

יחידה 9: מלבן

שיעור 1. מהגדרה לתכונות



- לפניכם צילומים של חלונות במגדלי עזריאלי, תל-אביב.
- מדוע, לדעתכם, צורתם של מרבית החלונות בבניינים שונים היא מלבנית?
 - מצאו בסביבתכם או באינטרנט, חלונות שאינם מלבניים. אילו צורות מצאתם?

נגדיר מלבן ונחקור את תכונותיו.



בזמנים הקדומים, החלונות היו "סתם" חורים בקירות. מאוחר יותר, הפתחים כוסו בעורות של בעלי חיים, ב בד או בעץ, ובסין ויפן, בנייר. השימוש בזכוכית לכיסוי פתחי חלונות נעשה על-ידי הרומאים כבר לפני כ-2000 שנה, אך הוא התרחב והשתכלל רק לפני כ-400 שנה.



1. בכל סעיף, נתונה זווית אחת של מקבילית. חשבו את שאר הזוויות.
- א. 50° ב. 72° ג. 90° ד. 100° ה. 165°

באיזה סעיף קיבלתם מלבן?



ביחידה 8 הגדרנו מקבילית, כך:

הגדרה: מרובע בעל שני זוגות של צלעות מקבילות, נקרא **מקבילית**. בכיתה ז, הגדרנו מלבן כמרובע בעל ארבע זוויות ישרות.

נגדיר מלבן כך:

הגדרה: מקבילית בעלת זווית ישרה אחת, נקראת **מלבן**.

נוכיח כי התכונה שבאמצעותה הגדרנו את המלבן בכיתה ז, מתקיימת לפי ההגדרה החדשה, וכל אחת מההגדרות האלה מתארת מלבן.

2. **משפט:** מרובע בעל ארבע זוויות ישרות, הוא מלבן.

א. רשמו מה נתון ומה צריך להוכיח.
ב. הוכיחו.

3. לפניכם תכונות של מרובעים.

א. אילו מהתכונות מתקיימות בכל המלבנים?

רשמו: בכל המלבנים, לא בכל המלבנים, או לא יודעים.

- (1) צלעות נגדיות מקבילות. (4) כל זוג זוויות נגדיות שוות. (7) האלכסונים חוצים זה את זה.
(2) צלעות נגדיות שוות. (5) סכום כל זוג זוויות סמוכות הוא 180° . (8) האלכסונים מאונכים זה לזה.
(3) צלעות סמוכות שוות. (6) שלוש זוויות ישרות. (9) האלכסונים שווים.

ב. שרטטו דוגמה נגדית, עבור התכונות שרשמתם "לא בכל המלבנים".

ג. בחרו תכונה אחת שרשמתם "בכל המלבנים" והוכיחו אותה.

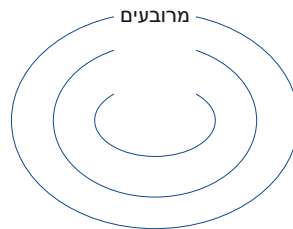
4. א. אילו מהתכונות הרשומות במשימה 3 מתקיימות בכל המקביליות? רשמו אותן.

ב. האם התכונות שרשמתם בסעיף א מתקיימות בכל המלבנים? הסבירו.

ג. האם יש תכונות (מאלה הרשומות במשימה 3) שמתקיימות במלבנים, אך אינן מתקיימות בכל המקביליות? רשמו אותן.

הוכיחו את תכונת האלכסונים במלבן.

ד. העתיקו את הדיאגרמה, ורשמו במקומות המתאימים: "מקביליות", "מלבנים".



המלבן הוא מקבילית. כל תכונות המקבילית מתקיימות במלבן.

בנוסף מתקיימות התכונות:

- כל הזוויות במלבן ישרות.
- האלכסונים במלבן שווים.



5. נחזור להגדרת המלבן מכיתה ז: מרובע בעל ארבע זוויות ישרות, נקרא **מלבן**.

הוכיחו כי מקבילית בעלת זווית ישרה אחת, היא מלבן.



