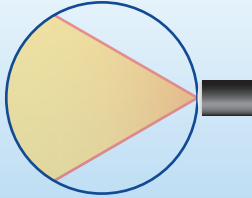


יחידה 24: זוויות במעגל

שיעור 1. זווית היקפית וזווית מרכזית

בתרגיל צבאי גדול, חונים החיילים במחנה שצורתו עיגול. על הגדר של המחנה הציבו מגדלור. רוצים שהמגדלור יאיר שלישי מגדר המחנה. באיזו זווית יאיר המגדלור?

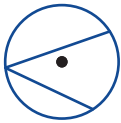


נכיר זווית היקפית במעגל ונלמד על תכונותיה.

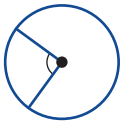


זוויות במעגל נקראות על שם הקודקוד שלהן.

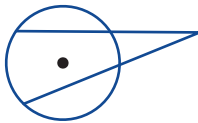
הגדרות זווית שקודקודה על המעגל ושוקיה מיתרים נקראת **זווית היקפית**.



זווית שקודקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים נקראת **זווית מרכזית**.



זווית שקודקודה מחוץ למעגל ושוקיה חותכים את המעגל נקראת **זווית חיצונית למעגל**.



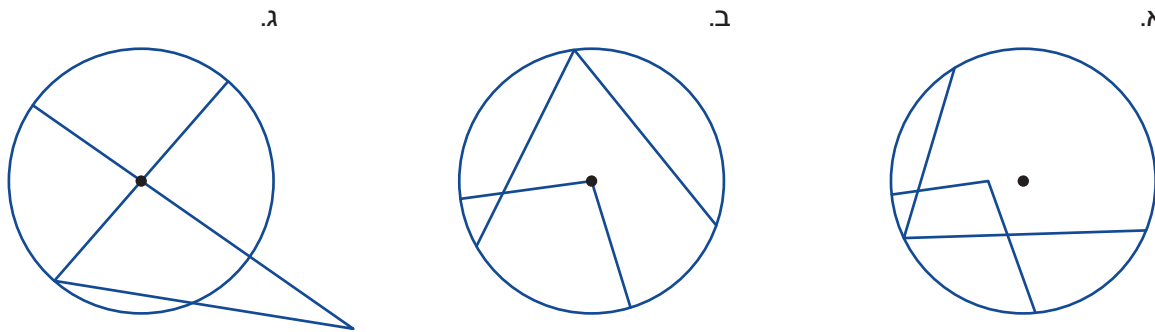
זווית שקודקודה בתוך המעגל נקראת **זווית פנימית**.



מגדלור (צירוף של המילים מגדל ואור) הוא מגדל המפיץ אור ומסייע לניווט ולשיט בים. המגדלור החליף שיטות קדומות יותר, כגון הבערת מדורות בראשי מצוקים וגבעות. בימינו, עם התפתחות עזרי ניווט מתקדמים, השימוש במגדלורים מצומצם.



1. מצאו במעגלים זוויות מרכזיות, זוויות היקפיות, זוויות פנימיות וזוויות חיצוניות.

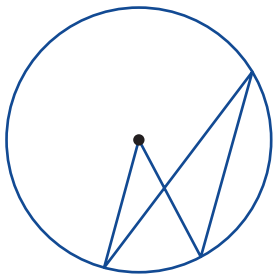


זווית היקפית וזווית מרכזית הנשענות על אותה קשת

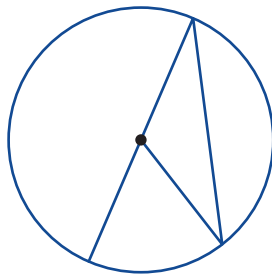


נחקור את הקשר בין זווית היקפית וזווית מרכזית הנשענות על אותה קשת.
היכן נמצא מרכז המעגל? יש שלושה מצבים אפשריים:

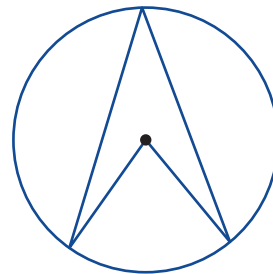
מחוץ לשוקי הזווית ההיקפית:



על השוק של הזווית ההיקפית:



בין שוקי הזווית ההיקפית:



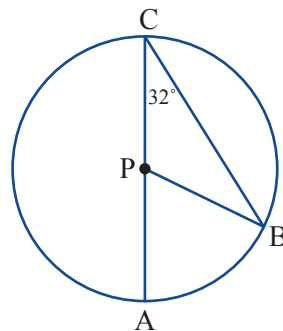
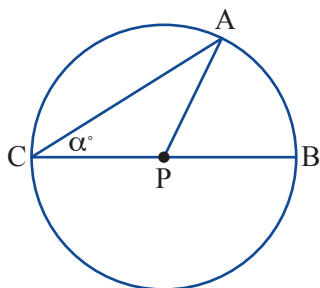
2. א. בכל שרטוט, זווית היקפית וזווית מרכזית הנשענות על הקשת \widehat{AB} , מרכז המעגל נמצא על שוק הזווית ההיקפית.

(ii) גודל הזווית ההיקפית הוא α .

בטאו את גודל הזווית המרכזית בעזרת α .

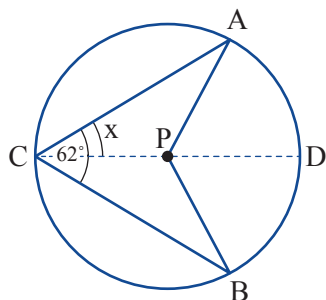
(i) הזווית ההיקפית בת 32° .

חשבו את גודל הזווית המרכזית הנשענת על \widehat{AB} .



