



# יחידה 32: חקירת מערכת משוואות

## שיעור 1. פותרים חידות

ייצוג גאומטרי של מערכת משוואות

בכיתה של **עדינה**, כל זוג תלמידות חיברו יחד חידה. לפניכם החידה שחיברו **יהודית ושלומית**.



מהם שני המספרים שבחרו **יהודית ושלומית**?

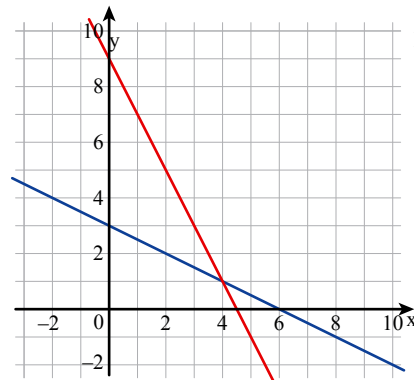
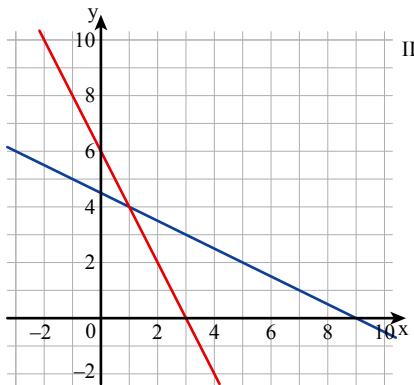
ניעזר במערכת משוואות כדי למצוא, אם אפשר, זוגות מספרים שנבחרו בחידות שונות.

פתרון יחיד

1. נתייחס לחידה שחיברו **יהודית ושלומית** במשימת הפתיחה.

א. קשמו מערכת משוואות מתאימה.

ב. באיזו מערכת צירים משורטטים הגרפים המתאימים למערכת המשוואות של החידה? הסבירו.



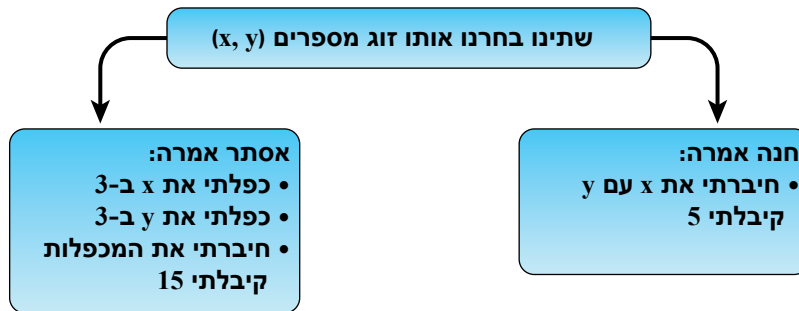
ג. מהם שני המספרים שבחרו **יהודית ושלומית**?



**תזכורת**

פתרון גרפי של מערכת משוואות בשני משתנים (מהמעלה הראשונה) הוא זוג סדור של מספרים המתאים לנקודת החיתוך של הישרים.

2. לפניכם החידה שחיברו **חנה ואסתר**.



א. לכל זוג מספרים, קבעו אם הוא יכול להיות פתרון לחידה. הסבירו.

- (-3, 8)      (1, -4)      (1.5, 3.5)      (7, -2)      (2, 3)

ב. רשמו שני פתרונות נוספים לחידה.



3. **תמר ולאה** פתרו את מערכת המשוואות המתאימה לחידה ששחיברו **חנה ואסתר**.

$$\begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 3y = 15 \\ x + y = 5 \quad / \cdot 3 \\ \hline 3x + 3y = 15 \\ - \quad 3x + 3y = 15 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array}$$

א. **תמר** פתרה את המערכת בדרך אלגברית.

בחרו את התשובה המתאימה למשמעות הפתרון שקיבלה **תמר**.

- זוג המספרים (0, 0)
- אין פתרון
- כל זוג מספרים
- פתרונות רבים אבל לא כל זוג של מספרים

ב. **לאה** פתרה את המערכת בעזרת הייצוג הגאומטרי.

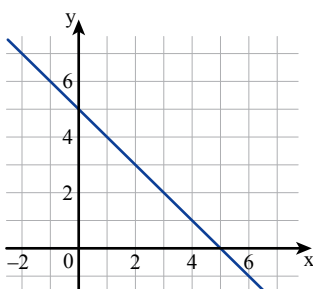
היא שרטטה במערכת צירים ישרים המתאימים למערכת המשוואות וקיבלה רק ישר אחד.

בחרו את התשובה המתאימה למשמעות הפתרון שקיבלה **לאה**.

- אין פתרון
- כל הנקודות במישור
- רק הנקודות שעל הישר
- שבגרף

ג. סכמו את מסקנותיכם:

אילו שני מספרים יכולים להיות תשובה לחידה שחיברו **חנה ואסתר**?





לפעמים, במערכת משוואות בשני משתנים מהמעלה הראשונה, שתי המשוואות מתארות אותו קשר בין המשתנים.  
במקרים אלה:

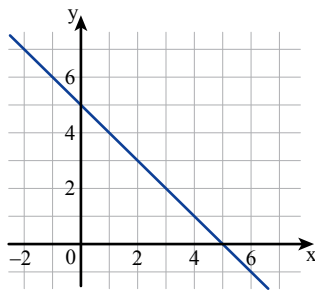
**זוגות:**

במשימה 3א, **תמר** פתרה את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$$

היא קיבלה את **הזהות**  $0 = 0$   
הפתרון: **כל הזוגות הסדורים**  $(x, y)$   
המקיימים  $x + y = 5$

במשימה 3ב, **לאה** שרטטה גרף מתאים למערכת המשוואות.