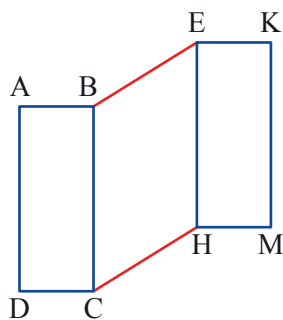
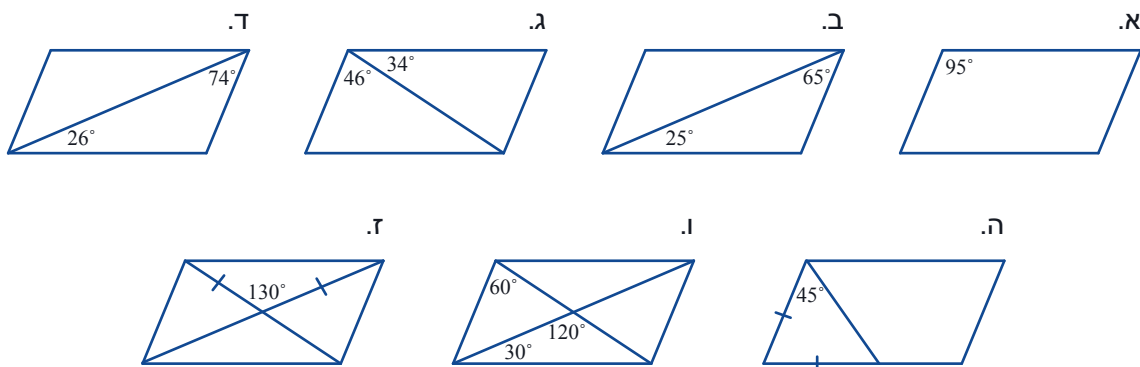
6. האם המרובע הוא מלבן? אם כן, הסבירו. אחרת, שרטטו דוגמה נגדית.
- א. מרובע לו זווית ישרה אחת.
 - ב. מרובע לו שתי זוויות ישרות.
 - ג. מרובע לו שלוש זוויות שוות.
 - ד. מרובע לו שלוש זוויות ישרות.
 - ה. מרובע לו ארבע זוויות שוות.
 - ו. מקבילית עם זווית ישרה אחת.



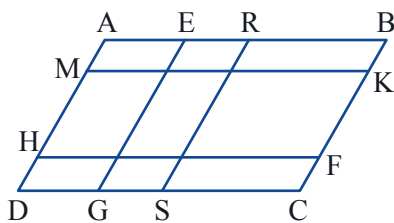
אוסף משימות



1. קבעו על פי הנתונים, מי מהמקביליות הבאות היא מלבן. הסבירו.



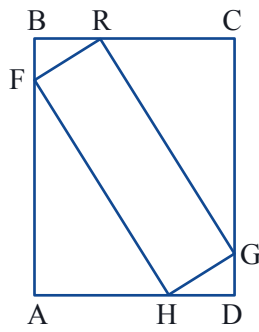
2. נתון: המלבנים, ABCD, EKMH, חופפים.
 $BC \parallel EH$
 מהו סוג המרובע BEHC? הוכיחו.



3. נתון: $DC \parallel HF \parallel MK \parallel AB$
 $AD \parallel EG \parallel RS \parallel BC$

- א. כמה מקביליות בשרטוט?
- ב. נתון גם: $\angle ERS = 90^\circ$

אילו סוגי מקביליות בשרטוט?



4. נתון: ABCD מלבן.

$$BR = HD$$

$$GD = BF$$

- א. מהו סוג המרובע RFHG? הוכיחו.
 ב. נתון גם: $\Delta BFR \sim \Delta CRG$.
 מה סוג המרובע RFHG? הוכיחו.



5. כל מלבן הוא מקבילית ולכן יש לו את כל תכונות המקבילית.

- א. רשמו לפחות שלוש תכונות שהמלבן "ירש" מהמקבילית.
 ב. רשמו שתי תכונות נוספות שיש למלבן ואין למקבילית (שאינה מלבן).



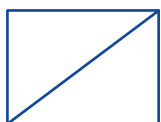
6. א. כמה זוויות ישרות צריכות להיות במרובע כדי שנוכל להסיק שהמרובע הוא מלבן?
 ב. כמה זוויות ישרות צריכות להיות במקבילית כדי שנוכל להסיק שהמקבילית היא מלבן?
 ג. כמה זוויות שוות צריכות להיות במרובע כדי שנוכל להסיק שהמרובע הוא מלבן?



7. האם המרובע הוא מלבן? אם כן, הוכיחו. אחרת, שרטטו דוגמה נגדית.
 א. מרובע לו זוג צלעות שוות, זוג צלעות מקבילות, וזווית ישרה.
 ב. מרובע לו זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות ושוות, וזווית ישרה.
 ג. מרובע לו שלוש צלעות שוות וזווית ישרה.
 ד. מרובע לו שלוש צלעות שוות ושתי זוויות ישרות.



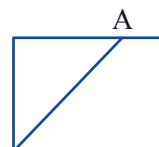
8. המורה ביקשה לשרטט חוצה של אחת מזוויות המלבן.