ב. בסעיף א מצאתם קשר בין זווית היקפית לזווית מרכזית הנשענות על אותה קשת, במקרים בהם מרכז המעגל נמצא על שוק הזווית ההיקפית. נסחו את הקשר שמצאתם.

3. נתבונן בזווית היקפית ובזווית מרכזית הנשענות על אותה קשת, כך שמרכז המעגל נמצא בין שוקי הזווית היקפית. במעגל שמרכזו P, הזווית היקפית הנשענת על \widehat{AB} בת 62° .

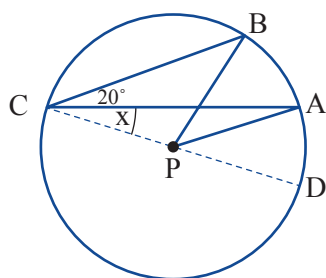


מסמנים ב- x את הזווית היקפית הנשענת על \widehat{AD} .

א. הביעו בעזרת x את:

- גודל הזווית היקפית הנשענת על \widehat{BD}
 - גודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת \widehat{BD}
 - גודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת \widehat{AD}
- ב. מהו גודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת \widehat{AB} ?

4. נתבונן בזווית היקפית ובזווית מרכזית הנשענות על אותה קשת, כך שמרכז המעגל נמצא מחוץ



לזווית היקפית. במעגל שמרכזו P, הזווית היקפית הנשענת על \widehat{AB} בת 20° .

מסמנים ב- x את הזווית היקפית הנשענת על \widehat{AD} .

א. הביעו בעזרת x את:

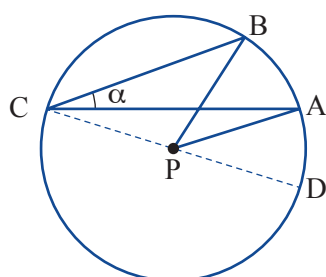
- גודל הזווית היקפית הנשענת על \widehat{BD}
 - גודל הזווית המרכזית הנשענת על \widehat{AD}
 - גודל הזווית המרכזית הנשענת על \widehat{BD}
- ב. מהו גודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת \widehat{AB} ?



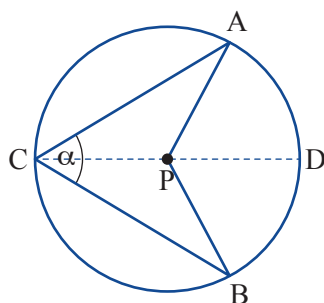
משפט: גודל זווית היקפית במעגל שווה לחצי הגודל של הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

5. הוכיחו את המשפט על גודל הזווית היקפית. היעזרו בשרטוטים הבאים:

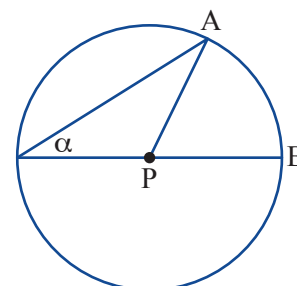
מרכז המעגל
מחוץ לשוקי הזווית



מרכז המעגל
בין שוקי הזווית

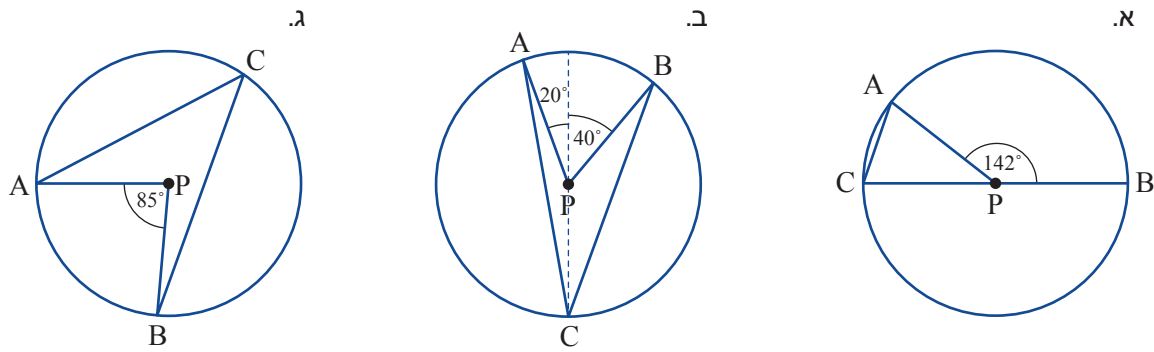


מרכז המעגל
על שוקי הזווית

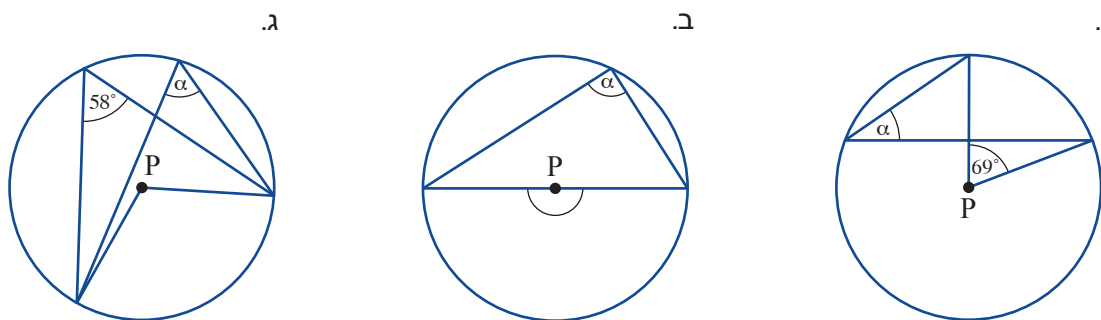




1. חשבו את גודל הזווית ההיקפית $\sphericalangle ACB$ בכל מעגל (P מרכז המעגל).