התקבל **ישר אחד**.  
הפתרון: **כל זוגות המספרים** המתאימים לנקודות שעל הישר שבשרטוט.

• אם פותרים את מערכת המשוואות בדרך אלגברית, מתקבלת **זהות** בין שני האגפים.

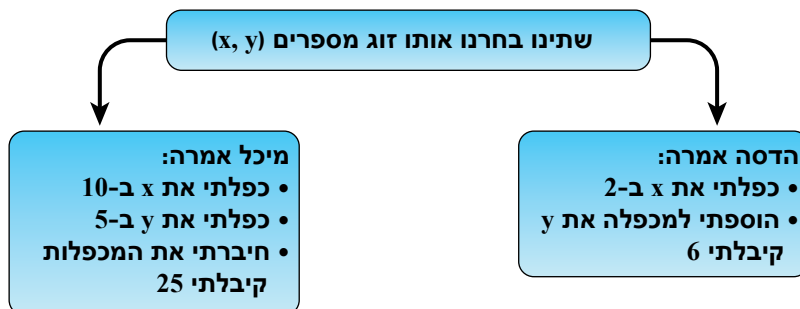
פתרון המערכת הוא **כל הזוגות הסדורים** של מספרים המקיימים את הקשר בין שני המשתנים.

• אם פותרים את המערכת בעזרת הייצוג הגאומטרי, הישרים המתאימים לשתי המשוואות **מתלכדים** לישר אחד.

פתרון המערכת הוא **כל זוגות המספרים** המתאימים לנקודות שעל הישר.

ללא פתרון

4. לפניכם החידה שחיברו **הדסה ומיכל**.



- א. פתרו את החידה בדרך אלגברית.  
ב. פתרו את החידה בעזרת הייצוג הגאומטרי (שרטוט הישרים).

5. **שושי וחני** פתרו את מערכת המשוואות המתאימה לחידה שחיברו **הדסה ומיכל**.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 10x + 5y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \quad / \cdot 5 \\ \underline{10x + 5y} &= \underline{25} \\ 10x + 5y &= 30 \\ \underline{10x + 5y} &= \underline{25} \\ 0x + 0y &= 5 \\ 0 &= 5 \end{aligned}$$

א. **שושי** פתרה את המערכת בדרך אלגברית.

בחרו את התשובה המתאימה למשמעות הפתרון שקיבלה **שושי**.

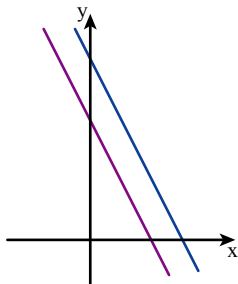
- זוג המספרים (0, 5)
- אין פתרון
- כל זוג מספרים
- פתרונות רבים אבל לא כל זוג של מספרים

ב. **חני** פתרה את המערכת בעזרת הייצוג הגאומטרי.

היא שרטטה במערכת צירים ישרים המתאימים למערכת המשוואות. מה משמעות הפתרון של **חני**?

ג. סכמו את מסקנותיכם:

אילו שני מספרים יכולים להיות תשובה לחידה שחיברו **הדסה ומיכל**?



לפעמים, במערכת משוואות בשני משתנים (מהמעלה הראשונה), כל אחת מהמשוואות מתארת קשר שונה בין המשתנים, ושני הקשרים של שתי המשוואות אינם יכולים להתקיים ביחד. במקרים אלה:

**דוגמה:**

במשימה 5א, **שושי** פתרה את מערכת המשוואות:

$$2x + y = 6$$

$$\underline{10x + 5y = 25}$$

$$0 = 5 \quad \text{היא קיבלה}$$

הפתרון: **אין** זוגות סדורים המתאימים לשתי המשוואות.

למערכת **אין פתרון**.

במשימה 5ב, **חני** שרטטה גרף מתאים למערכת המשוואות. התקבלו שני **ישרים מקבילים**.

הפתרון: **אין** זוג מספרים המקיים את שתי המשוואות. למערכת **אין פתרון**.

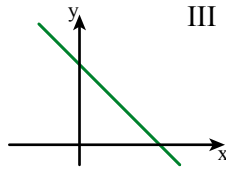
- אם פותרים את מערכת המשוואות בדרך אלגברית, מקבלים מספרים שונים בשני האגפים.

למערכת המשוואות **אין פתרון**.

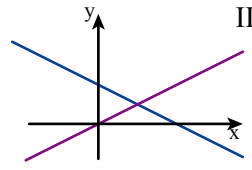
- אם פותרים את המערכת בעזרת הייצוג הגאומטרי, הישרים המתאימים לשתי המשוואות **מקבילים** זה לזה. לישרים **אין נקודה משותפת**, ולכן למערכת **אין פתרון**.

6. בכל סעיף, פתרו את מערכת המשוואות, והתאימו לה ייצוג גאומטרי.

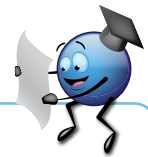
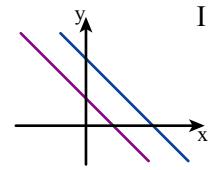
א. 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$



ב. 
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

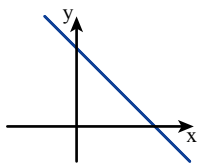


א. 
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$



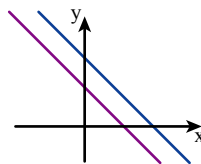
לייצוג הגאומטרי של מערכת משוואות בשני משתנים מהמעלה הראשונה שלושה מצבים אפשריים.

**הישרים מתלכדים לישר אחד**



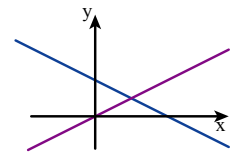
פתרון מערכת המשוואות הוא אינסוף זוגות המספרים המתאימים לנקודות שעל הישר.