אסף שרטט
כך:

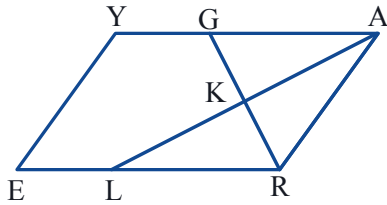


נועה שרטטה
כך:
(B על הצלע הקצרה)



אריאל שרטטה
כך:
(A על הצלע הארוכה)

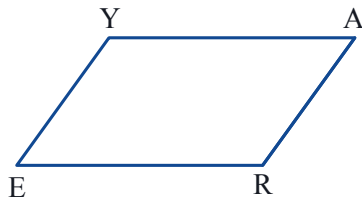
- א. האם יש מלבן שהשרטוט של אריאל מתאים? הסבירו.
 ב. האם יש מלבן שהשרטוט של נועה מתאים? הסבירו.
 ג. האם יש מלבן שהשרטוט של אסף מתאים? הסבירו.



9. AYER מקבילית, $\angle E = 70^\circ$

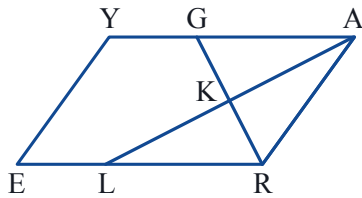
א. חשבו את זוויות המקבילית.

ב. AL חוצה את $\angle YAR$, RG חוצה את $\angle ARE$.
מה גודל הזווית בין חוצי הזוויות AKR? הסבירו.



10. AYER מקבילית, $\angle A = \alpha$

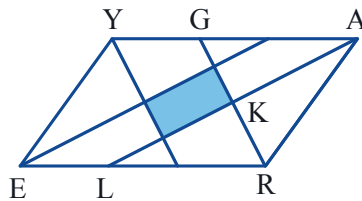
א. בטאו את זוויות המקבילית באמצעות α .



ב. AL חוצה את $\angle YAR$, RG חוצה את $\angle ARE$.

K נקודת החיתוך של חוצי הזוויות.

מהו סוג המשולש AKR?



ג. בשרטוט גם שני חוצי הזוויות האחרות של המקבילית.

איזה מרובע מתקבל בין ארבעת חוצי הזוויות המקבילית

(המרובע הצבוע)? הוכיחו.



11. גיל נקע את היד וחבשו אותה בתחבושת.

א. כשמסירים את התחבושת ופורשים אותה, מה צורתה?

ב. מידות התחבושת הפרושה 20 ס"מ X 30 ס"מ. חשבו את השטח שלה.



12. אבן דומינו היא מלבן הבנוי משני ריבועים.

א. מה היחס בין אורכי צלעות המלבן?

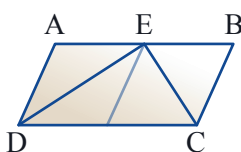
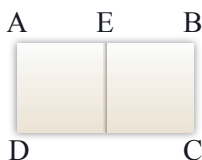
ב. שרטטו משולש DEC.

מהו סוג המשולש שנוצר? הוכיחו.

ג. האם תשובתכם לסעיף ב תשתנה אם המרובע ABCD

הוא מקבילית?

($AE = EB = BC = AD$)



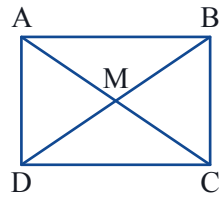


שיעור 2. עוד על תכונות של מלבן ותנאים מספיקים

לחקלאי מדשאה מלבנית שמידותיה 8 מ' X 6 מ'. הוא רוצה להציב ממטרה שתשקה את כל המדשאה, אך שבזבז המים יהיה מינימאלי. הממטרה מתיזה מים במעגל שלם, או בחלק ממנו. היכן כדאי לחקלאי להציב את הממטרה?*



נבדוק תכונות נוספות של המלבן ותנאים מספיקים לקבל מלבן.



1. בשרטוט מלבן ושני אלכסונים.

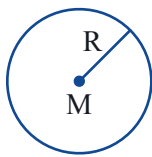
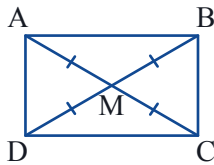
יפתח אמר: $MD = MB$.

ניתאי אמר: $MA = MB$.

א. האם ייתכן ששניהם צודקים? אם כן, הוכיחו. אם לא, הראו דוגמה נגדית.

ב. מצאו בשרטוט משולשים שווים שוקיים. כמה משולשים כאלה יש?