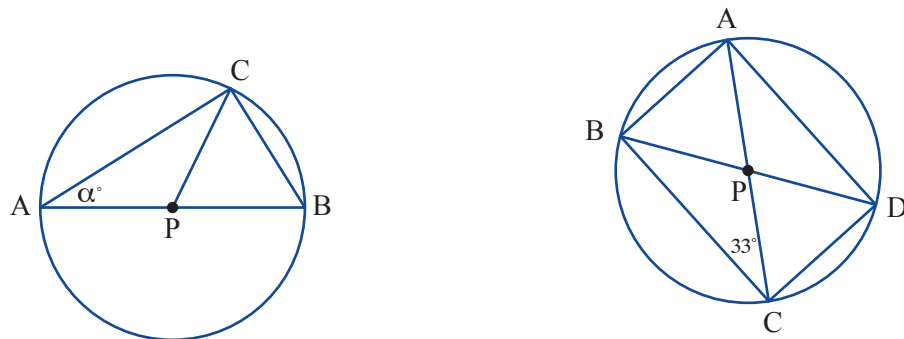


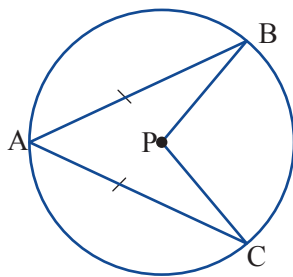
2. בכל מעגל חשבו את גודל הזווית α (P מרכז המעגל).



3. א. חשבו את גודל כל הזוויות בשרטוט (P מרכז המעגל).

ב. מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle ACB$ (P מרכז המעגל).





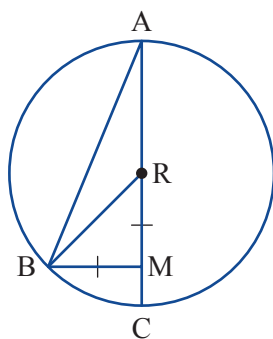
4. בשרטוט מעגל שמרכזו P.

נתון: $\sphericalangle BPC = 100^\circ$

$AB = AC$

א. מה סוג המרובע ABPC? הסבירו.

ב. חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ABP$

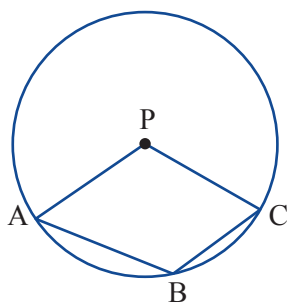


5. בשרטוט מעגל שמרכזו R.

נתון: $RM = BM$

$AM \perp BM$

חשבו את גודל הזווית A.

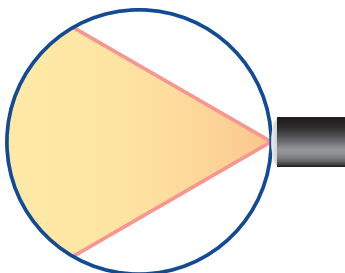


6. בשרטוט מעגל שמרכזו P.

הוכיחו: $\sphericalangle B = \sphericalangle A + \sphericalangle C$

(הדרכה: סמנו ב-x את $\sphericalangle B$

והביעו את P בעזרת x.)



7. נחזור למשימה מפתיחת השיעור:

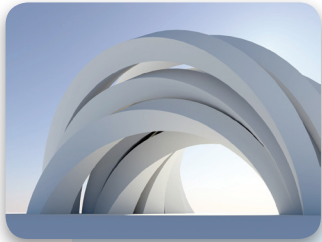
מגדלור מוצב על גדר של בסיס שצורתו עיגול.

המגדלור מאיר שליש של הגדר.

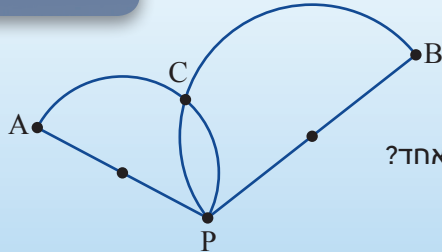
א. מה גודל הזווית המרכזית המתאימה לשליש הגדר?

ב. מה גודל הזווית ההיקפית המתאימה לאותה קשת?

ג. מה גודל הזווית שיוצר המגדלור? הסבירו.



שיעור 2. זווית היקפית הנשענת על קוטר



בשרטוט שני חצאי מעגלים.
נקודה P היא קצה משותף של שני הקטרים.
מחברים את הנקודות A ו-C, B ו-C.
האם שלוש הנקודות A, B, C נמצאות על ישר אחד?
ואם נבחר חצאי מעגלים אחרים,
האם לדעתכם, שלוש הנקודות A, B, C נמצאות על ישר אחד?

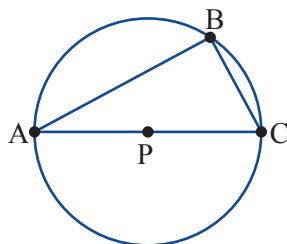
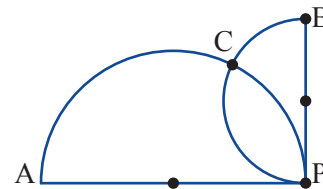
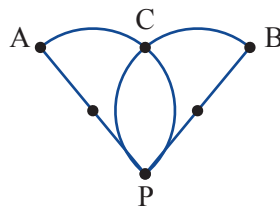
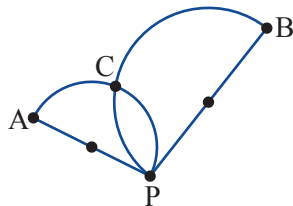
נלמד על זווית היקפית הנשענת על קוטר.