**הישרים מקבילים**



למערכת המשוואות אין פתרון. אין לישרים נקודה משותפת.

**הישרים נחתכים**



למערכת המשוואות פתרון יחיד, והוא הזוג הסדור המתאים לנקודת החיתוך.



## אוסף משימות



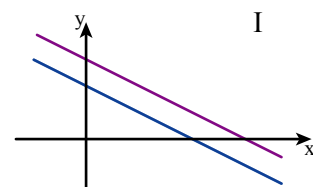
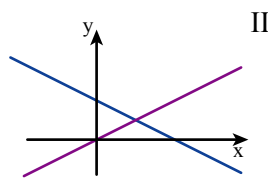
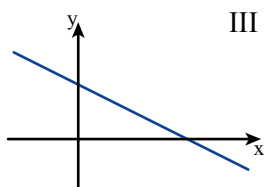
1. לכל סעיף, התאימו ייצוג גאומטרי.

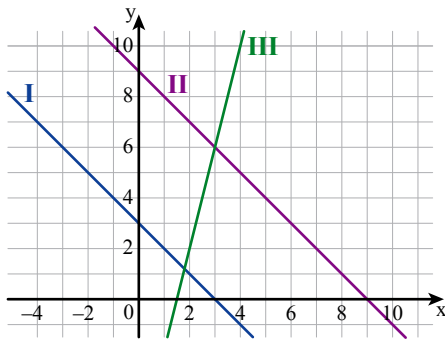
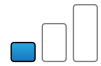
א. למערכת המשוואות פתרון יחיד.

ב. למערכת המשוואות אין פתרון.

ג. למערכת המשוואות אינסוף פתרונות.

ד. הפתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור.

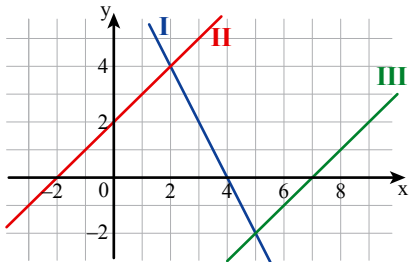




2. הישרים שבשרטוט מתארים את המשוואות:

$$4x - y = 6 \quad x + y = 3 \quad x + y = 9$$

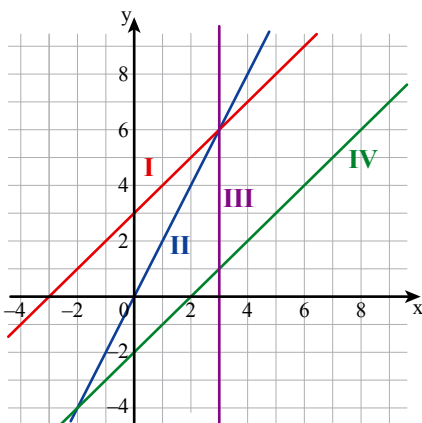
- התאימו משוואות לישרים.
- הרכיבו מערכת משוואות שיש לה פתרון יחיד. מהו הפתרון?
- הרכיבו מערכת משוואות שאין לה פתרון.



3. הישרים שבשרטוט מתארים את המשוואות:

$$2x + y = 8 \quad x - y = 7 \quad x - y + 2 = 0$$

- התאימו משוואות לישרים.
- הרכיבו מערכת משוואות שיש לה פתרון יחיד. מהו הפתרון?
- הרכיבו מערכת משוואות שאין לה פתרון.



4. הישרים שבשרטוט מתארים את המשוואות:

$$x = 3 \quad x - y = 2 \quad x - y + 3 = 0$$

$$3x - 3y = 6 \quad 2x - y = 0$$

- התאימו משוואות לישרים.
- הרכיבו מערכת משוואות שיש לה פתרון יחיד. מהו הפתרון?
- הרכיבו מערכת משוואות שאין לה פתרון.
- הרכיבו מערכת משוואות שיש לה אינסוף פתרונות.



5. בכל סעיף, שרטטו גרפים המתארים את מערכת המשוואות, וקבעו אם הפתרון הוא זוג סדור, כל הנקודות הנמצאות על ישר אחד או אין פתרון למערכת.

א.  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$  ג.

ב.  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

א.  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$



6. בכל סעיף, שרטטו גרפים המתארים את מערכת המשוואות, וקבעו אם הפתרון הוא זוג סדור, כל הנקודות הנמצאות על ישר אחד או אין פתרון למערכת.

א.  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$  ג.

ב.  $\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x + 5y = 12 \end{cases}$

א.  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

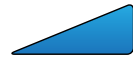


7. פתרו.

א.  $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$  ג.

ב.  $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

א.  $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$



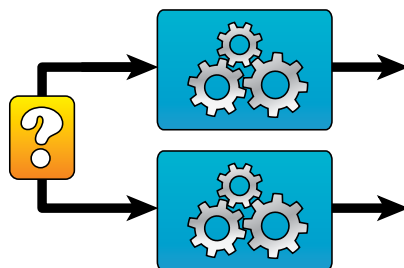
8. נתונה המשוואה  $x - y = 5$

בכל סעיף, הוסיפו משוואה שנייה כך שהייצוג הגאומטרי של מערכת המשוואות הוא:

א. שני ישרים מקבילים ג.

ב. שני ישרים נחתכים

ג. שני ישרים מתלכדים





## שיעור 2. קשרים בין ייצוגים במערכת משוואות

### מספר הפתרונות של מערכת משוואות

לפניכם שלוש מערכות של משוואות בשני משתנים (מהמעלה הראשונה).