האם מבין המשולשים שרשמתם, יש משולשים חופפים? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו.



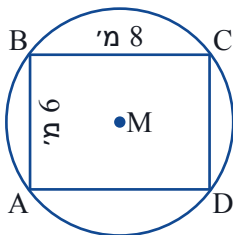
- האלכסונים במלבן חוצים זה את זה (כי כל מלבן הוא מקבילית).
- האלכסונים במלבן שווים, ולכן חצאי האלכסונים שווים גם הם.

תזכורת

כל הנקודות שעל המעגל נמצאות במרחק שווה מנקודה M.

נקודה M היא מרכז המעגל.

מוצאים שטח עיגול בעזרת הנוסחה: $S = \pi \cdot R^2$.



2. לפניכם המלבן משאלת הפתיחה. קודקודי המלבן ABCD על המעגל.

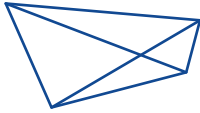
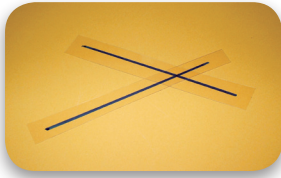
מציבים את הממטרה בנקודת מפגש האלכסונים M.

א. חשבו את אורך MA. באילו תכונות של המלבן נעזרתם?

ב. הסבירו מדוע רדיוס המעגל שווה באורכו לאורך MA.

ג. חשבו את גודל השטח שבו יש בזבז מים.

* הבעיה נלקחה מפרוייקט של גיא אביב הלומד בבית ספר למדעים ואומנויות בירושלים.

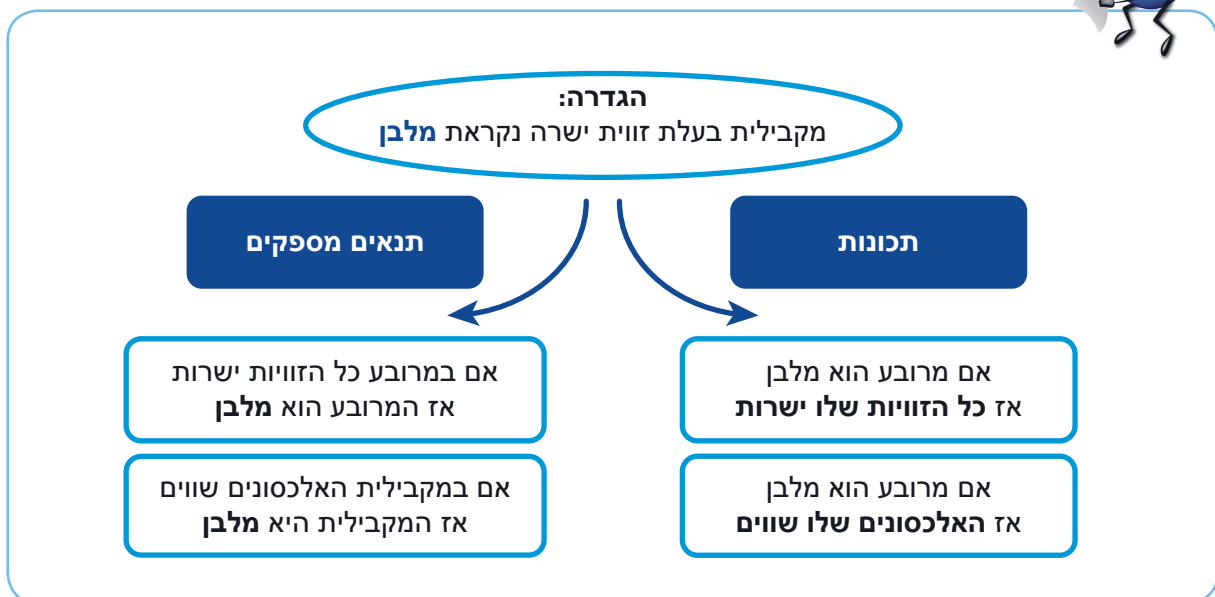


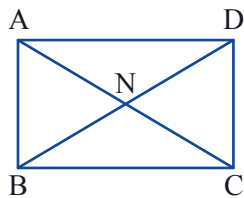
3. הכינו שתי רצועות שוות. (אפשר גם להיעזר בשני עטים שאורכם שווה).
 צרו מרובעים שונים כך ששתי הרצועות ישמשו כאלכסונים.
 א. האם ייתכן שקיבלתם מלבן? הסבירו או שרטטו דוגמה נגדית.
 ב. האם ייתכן שקיבלתם מקבילית שאינה מלבן?
 הסבירו או שרטטו דוגמה נגדית.
 ג. האם ייתכן שקיבלתם ריבוע? הסבירו או שרטטו דוגמה נגדית.
 ד. האם ייתכן שקיבלתם מרובע כלשהו? הסבירו או שרטטו דוגמה נגדית.