1. באתר "מתמטיקה משולבת" במדור "פעילויות מחשב", תמצאו את הקובץ "זווית היקפית הנשענת על קוטר". בפעילות זו נבדוק אם הקטע AB תמיד יעבור דרך הנקודה C. בצעו את הפעילות לפי ההוראות.



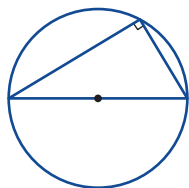
2. בכל שרטוט בדקו אם הקטע AB עובר דרך נקודה C.



3. AC קוטר במעגל שמרכזו P.
א. מה גודל הזווית המרכזית $\angle APB$?
ב. מה גודל הזווית ההיקפית $\angle ABC$? הסבירו.



משפט: זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.



במשימה 3 הוכחנו את המשפט לפי זווית היקפית. ביחידה הקודמת הוכחנו אותו משפט בדרכים אחרות.



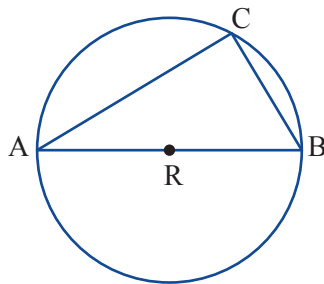
תזכורת

- אורך התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית אורך היתר.
- במשולש ישר זווית שזוויותיו החדות 30° , 60° , אורך הניצב מול הזווית בת 30° שווה לחצי אורך היתר.



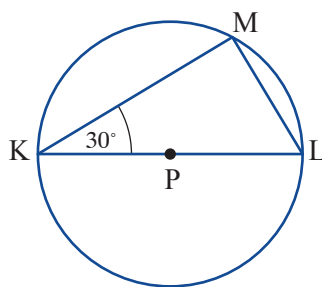
4. נחזור לשאלת הפתיחה של השיעור.
מדוע הנקודה C נמצאת תמיד על הקטע AB?

5. במעגל שמרכזו R, הזווית ההיקפית C נשענת על הקוטר AB.
בעבר למדנו את המשפט:



אורך התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית אורך היתר.
הוכיחו את המשפט הזה בעזרת המשפט על הזווית ההיקפית הנשענת על קוטר.

6. במעגל שמרכזו P, KL הוא קוטר. $\sphericalangle K = 30^\circ$.
בעבר למדנו את המשפט:



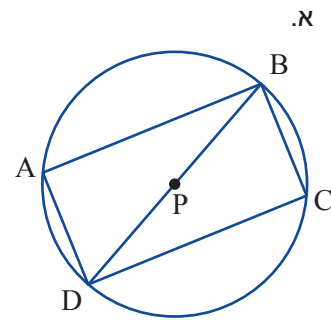
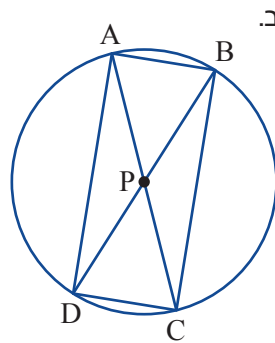
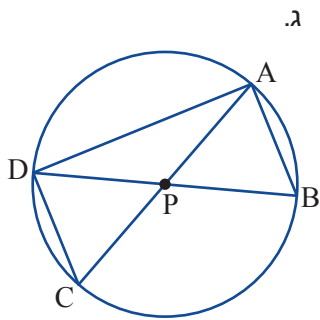
במשולש ישר זווית שזוויותיו החדות 30° , 60° אורך הניצב מול הזווית בת 30° שווה לחצי אורך היתר.
הוכיחו את המשפט הזה בעזרת המשפט על הזווית ההיקפית הנשענת על קוטר.



למשימות המסומנות ב- * יש משימות חלופיות באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות מחשב". תחת המשימות שיש עבורן פעילות מחשב חלופית, קשום שם המשימה באתר.

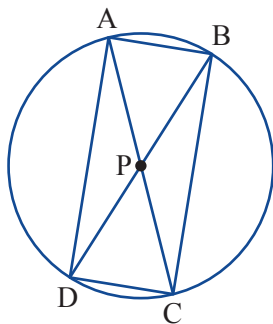


1. מצאו זוויות ישרות בשרטוטים הבאים (P מרכז המעגל).



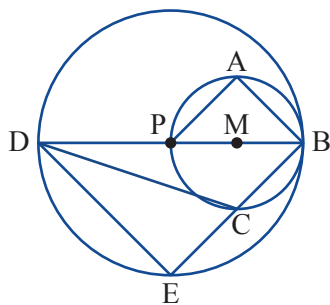
2. AC ו- BD הם קטרים במעגל.

- א. מה סוג המרובע ABCD? הסבירו בעזרת תכונות של זווית היקפית.
- ב. מה סוג המרובע ABCD, אם הקטרים AC ו- BD מאונכים זה לזה? הסבירו.