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \text{ .III} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases} \text{ .II} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases} \text{ .I}$$

**שולמית** אמרה: אני יכולה לקבוע את מספר הפתרונות של כל מערכת, בלי לפתור. מהם השיקולים של **שולמית**?

**נמשיך לחקור את שלושת המצבים האפשריים של מערכות משוואות.**

- נתייחס למערכות המשוואות במשימת הפתיחה. במערכות אלה כל המשתנים נמצאים באגף אחד, ובאגף השני נמצא מספר.
  - במערכת I: המשוואה השנייה התקבלה על-ידי כפל אגפי המשוואה הראשונה ב-3. האם שתי המשוואות מתארות אותו קשר? הסבירו. האם למערכת I פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון? הסבירו.
  - במערכת II: אגף המשתנים **בלבד** של המשוואה השנייה התקבל על-ידי כפל אגף המשתנים של המשוואה הראשונה ב-3. האם למערכת II פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון? הסבירו.
  - במערכת III: אגף המשתנים של משוואה אחת אינו כפולה של אגף המשתנים של המשוואה האחרת. האם למערכת III פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון? הסבירו.

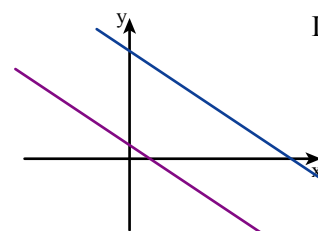
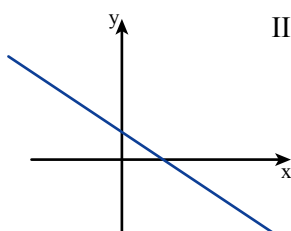
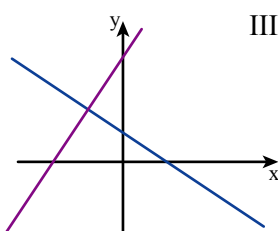
- בכל סעיף, קבעו את מספר הפתרונות של המערכת (אין פתרון, פתרון יחיד, אינסוף פתרונות).

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \text{ .ג} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \text{ .א}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases} \text{ .ד} \quad \begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \text{ .ב}$$

- לפניכם שלוש מערכות של משוואות ושלושה ייצוגים גאומטריים (בעזרת גרפים). לכל מערכת, קבעו את מספר הפתרונות, והתאימו ייצוג גאומטרי.

$$\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases} \text{ .ג} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 10 \end{cases} \text{ .ב} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases} \text{ .א}$$





ראינו כי למערכת של שתי משוואות בשני משתנים (מהמעלה הראשונה) ייתכן שיהיו: פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או לא יהיה פתרון למערכת. כדי להבחין בין המקרים השונים, מסדרים את המשוואות, כך שבאגף אחד נמצאים כל המשתנים ובאגף השני נמצא מספר.

3/2/1/ת: במשימה 3,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 & \text{במערכת} \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$$

המשוואה השנייה מתקבלת מכפל ב-3 של אגפי המשוואה הראשונה.

שתי המשוואות מתארות אותו קשר.

לכן, יש אינסוף פתרונות והם כל הזוגות הסדורים המקיימים  $2x + 3y = 4$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 & \text{במערכת} \\ 6x + 9y = 10 \end{cases}$$

אגף המשתנים (בלבד) במשוואה השנייה מתקבל על-ידי כפל ב-3 של אגף המשתנים במשוואה הראשונה. שתי המשוואות מתארות קשרים שונים שאינם יכולים להתקיים ביחד, עבור אותו זוג מספרים. לכן, אין פתרון למערכת.

$$\begin{cases} -3x + 2y = 7 & \text{במערכת} \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$$

אגף המשתנים של משוואה אחת אינו כפולה של אגף המשתנים של המשוואה האחרת. שתי המשוואות מתארות קשרים שונים המתקיימים ביחד עבור זוג המספרים  $(-1, 2)$  בלבד. לכן פתרון המערכת הוא  $(-1, 2)$ .

- אם אפשר לקבל משוואה אחת על-ידי כפל האגפים של המשוואה השנייה באותו מספר (שאינו אפס), אז שתי המשוואות מתארות אותו קשר. כלומר, המשוואה השנייה אינה נותנת מידע נוסף. כל הזוגות הסדורים המקיימים כל אחת משתי המשוואות הם פתרונות אפשריים. למערכת אינסוף פתרונות.

הייצוג הגאומטרי הוא שני ישרים מתלכדים.

- אם אפשר לקבל את אגף המשתנים של משוואה אחת על-ידי כפל אגף המשתנים של המשוואה השנייה באותו מספר (שאינו אפס), אז שתי המשוואות מתארות קשרים שאינם יכולים להתקיים ביחד. למערכת אין פתרון.

הייצוג הגאומטרי הוא שני ישרים מקבילים.

- אם אגף המשתנים של משוואה אחת אינו כפולה של אגף המשתנים במשוואה השנייה, אז שתי המשוואות מתארות קשרים שונים המתקיימים יחד עבור זוג מספרים. למערכת פתרון יחיד (זוג סדור אחד).

הייצוג הגאומטרי הוא שני ישרים נחתכים. פתרון המערכת הוא נקודת החיתוך של הישרים.

4. בכל סעיף, קבעו כמה פתרונות למערכת המשוואות (פתרון יחיד, אין פתרון, כל הנקודות הנמצאות על ישר אחד). הסבירו.