4. התלמידים התבקשו לכתוב תנאי מספיק לקבלת מלבן, כאשר האלכסונים שווים.
גיא רשם: אם במרובע האלכסונים שווים, אז המרובע הוא מלבן.
רחלי רשמה: אם במקבילית האלכסונים שווים, אז המקבילית היא מלבן.
 א. האם גיא צודק? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
 ב. האם רחלי צודקת? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

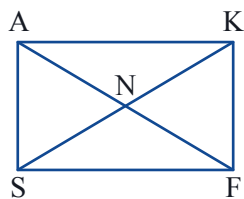


5. רשמו בכל סעיף, אם הטענה נכונה. אם כן, הסבירו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
 א. אם במרובע האלכסונים שווים, אז המרובע הוא מלבן.
 ב. אם במרובע בו האלכסונים שווים, יש זוג אחד של צלעות מקבילות, וזוג אחר של צלעות שוות, אז המרובע הוא מלבן.
 ג. אם במרובע בו האלכסונים שווים, יש זוג אחד של צלעות מקבילות ושוות, אז המרובע הוא מלבן.
 ד. אם במרובע האלכסונים חוצים זה את זה, אז המרובע הוא מלבן.

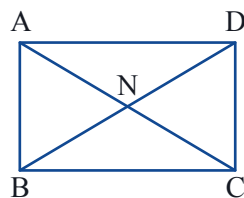




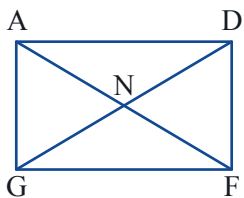
- 1.** ABCD מלבן, $BN = 6.5$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ.
- מצאו קטעים נוספים השווים ל- BN . הסבירו.
 - חשבו את אורך BC (היעזרו במשפט פיתגורס).
 - חשבו את שטח המלבן.
 - מצאו שני משולשים שווי שטח שאינם חופפים.



- 2.** AKFS מלבן, $SN = 7.5$ ס"מ.
- היחס בין האלכסון לצלע הקצרה של המלבן הוא: 5:3.
- חשבו את אורך צלעות המלבן.
 - חשבו את שטח המלבן.
 - מצאו שני משולשים שווי שטח שאינם חופפים.



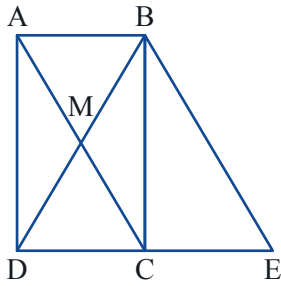
- 3.** ABCD מלבן, $BN = 5$ ס"מ.
- היחס בין אורכי צלעות המלבן הוא: 4:3.
- מצאו את אורכי צלעות המלבן.
 - חשבו את היקף המלבן.
 - מצאו שני משולשים שווי שטח שאינם חופפים.



- 4.** ADFG מלבן. $\angle FAD = 30^\circ$.
- חשבו את כל הזוויות.
 - רשמו את כל הקטעים השווים ל- AG .



- 5.** ADFG מלבן. $\angle FAD = 45^\circ$.
- שרטטו את המלבן וחשבו את כל הזוויות.
 - רשמו את כל הקטעים השווים ל- AG .
 - איזה מלבן הוא ADFG? הסבירו.

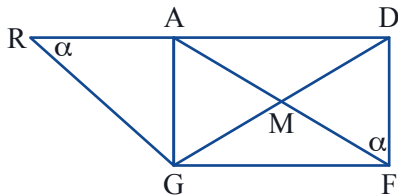


6. ABCD מלבן, CABE מקבילית.

א. מצאו את כל הקטעים השווים ל-DM. הסבירו.

ב. מצאו את כל הקטעים הגדולים פי 2 מ-DM. הסבירו.

ג. מצאו זוויות שוות במשולש $\triangle DBE$.



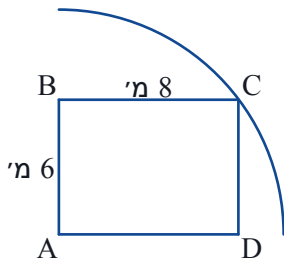
7. ADFG מלבן. AR המשך של AD.

$$\sphericalangle DFM = \sphericalangle ARG = \alpha$$

א. הביעו באמצעות α את הזוויות שבשרטוט.