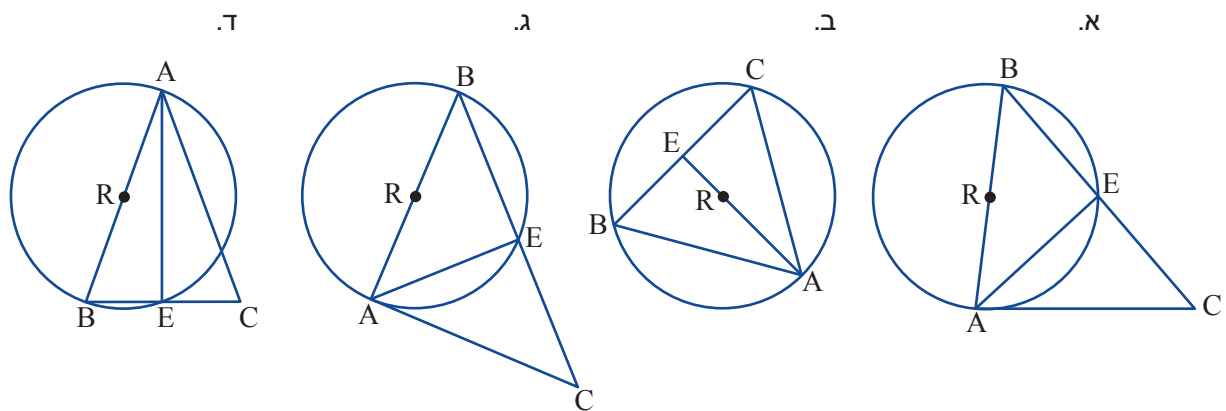
3. בשרטוט שני מעגלים.

- P מרכז המעגל הגדול, M מרכז המעגל הקטן.
- מצאו זוויות ישרות בשרטוט.

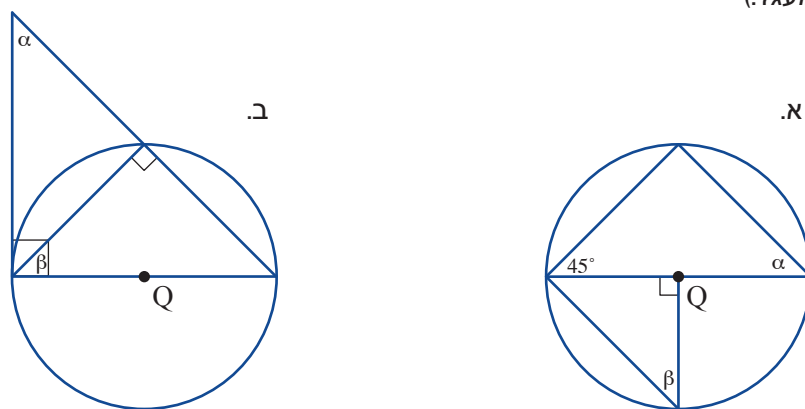




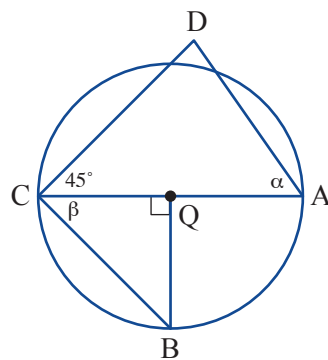
4. באילו מהמשולשים אפשר להסיק בוודאות כי הקטע AE הוא גובה במשולש ΔABC ? (R הוא מרכז המעגל).

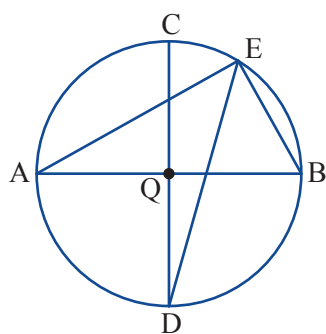


5. בחרו את הטענה הנכונה לכל סעיף: $\alpha = \beta$ $\alpha < \beta$ $\alpha > \beta$: (Q הוא מרכז המעגל).



6. בחרו את הטענה הנכונה: $\alpha = \beta$ $\alpha < \beta$ $\alpha > \beta$: (Q הוא מרכז המעגל).

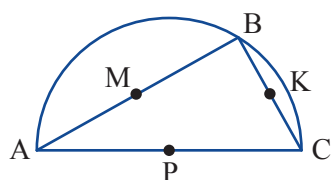




7* AB ו- CD הם שני קטרים מאונכים זה לזה, במעגל שמרכזו Q. E נקודה על המעגל.

הוכיחו כי ED הוא חוצה הזווית $\sphericalangle AEB$.

שם הפעילות החלופית באתר: "קטרים וחוצה זווית".



8 משולש ABC חסום בחצי מעגל שמרכזו P.

M אמצע הצלע AB, K אמצע הצלע BC.

א. מהו סוג המרובע PMBK? הסבירו.

ב. האם המשולשים PMB ו- PKC דומים?

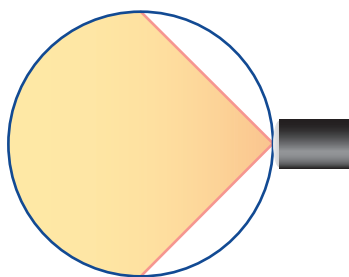
האם הם חופפים? הוכיחו.



9 A ו- C הם שני קודקודים נגדיים של מלבן ABCD.

א. העתיקו את הנקודות למחברת, ושרטטו 4 מלבנים מתאימים.

ב. היכן יכולים להיות שני הקודקודים החסרים? הסבירו.



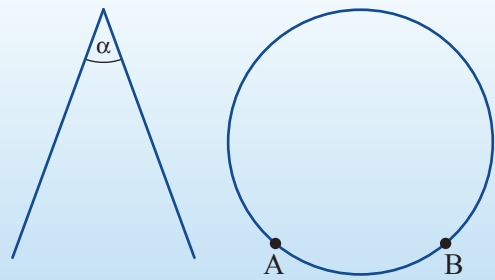
10 מגדלור מוצב על גדר בסיס שצורתו עיגול.

המגדלור מאיר חצי מהגדר.

מה גודל הזווית ההיקפית שיוצר המגדלור? הסבירו.