א.  $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$       ג.  $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 4 \end{cases}$       ה.  $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x - 6y = 7.5 \end{cases}$

ב.  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$       ד.  $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$       ו.  $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 6 = 2y \end{cases}$

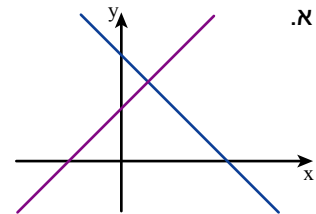
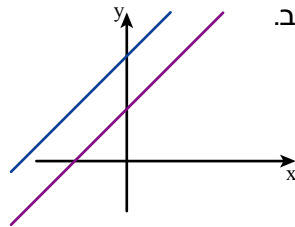
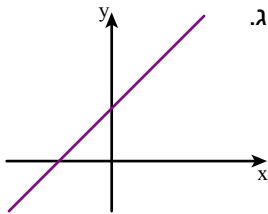
5. נתונה מערכת משוואות:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 6x + \square \cdot y = \square \end{cases}$$

- בכל סעיף, העתיקו את המערכת, ורשמו מספרים מתאימים במקומות הריקים.
- א. למערכת אינסוף פתרונות      ב. למערכת אין פתרון      ג. למערכת פתרון יחיד
- קבעו כמה אפשרויות יש.



6. בכל סעיף, רשמו מערכת משוואות מתאימה.



## אוסף משימות



1. בכל סעיף, קבעו בלי לפתור אם למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון למערכת. הסבירו.

א.      ג.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 20 \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases}$$

א.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$$



2. בכל סעיף, קבעו כמה פתרונות למערכת המשוואות (פתרון יחיד, אינסוף נקודות הנמצאות על ישר אחד, או אין פתרון למערכת), ושרטטו סקיצה מתאימה.

א.      ג.

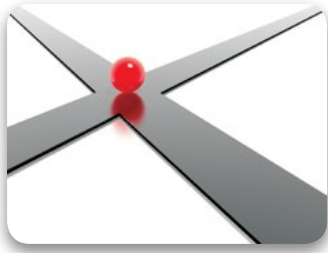
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x + 5y = 12 \end{cases}$$

א.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$



3. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + \square \cdot y = \square \end{cases}$$

- בכל סעיף, העתיקו והשלימו מספרים מתאימים במקומות הריקים. פתרו את המערכת שרשמתם, ובדקו תשובתכם.
- א. למערכת אינסוף פתרונות המתאימים לישר אחד.
- ב. למערכת אין פתרון.
- ג. למערכת פתרון יחיד. מהו הפתרון?



4. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 8x + 6y = \square \end{cases}$$

- א. איזה מספר יש לרשום במקום הריק, אם הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים מקבילים.
- ב. איזה מספר יש לרשום במקום הריק, אם הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא ישר אחד.
- ג. **יהודית** אמרה: לא ייתכן ששתי המשוואות מתארות שני ישרים הנחתכים בנקודה אחת. האם **יהודית** צודקת? הסבירו.



5. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 5x - 3y = 4 \\ 10x - 6y = \square \end{cases}$$

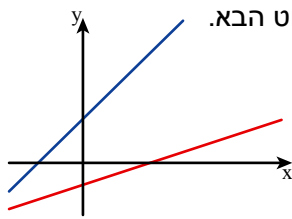
- בכל סעיף, העתיקו והשלימו מספר מתאים במקום הריק, אם אי-אפשר, הסבירו.
- א. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים מקבילים.
- ב. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא ישר אחד.
- ג. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים נחתכים.



6. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ \square \cdot x - 2y = 6 \end{cases}$$

- בכל סעיף, קבעו כמה אפשרויות שונות יש למילוי המקום הריק. הסבירו.
- א. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים נחתכים.
- ב. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים מתלכדים.
- ג. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים מקבילים.



**7. בתיה** פתרה מערכת משוואות בעזרת הייצוג הגאומטרי. היא קיבלה את השרטוט הבא.  
**בתיה** אמרה: למערכת אין פתרון.  
 האם היא צודקת? הסבירו.



**8. בכל סעיף, פתרו את מערכת המשוואות.**

א.  $y > 0, x > 0 \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4 = y + 9 \end{cases}$

א.  $y < 5, x > 0 \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

ד.  $y > 0, x > 0 \begin{cases} 5x = y + 10 \\ 6x = 5y - 7 \end{cases}$

ב.  $x$  ו- $y$  מספרים טבעיים  $\begin{cases} 2y = 3x - 1 \\ 5x + 4y = 42 \end{cases}$

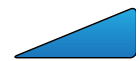


**9. נתונה המשוואה:**  $2x - 5y = 18$

בכל סעיף, בחרו משוואה מתאימה מתוך המשוואות הבאות.

$x - 2\frac{1}{2}y = 9$	$5y + 18 = 2x$	$4x - 10y = 9$	$x + 5y = 3$
$4x - 10y = 5$	$x - 2\frac{1}{2}y = 18$	$2x - 3y = 18$	$4x - 10y = 36$
$\frac{2}{5}x - y = 3\frac{3}{5}$	$2x - y = 18$	$3y = 18$	$5y - 2x = 18$

- א. המשוואה שבחרתם והמשוואה הנתונה יוצרות מערכת שאין לה פתרון.  
 ב. המשוואה שבחרתם והמשוואה הנתונה יוצרות מערכת שיש לה אינסוף פתרונות.  
 ג. המשוואה שבחרתם והמשוואה הנתונה יוצרות מערכת שיש לה פתרון יחיד.



**10. העתיקו והשלימו מספרים חסרים במקומות הריקים כך שתתקבל מערכת שפתרונה (2, 1)**



$$\begin{cases} 2x - \square \cdot y = -6 \\ \square \cdot x + \square \cdot y = 6 \end{cases}$$

כמה אפשרויות יש? הסבירו.

## שיעור 3. כושר, כושר, כושר...

מפשטים ופותרים מערכות משוואות בשני משתנים



פתרון מערכת המשוואות  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$  הוא  $(1, 2)$ . בדקו.