ב. מצאו בשרטוט זוגות של משולשים דומים. הסבירו.

ג. האם $\sphericalangle RGD$ קטנה מ- 90° , שווה ל- 90° , או גדולה מ- 90° ? הסבירו.



8. נחזור לבעיית הפתיחה. נציג שתי הצעות נוספות להצבת הממטרה.

א. הצבת הממטרה בפינה, בנקודה A.

הממטרה מתיזה רבע עיגול שרדיוסו כאורך אלכסון המלבן.

חשבו את השטח שבו יש בזבז מים.

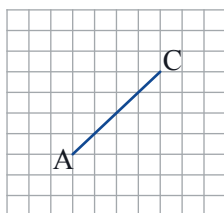
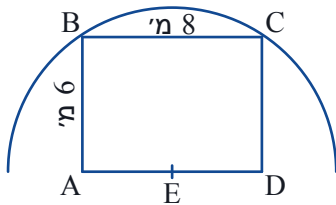
ב. הצבת הממטרה באמצע הצלע הארוכה של המלבן.

הממטרה מתיזה חצי עיגול שרדיוסו EC.

חשבו את השטח שבו יש בזבז מים.

ג. באיזו אפשרות (כולל זו שהוצגה במשימה 2 בשיעור) כדאי לחקלאי

לבחור כדי שכמות המים המבזבזים תהיה מינימאלית? הסבירו.

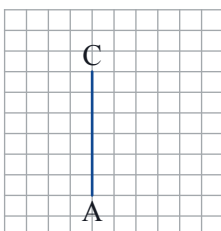


9. א. הקטע המשורטט הוא אלכסון של מרובע. העתיקו את השרטוט.

שרטטו אלכסון שני שווה למשורטט, כך שיתקבל מרובע שאינו מלבן.

ב. העתיקו שוב את השרטוט. שרטטו אלכסון שני שווה למשורטט, כך שיתקבל מלבן.

ג. באילו תכונות נעזרתם, כדי לשרטט את המלבן בסעיף ב?



10. א. הקטע המשורטט הוא אלכסון של מרובע. העתיקו את השרטוט.

שרטטו אלכסון שני שווה למשורטט, כך שיתקבל מרובע שאינו מלבן.

ב. העתיקו שוב את השרטוט.

שרטטו אלכסון שני שווה למשורטט, כך שיתקבל מלבן, שאינו ריבוע.

ג. באילו תכונות נעזרתם, כדי לשרטט את המלבן בסעיף ב?



11. קבעו מהו התנאי המספיק, עבור האלכסונים:

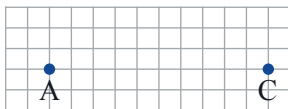
- א. כדי שמרובע יהיה מקבילית. ב. כדי שמקבילית תהיה מלבן. ג. כדי שמרובע יהיה מלבן.



12. א. שרטטו מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות שוות. כמה מרובעים כאלה אפשר לשרטט?
ב. האם אפשר לקבל מלבן? הסבירו.

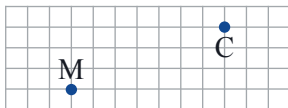


13. א. הנקודות A, C הן קודקודים נגדיים של מלבן.

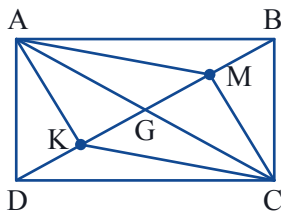


שרטטו מלבן מתאים על דף משובץ. כמה מלבנים כאלה אפשר לשרטט?
באילו תכונות נעזרתם כדי למצוא את הקודקודים האחרים?

ב. הנקודה C היא קודקוד של מלבן, M היא נקודת מפגש האלכסונים של המלבן.
שרטטו על דף משובץ מלבן מתאים. כמה מלבנים כאלה אפשר לשרטט?
באילו תכונות נעזרתם כדי למצוא את הקודקודים האחרים?



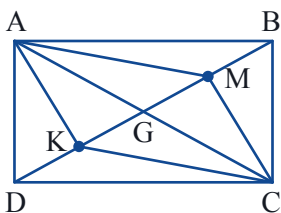
14. ABCD מלבן.



M אמצע GB, K אמצע GD.
מהו סוג המרובע AMCK? הוכיחו.
(היעזרו בתכונת אלכסוני המקבילית).



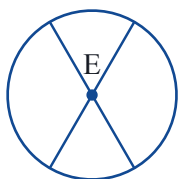
15. ABCD מקבילית.



