? הסבירו.  
ג. מאריכים את אחת הצלעות ב- 5 ס"מ, ואת הצלע הסמוכה מקצרים ב- 3 ס"מ ומתקבל ריבוע.  
רשמו משוואה מתאימה ופתרו אותה.  
ד. מהם אורכי צלעות המלבן?