באיזה סעיף למערכת אותו פתרון כמו למערכת הנתונה? הסבירו.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 2\frac{1}{2} \\ 9x - 3y = 3 \end{cases} \text{ א.} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -3x + y = -1 \end{cases} \text{ ג.}$$

נפתור מערכות של משוואות על-ידי פישוט או על-ידי ראייה תבניתית.

1. נתונה מערכת המשוואות  $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$  שפתרונה  $(4, 1)$

באיזה סעיף למערכת אותו פתרון כמו למערכת הנתונה?  
איזו מערכת יש צורך לפתור? הסבירו.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 14 \\ 6x - 4y = 20 \end{cases} \text{ א.} \quad \begin{cases} 2x + 6y = 18 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} 2x + 6y = 14 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases} \text{ ג.}$$

## מפשטים ופותרים

2. בכל סעיף, פשוטו וקבעו מהו סוג הפתרון של מערכת המשוואות (פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אין פתרון).

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{5} - \frac{x-3}{2} = 1 \\ 2(x-5) - 2(2y-1) = 2 \end{cases} \text{ זלזלה:}$$

נפשט את המשוואה השנייה:

$$2(x-5) - 2(2y-1) = 2$$

$$2x - 10 - 4y + 2 = 2$$

$$2x - 4y = 10 \quad \text{נקבל:}$$

נפשט את המשוואה הראשונה:

$$\frac{2x+y}{5} - \frac{x-3}{2} = 1 \quad / \cdot 10$$

$$4x + 2y - 5x + 15 = 10$$

$$-x + 2y = -5 \quad \text{נקבל:}$$

המשוואה השנייה מתקבלת על-ידי כפל ב-  $(-2)$  של אגפי המשוואה הראשונה,

למערכת יש אינסוף פתרונות שהם כל הזוגות הסדורים שהם הפתרונות של אחת המשוואות.

$$\begin{cases} (x-5)(y-2) = y(x+2) \\ (x+2)(y-5) = (x-1)(y-1) + 3 \end{cases} \text{ א.} \quad \begin{cases} \frac{2x+y}{3} - \frac{x+1}{2} = 1 \\ 10 + 3(x+y) = 5(y+5) \end{cases} \text{ א.}$$

$$\begin{cases} (x+4)(y+7) = (x+3)(y+4) \\ (x+5)(y+2) = (x+4)(y-1) - 2 \end{cases} \text{ ד.} \quad \begin{cases} 3(x+y) - 5 = 10 - 4x \\ 3(4x+3y) - 20 = 25 - 9x \end{cases} \text{ ב.}$$

3. לפיכך שתי מערכות של משוואות בשני משתנים.

$$\begin{cases} x + 2y = 7 & \text{(II)} \\ 2x - y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(x + y) - (y + 3) = 2(x + 2) & \text{(I)} \\ 2(x - y) + 5 = 4 - y \end{cases}$$

א. פשטו את המשוואות במערכת I.

ב. מה הפתרון של כל מערכת משוואות?



4. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 3(x - 2) + 4(y - 1) = 5 - (x + y) \\ 5(y - x) - 1 = 3(4 - 3x) \end{cases}$$

פשטו ושרטטו סקיצה של התיאור הגרפי של המערכת.

### ראייה תבניתית

5. נתונה מערכת המשוואות  $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$  שפתרונה (5, 1).

בכל סעיף, היעזרו בפתרון המערכת הנתונה ופתרו.

א.  $\begin{cases} 2(x - 1) + 3(y - 1) = 13 \\ 3(x - 1) - 4(y - 1) = 11 \end{cases}$      א.  $\begin{cases} 2(3x - 1) + 3(5y - 4) = 13 \\ 3(3x - 1) - 4(5y - 4) = 11 \end{cases}$      ג.

ב.  $\begin{cases} 2(x + 3) + 3(y - 2) = 13 \\ 3(x + 3) - 4(y - 2) = 11 \end{cases}$      ב.  $\begin{cases} 2 \cdot \frac{(x-1)}{3} + 3 \cdot \frac{(y+5)}{2} = 13 \\ 3 \cdot \frac{(x-1)}{3} - 4 \cdot \frac{(y+5)}{5} = 11 \end{cases}$      ד.



- בדרך כלל, קל יותר לפתור מערכת משוואות לאחר שמפשטים כל אחת מהמשוואות. כדאי לסדר משוואה כך שכל המשתנים יהיו באגף אחד, ובאגף השני יהיה מספר.

דוגמה: במשימה 4, לאחר פישוט וסידור המשוואות מתקבלת המערכת:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 15 \\ 4x + 5y = 13 \end{cases}$$

שתי המשוואות מתארות קשרים שאינם יכולים להתקיים ביחד, ולמערכת אין פתרון.

- לפעמים אפשר לזהות מבנה קבוע של כל המערכות, ואז לא כדאי לפשט. דוגמה: במשימה 5, לכל המערכות מבנה זהה למבנה של המערכת הנתונה:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$$

לכן, אפשר להיעזר בפתרון המערכת הנתונה ( $x = 5$  ו- $y = 1$ ) כדי לפתור את המערכות האחרות.

למשל, בפתרון המערכת

$$\begin{cases} 2(x - 1) + 3(y - 1) = 13 \\ 3(x - 1) - 4(y - 1) = 11 \end{cases}$$

מקבלים:  $x - 1 = 5$  ולכן,  $x = 6$

$y - 1 = 1$  ולכן,  $y = 2$



אוסף משימות



1. נתונה מערכת המשוואות 
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$$
 שפתרונה הוא (7, 1). בדקו.

בכל סעיף, היעזרו בפתרון המערכת הנתונה ומצאו את הפתרון של המערכת.