שיעור 3. זוויות היקפיות שוות

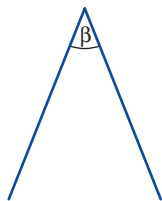


- העתיקו על נייר שקוף את הזווית α .
- האם אפשר להניח את קודקוד הזווית על המעגל, כך שהיא תהיה זווית היקפית הנשענת על הקשת \widehat{AB} ?
 - בכמה דרכים שונות אפשר לעשות זאת?
 - האם אפשר לעשות זאת גם עם כל זווית אחרת?

נחקר תכונות של זוויות היקפיות במעגל הנשענות על אותה קשת.

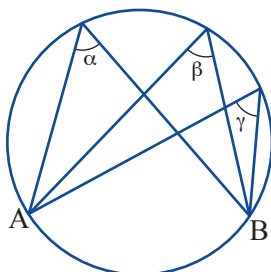


1. באתר "מתמטיקה משולבת" במדור "פעילויות מחשב" תמצאו את הקובץ "מי הזווית ההיקפית?" בפעילות זו מוצאים זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת. בצעו את הפעילות לפי ההוראות.



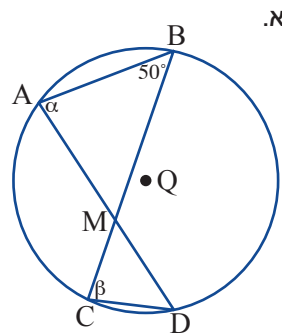
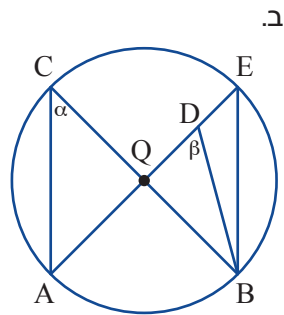
2. העתיקו על נייר שקוף את הזווית β . האם אפשר להניח את קודקוד הזווית β על המעגל מפתיחת השיעור, כך שהיא תהיה זווית היקפית הנשענת על הקשת \widehat{AB} ?

3. שרטטו מעגל. סמנו את מרכז המעגל באת P . סמנו על המעגל נקודה A ונקודה B .
 - א. שרטטו זווית מרכזית הנשענת על הקשת \widehat{AB} . כמה זוויות כאלו יש?
 - ב. שרטטו זווית היקפית הנשענת על הקשת \widehat{AB} . כמה זוויות כאלו יש?
 - ג. הסבירו מדוע כל הזוויות ההיקפיות שוות.

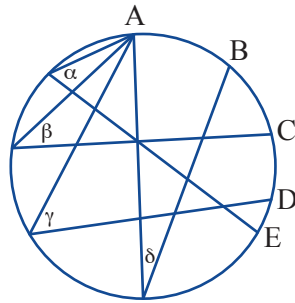


משפט: במעגל, זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת, שוות בגודלן.
 נוסחה: α, β, γ הן זוויות היקפיות הנשענות על הקשת \widehat{AB} .
 לכן: $\alpha = \beta = \gamma$

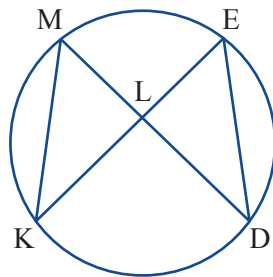
4. בכל סעיף, קבעו אם הזוויות α ו- β שוות.
 אם כן, הוכיחו.
 אם לא, קבעו מי גדולה יותר. הסבירו.



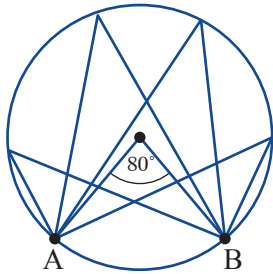
5. בשרטוט זוויות היקפיות $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
 רשמו אותן לפי הסדר מהקטנה לגדולה. הסבירו.



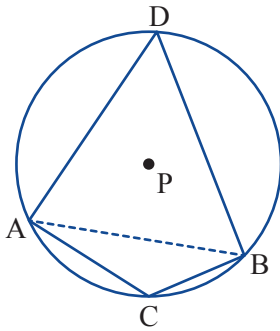
6. א. מצאו משולשים דומים בשרטוט. הוכיחו.
 ב. הוכיחו כי $KL \cdot LE = ML \cdot LD$.



במשימה 6 הוכחנו את **המשפט**: אם שני מיתרים במעגל נחתכים, אז מכפלת אורכי הקטעים של מיתר אחד שווה למכפלת אורכי הקטעים של המיתר האחר.



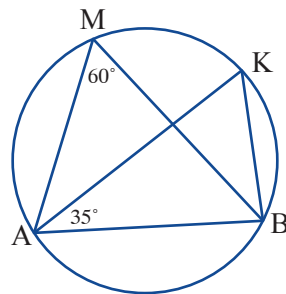
1. א. חשבו את הגודל כל אחת מהזוויות ההיקפיות בשרטוט.
 מה משותף לכל הזוויות האלו? הסבירו מדוע.
 ב. העתיקו למחברת ושרטטו זוויות היקפיות נוספות הנשענות על אותה קשת.



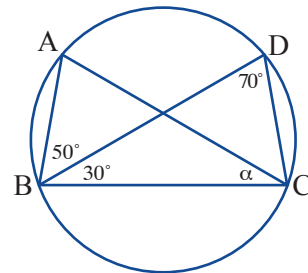
2. במעגל שמרכזו P, הזוויות $\sphericalangle ADB$ ו- $\sphericalangle ACB$ נשענות על המיתר AB.
 א. האם $\sphericalangle C = \sphericalangle D$? הסבירו.
 ב. האם $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$? הסבירו.