M אמצע GB, K אמצע GD.
א. מהו סוג המרובע AMCK? הוכיחו.
ב. מה צריך להיות היחס בין אלכסוני המקבילית, כדי שמרובע AMCK יהיה מלבן? הסבירו.



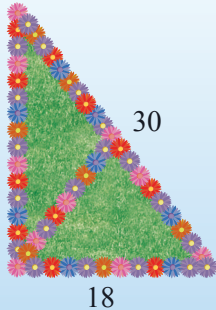
16. בשרטוט מעגל שמרכזו E.



א. שרטטו מרובע על-ידי חיבור קצות הקטרים.
מהו סוג המרובע שקיבלתם?
ב. האם חיבור הקצוות של שני קטרים במעגל יוצר תמיד מרובע מאותו סוג? הוכיחו.

שיעור 3. על משולשים ישרי זווית ומלבנים

תיכון ליתר במשולש ישר זווית; משולש שזוויותיו: 90° , 60° , 30°

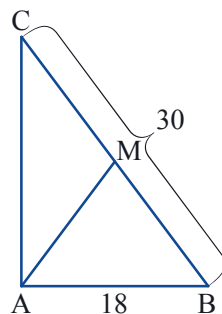
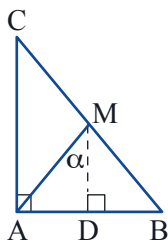
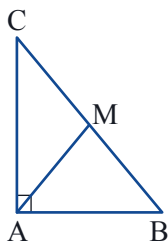


בגינה יש חלקת דשא בצורת משולש ישר זווית. אורך היתר 30 מ' ואורך אחד הניצבים 18 מ'. כדי לגוון את מראה החלקה, החליט הגנן לחלק אותה לשתי חלקות נפרדות. הוא חיבר את אמצע היתר עם קודקוד הזווית הישרה. סביב שתי החלקות שתל הגנן רצועה של פרחים. הגנן מעוניין לדעת את אורכה הכולל של רצועת הפרחים. האם אתם יכולים לעזור לו?

נעסוק בתכונות של משולשים ישרי זווית ונראה איך הן קשורות למלבנים.

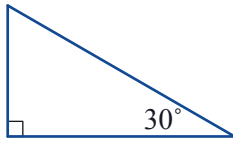
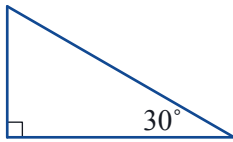


1. הגנן קיבל חלקה נוספת (צמודה לקיימת), זזה לקודמתה, כמו בשרטוט. MK הוא המשך של AM.
 - א. איזה מרובע הוא ABKG? הוכיחו.
 - ב. מה היחס בין אורך התיכון AM לאורך היתר GB? הסבירו.
 - ג. נסחו משפט מתאים למה שהוכחתם בסעיף ב.

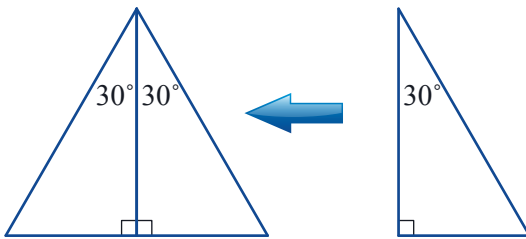


2. במשימה 1 הוכחנו את המשפט: במשולש ישר זווית אורך התיכון ליתר שווה למחצית אורך היתר.
 - א. רשמו מה נתון ומה צריך להוכיח, לפי השרטוט.
 - ב. נסו להוכיח בדרך אחרת: משורטט אנך DM. הסבירו מדוע $MD \parallel AC$.
 - ג. סמנו $\angle AMD = \alpha$. בטאו את הזוויות האחרות באמצעות α , והשלימו את ההוכחה.

3. לפניכם שרטוט של חלקת הדשא משאלת הפתיחה.
 - א. חשבו את אורך הקטע AM. הסבירו.
 - ב. חשבו את אורכה הכולל של רצועת הפרחים.



4. בשרטוט משולש ישר זווית שאחת מהזוויות החדות שלו היא 30° .
- השלימו את המשולש למלבן, כך שהיתר הוא אלכסון המלבן. שרטטו את האלכסון השני וחשבו את כל הזוויות שנוצרו.
 - מה היחס בין אורך הניצב, מול הזווית בת ה- 30° , לאורך היתר? נסחו טענה מתאימה.
 - הוכיחו את הטענה.