א. 
$$\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$$
      ב. 
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 6x - 2y = 40 \end{cases}$$
      ג. 
$$\begin{cases} 5x - 15y = 20 \\ 9x - 3y = 60 \end{cases}$$



2. נתונה מערכת המשוואות 
$$\begin{cases} 2y - x = 1 \\ 10y + 3x = 29 \end{cases}$$
 שפתרונה הוא (3, 2). בדקו.

בכל סעיף, היעזרו בפתרון המערכת הנתונה ומצאו את הפתרון של המערכת.

א. 
$$\begin{cases} 4y - 2x = 2 \\ 10y + 3x = 29 \end{cases}$$
      ב. 
$$\begin{cases} 8y - 4x = 4 \\ -10y - 3x = -29 \end{cases}$$
      ג. 
$$\begin{cases} 6y - 3x = 3 \\ 5y + 1.5x = 14.5 \end{cases}$$



3. נתונה מערכת המשוואות 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ -2x + 5y = -12 \end{cases}$$
 שפתרונה הוא (1, -2). בדקו.

בכל סעיף, היעזרו בפתרון המערכת הנתונה ומצאו את הפתרון של המערכת.

א. 
$$\begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases}$$
      ב. 
$$\begin{cases} 6y - 9x = -21 \\ 10y - 4x = -24 \end{cases}$$
      ג. 
$$\begin{cases} 1.5x - y = 3.5 \\ x - 2.5y = 6 \end{cases}$$



4. כתבו מערכת משוואות שיש לה אותו פתרון כמו למערכת: 
$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases}$$



5. בכל סעיף, פתרו את מערכת המשוואות.

א. 
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y + 1 = 8 \end{cases}$$
      ב. 
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = x + 4 \end{cases}$$
      ג. 
$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y - x - 1 = 6 \end{cases}$$



6. בכל סעיף, פתרו את מערכת המשוואות.

$$\begin{cases} 5 - (2x + 3) = y + 2 \\ 5 - 2(3x + 2) = 9y + 13 \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} 7(x + 3) + 3y = 27 \\ 5(1 - y) - x = 8(x + 1) + y \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} 3(x + y) + y = 7 \\ 2(x - y) + 3y = 7 \end{cases} \quad \text{א.}$$



7. בכל סעיף, פתרו את מערכת המשוואות.

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} + \frac{y+1}{3} = 2.5 \\ 2(x-4) - 5(y-3) = x+y \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} \frac{3x+2y+2}{6} = \frac{2x-y+3}{2} \\ 2x+3y+11=0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} \frac{3x+y}{2} - x = -4 \\ 2y-3x=9 \end{cases} \quad \text{א.}$$



8. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

א. פתרו את המערכת.

ב. היעזרו בפתרון המערכת הנתונה, ופתרו את המערכות הבאות.

$$\begin{cases} 2(x-1) + 5(y-1) = 12 \\ 3(x-1) + 4(y-1) = 11 \end{cases} \quad \text{(ii)} \quad \begin{cases} 2(x+1) + 5(y+1) = 12 \\ 3(x+1) + 4(y+1) = 11 \end{cases} \quad \text{(i)}$$



9. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 4x + 5y = 15 \end{cases}$$

א. פתרו את המערכת.

ב. היעזרו בפתרון המערכת הנתונה, ופתרו את המערכות הבאות.

$$\begin{cases} 2(x-3) - 3(y+1) = 13 \\ 4(x-3) + 5(y+1) = 15 \end{cases} \quad \text{(ii)} \quad \begin{cases} 2(x+1) - 3(y+2) = 13 \\ 4(x+1) + 5(y+2) = 15 \end{cases} \quad \text{(i)}$$



**10.** נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 10y + 3x = -10 \end{cases}$$

א. פתרו את המערכת.

ב. היעזרו בפתרון המערכת הנתונה, ופתרו את המערכות הבאות.

$$\begin{cases} 2(2y - 1) - (x + 3) = 6 & \text{(ii)} \\ 10(2y - 1) + 3(x + 3) = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(y + 1) - (x + 2) = 6 & \text{(i)} \\ 10(y + 1) + 3(x + 2) = -10 \end{cases}$$



**11.** א. מצאו את הפתרון של כל מערכת, והסבירו את המשמעות בייצוג הגאומטרי.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{4} + \frac{y+2}{5} = 1 & \text{(ii)} \\ 4x - 3y + 13 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x + 2)(y - 1) = xy + 5 & \text{(i)} \\ (x - 1)(y + 2) = xy - 7 \end{cases}$$

ב. היעזרו בפתרון המערכות בסעיף א, ומצאו בלי לפתור את הפתרון של המערכות הבאות.

$$\begin{cases} 4x - 3y + 13 = 0 & \text{(ii)} \\ (x - 1)(y + 2) = xy - 7 \end{cases} \quad \begin{cases} (x + 2)(y - 1) = xy + 5 & \text{(i)} \\ \frac{x+1}{4} + \frac{y+2}{5} = 1 \end{cases}$$





## שיעור 4. מציאת חוקיות במערכת משוואות

מיכל, הדסה, יהודית ולאה פתרו ארבע מערכות של משוואות.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 5y = 4 \end{cases} \quad \text{המערכת של יהודית:} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \quad \text{המערכת של מיכל:}$$

$$\begin{cases} 9x + 10y = 11 \\ -2x - 3y = -4 \end{cases} \quad \text{המערכת של לאה:} \quad \begin{cases} 8x + 9y = 10 \\ 5x + 4y = 3 \end{cases} \quad \text{המערכת של הדסה:}$$

נפתור ונגלה חוקיות מעניינת במערכות של משוואות.

במשימות 1 - 4 נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה.