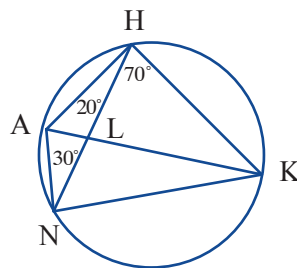
- ב. מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle ABK$



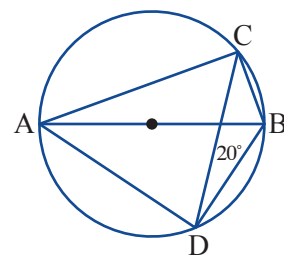
3. א. מצאו את גודל הזווית α .



- ב. חשבו את גודלן של הזוויות $\sphericalangle HLN$, $\sphericalangle HKN$

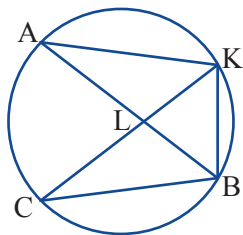


4. א. AB קוטר במעגל.
 מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle CBA$

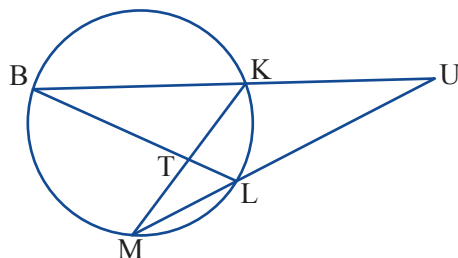




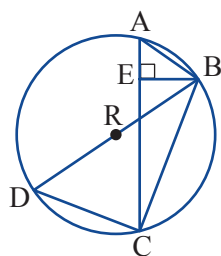
5. נתון: $AK = BC$
 הוכיחו: $LB = LK$



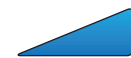
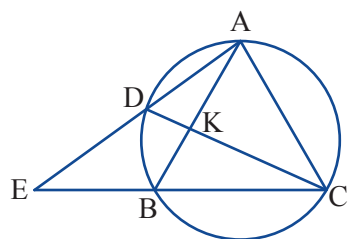
6. א. הוכיחו: $\triangle BUL \sim \triangle MUK$
 ב. הוכיחו: $BU \cdot KU = MU \cdot LU$



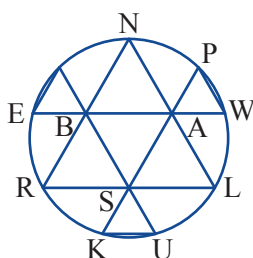
7. נתון: מעגל שמרכזו R
 $BE \perp AC$
 הוכיחו: $\triangle ABCD \sim \triangle BEA$



8. ABC הוא משולש שווה שוקיים החסום במעגל ($AB = AC$)
 א. הוכיחו: $\triangle ADC \sim \triangle ACE$
 ב. הוכיחו: $AB^2 = AE \cdot AD$



9. משולש שווה צלעות NRL חסום במעגל.
 הנקודות A, S, B הן אמצעי הצלעות.
 מצאו את היחס בין צלע המשולש הגדול NRL,
 לצלע אחד המשולשים הקטנים (למשל, NR:EB)

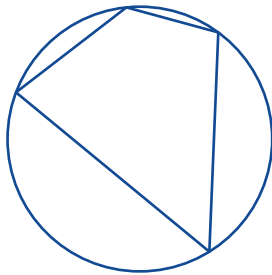




שיעור 4. מעגל חוסם מרובע

למדנו שכל משולש אפשר לחסום במעגל.
האם אפשר לחסום כל מרובע במעגל?

נחקור מהן התכונות של מרובע שאפשר לחסום אותו במעגל.



מעגל העובר דרך כל הקודקודים של מרובע, נקרא **מעגל חוסם מרובע**.
המרובע נקרא **מרובע חוסם במעגל**.



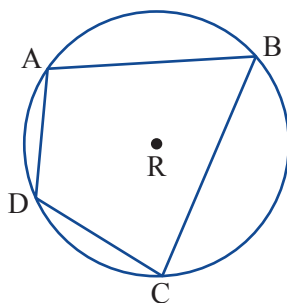
- באתר "מתמטיקה משולבת" במדור "פעילויות מחשב" תמצאו את הקובץ "מעגל חוסם מרובע".
בפעילות זו נחקור את התכונות של מרובע שאפשר לחסום במעגל.
בצעו את הפעילות לפי ההוראות.



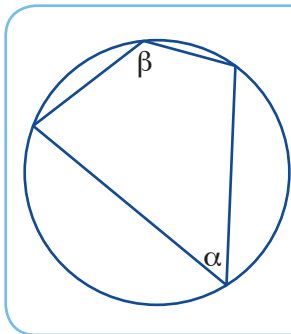
- א. שרטטו, אם אפשר:

- ריבוע חוסם במעגל
- מלבן חוסם במעגל
- טרפז חוסם במעגל

- ב. מה סכום הזוויות הנגדיות בכל המרובעים שהצלחתם לחסום במעגל?



- בשרטוט מעגל שמרכזו R והוא חוסם את המרובע ABCD.
 - העתיקו את השרטוט וסמנו, לזוג זוויות נגדיות במרובע, את הזוויות המרכזיות המתאימות להן.
 - מהו סכום הזוויות המרכזיות שסימנתם? הסבירו מדוע.
 - מהו סכום הזוויות הנגדיות במרובע? הסבירו מדוע.



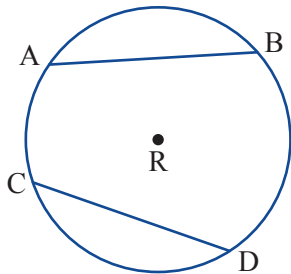
משפט: אם מרובע חסום במעגל, **אז** סכום הזוויות הנגדיות שלו הוא 180° .
 בשרטוט, $\alpha + \beta = 180^\circ$.
 גם המשפט ההפוך נכון. לא נוכיח אותו.
משפט הפוך: אם סכום הזוויות הנגדיות במרובע הוא 180° ,
אז אפשר לחסום אותו במעגל.