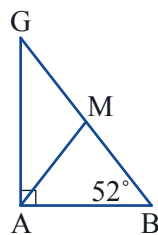


5. מאיה אמרה: אני הוכחתי אחרת את הטענה במשימה 4. השלמתי את המשולש הנתון למשולש שווה צלעות. היעזרו בשרטוטים והוכיחו את הטענה בדרך של מאיה.

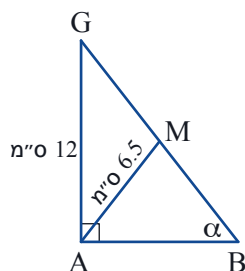


- במשולש ישר זווית, אורך התיכון ליתר שווה למחצית אורך היתר.
- במשולש ישר זווית בו אחת מהזוויות היא 30° , אורך הניצב מול זווית זו, שווה למחצית אורך היתר.

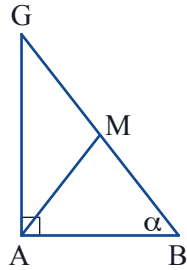
אוסף משימות



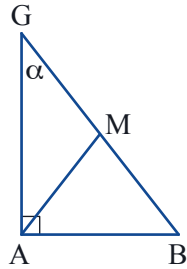
1. משולש ישר זווית. AM תיכון ליתר. $\triangle ABG$
- הסבירו מדוע משולש $\triangle AMB$ שווה שוקיים.
 - חשבו את כל הזוויות בשרטוט.



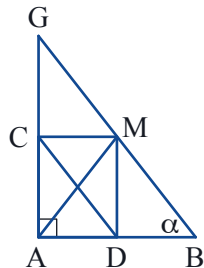
2. משולש ישר זווית. AM תיכון ליתר. $\triangle ABG$
- מהו סוג המשולש $\triangle AMB$? הסבירו.
 - חשבו את אורך GB.
 - חשבו את שטח משולש $\triangle AGB$.
 - מה שטח משולש $\triangle AMB$?



- 3.** משולש ישר זווית. AM תיכון ליתר.
 א. בטאו את כל הזוויות בשרטוט באמצעות α .
 ב. מהו סוג המשולשים בשרטוט?
 ג. מצאו בשרטוט שני משולשים שווי שטח. הסבירו.



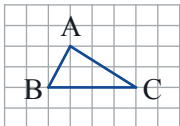
- 4.** משולש ישר זווית. AM תיכון ליתר.
 מה צריכה להיות זווית α , כדי ש-
 א. משולש AMB יהיה שווה צלעות.
 ב. משולש AMB יהיה ישר זווית.



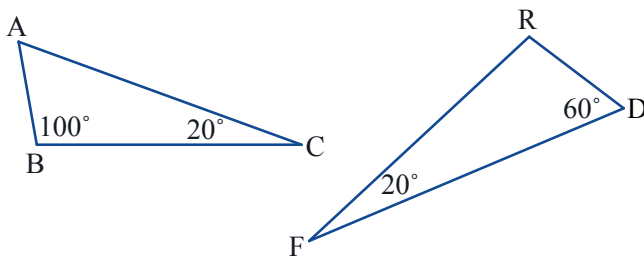
- 5.** משולש ישר זווית. AM תיכון ליתר.
 בתוך המשולש משרטט מלבן ADCM.
 א. מהו סוג המשולש AMB? הוכיחו.
 ב. הוכיחו כי MD תיכון במשולש AMB.
 ג. מהו סוג המרובע CDBM? הוכיחו.



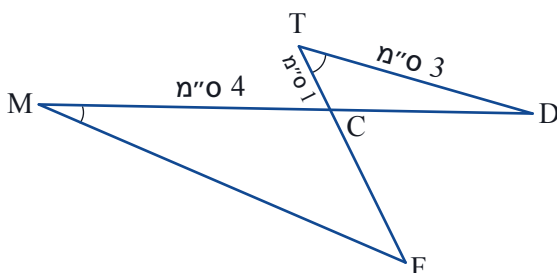
שומרים על כושר



- 1.** שרטטו על דף משובץ, שני משולשים הדומים למשולש ABC (ראו שרטוט).
 קשמו את יחס הדמיון בין כל אחד מהמשולשים ששרטטתם ובין משולש ABC שבשרטוט.



- 2.** לפניכם שני משולשים.
 האם המשולשים דומים? הסבירו



- 3.** בשרטוט שלפניכם שני משולשים.
 $\sphericalangle T = \sphericalangle M$
 א. הסבירו מדוע המשולשים דומים.
 ב. חשבו את יחס הדמיון.
 ג. חשבו את אורך הצלע MF.