4. התלמידים שרטטו מרובעים חסומים במעגל.

- א. **ארז** שרטט מקבילית חסומה במעגל. מהן התכונות של המקבילית ששרטט ארז? הסבירו.
- ב. **אורן** שרטט דלתון חסום במעגל. מהן התכונות של הדלתון ששרטט אורן? הסבירו.
- ג. **אלון** שרטט טרפז חסום במעגל. מהן התכונות של הטרפז ששרטט אלון? הסבירו.

זוויות היקפיות, מיתרים וקשתות



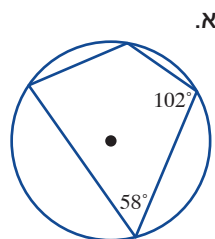
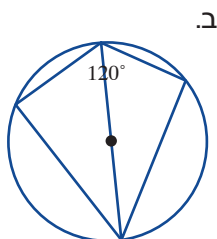
5. במעגל שמרכזו R, המיתרים AB ו-CD שווים. העתיקו את השרטוט.

- א. סמנו נקודה K על הקשת \widehat{BD} . האם $\sphericalangle AKB = \sphericalangle CKD$? הסבירו.
- ב. סמנו נקודה M על הקשת \widehat{CD} . האם $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMD$? הסבירו.

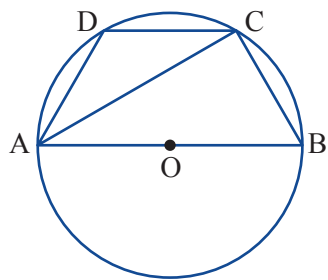
- ג. האם לזוויות היקפיות שוות, מתאימים תמיד מיתרים שווים? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.
- ד. האם למיתרים שווים, מתאימות תמיד זוויות היקפיות שוות? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.



אוסף משימות



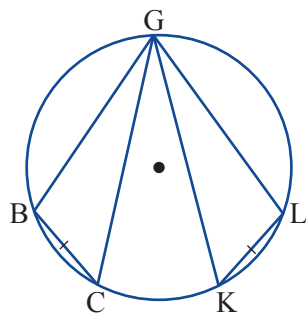
1. חשבו את גודלן של זוויות המרובעים החסומים במעגל.



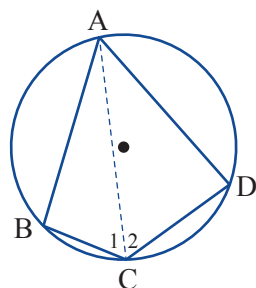
2. טרפז ABCD חסום במעגל.
 AB קוטר, $\angle CAB = 30^\circ$, $DC = 7$ ס"מ.
 א. חשבו את גודלן של זוויות הטרפז.
 ב. חשבו את אורך קוטר המעגל.



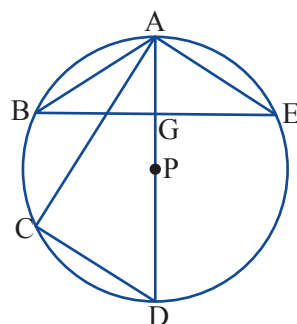
3. מעוין חסום במעגל. מה ידוע לכם על המעוין? הוכיחו.



4. במעגל משורטטים מיתרים שווים, $BC = KL$.
 מצאו זוג של זוויות שוות בשרטוט.



5. במעגל משורטטים מיתרים שווים, $AB = AD$.
 א. האם $\angle B = \angle D$? הסבירו.
 ב. האם $\angle C_1 = \angle C_2$? הסבירו.



6. במעגל שמרכזו P, המיתר BE מאונך לקוטר DA.
 המיתרים AB ו-CD שווים.
 הוכיחו: $\triangle ACD \sim \triangle EGA$



שומרים על כושר

מערכת משוואות בשני משתנים

1. נתונה המערכת: $x + 2y = 4$
 $2x + y = 5$

שרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של המשוואות, ומצאו את נקודת החיתוך שלהם.

2. מצאו את פתרון המערכת הבאות (מצאו את הערך של x ושל y).

א. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x + y = \frac{5-x}{2} \\ x + y = \frac{5+x}{3} \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{x}{2} - y = \frac{7}{2} - \frac{y}{2} \\ x + \frac{y}{2} = \frac{10-y}{2} \end{cases}$

ד. $\begin{cases} (x+1)(y-1) = (x-1)y \\ (x-3)(y+1) = (x+3)(y-2) \end{cases}$

3. נתונות 4 משוואות בשני משתנים:

$$2x + y = 12 \qquad y + 2x = 14 \qquad 8x + 4y = 48 \qquad x + y = 7$$

העזרו במשוואות אלה וצרו מערכות של משוואות לפי ההנחיות הבאות:

- א. בחרו מערכת של שתי משוואות כך שלא יהיה לה פתרון.
ב. בחרו מערכת של שתי משוואות כך שהפתרון יהיה אינסוף זוגות סדורים של מספרים המתאימים לישר.
ג. בחרו מערכת של שתי משוואות כך שהפתרון שלה יהיה זוג סדור אחד של מספרים. פתרו את המערכת.

4. עידן רצה לבנות מערכת משוואות שפתרונה $(2, 1)$.

הוא רשם את המשוואות $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ אך גילה כי פתרון מערכת זאת אינו $(2, 1)$.

מצאו את הטעות ותקנו. הסבירו.

5. נתונה המערכת: $\begin{cases} ax + y = 7 \\ x + by = 4 \end{cases}$

מה צריכים להיות a ו- b אם $(2, 3)$ הוא פתרון המערכת? הסבירו.