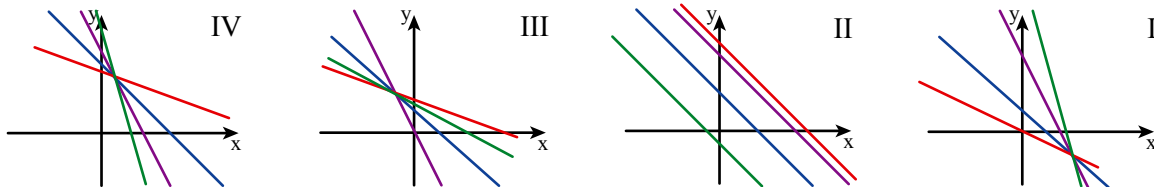
1. א. התבוננו במערכות המשוואות שבמשימת הפתיחה, ונסו לגלות תכונה משותפת לכל המערכות.  
 ב. פתרו את המערכות.  
 ג. מה משותף לארבע המערכות?

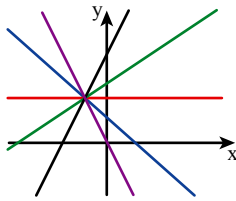
2. **איילה** הציצה בפתרונות של חברותיה ורשמה את המערכת:
 
$$\begin{cases} 99x + 100y = 101 \\ 99x + 98y = 97 \end{cases}$$

**איילה** אמרה: הפתרון של מערכת המשוואות שלי זהה לפתרון המערכות שלכן.  
 האם **איילה** צודקת? הסבירו.

3. **רותי** אמרה: בכל משוואה, שלושה מספרים עוקבים המסודרים בסדר עולה או בסדר יורד.  
 א. האם **רותי** צודקת? הסבירו.  
 ב. רשמו מערכת משוואות משלכם המקיימת את התכונה שציינה **רותי**.  
 בדקו אם פתרון המערכת שרשמתם זהה לפתרון המערכות שבמשימת הפתיחה.

4. באיזה שרטוט הגרפים מתאימים למשוואות ממשימת הפתיחה? הסבירו.





האינו כי  $(-1, 2)$  הוא פתרון של כל משוואה מהצורה  $ax + by = c$  כאשר  $a, b, c$  הם מספרים עוקבים.

הסבר: נרשום את המשוואה כך:  $ax + (a + 1)y = a + 2$

נציב  $x = -1, y = 2$  במשוואה ונקבל:  $-a + 2(a + 1) = a + 2$

לאחר פישוט נקבל זהות  $a + 2 = a + 2$



5. המספרים  $a, b, c$  הם מספרים עוקבים.

המספרים  $d, e, f$  הם מספרים עוקבים.

הסבירו מדוע פתרון המערכת  $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$  הוא  $(-1, 2)$

6. א. פתרו את המערכות הבאות.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ x + 6y = 11 \end{cases}$$

ב. מצאו בלי לפתור את פתרון המערכת:  $\begin{cases} x + 4y = 7 \\ x + 6y = 11 \end{cases}$



7. תמר אמרה: הנקודה  $(-1, 2)$  היא פתרון של כל מערכת משוואות שבה מופיעים מספרים שההפרש ביניהם קבוע.

האם תמר צודקת? הסבירו.



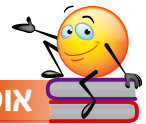
**טענה:** אם נתונות שתי משוואות מהצורה  $ax + by = c$  כאשר בין המספרים  $a, b, c$  בכל משוואה יש הפרשים קבועים בגודל  $k$ , אז כל הישרים עוברים דרך הנקודה  $(-1, 2)$ .

**הצדקת הטענה:** נרשום את המשוואות בצורה  $ax + (a + k)y = a + 2k$ ,  $a, k$  מספרים כלשהם.

נציב  $x = -1, y = 2$  במשוואה הכללית

ונקבל  $-a + 2(a + k) = a + 2k$

לאחר פישוט נקבל זהות  $a + 2k = a + 2k$



## אוסף משימות



1. האם פתרון המערכת  $\begin{cases} 6x + 7y = 8 \\ 9x + 10y = 11 \end{cases}$  הוא  $(-1, 2)$ ? הסבירו.



2. רשמו מערכת משוואות שפתרונה  $(-1, 2)$ .



3. בכל סעיף, מצאו את פתרון מערכת המשוואות.

א.  $\begin{cases} 5x + 6y = 7 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$       ב.  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 6x + 7y = 8 \end{cases}$       ג.  $\begin{cases} 3x + 7y = 11 \\ 3x + 10y = 17 \end{cases}$



4. בכל סעיף, מצאו את פתרון מערכת המשוואות.

א.  $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$       ב.  $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 8x + 7y = 6 \end{cases}$       ג.  $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$



5. בכל סעיף, מצאו את פתרון מערכת המשוואות.

א.  $\begin{cases} 5x + 8y = 11 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$       ב.  $\begin{cases} 6x - 2y = -10 \\ 2x + 8y = 14 \end{cases}$       ג.  $\begin{cases} 10x + 4y = -2 \\ -3x + 5y = 13 \end{cases}$



6. בכל סעיף, מצאו את פתרון מערכת המשוואות.

א.  $\begin{cases} 3(x + y) - y = 1 \\ 2(x + 3) + 3(y - 1) = 7 \end{cases}$       ב.  $\begin{cases} 2(x + 1) + 3y = 6 \\ 3(x - 2) + 5y = 1 \end{cases}$



7. בכל סעיף, מצאו את פתרון מערכת המשוואות.

$$\begin{cases} (x+3)(y-2) = xy+2 & \text{ב.} \\ (x-4)(y+1) = xy-13 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(y-3) = xy+2 & \text{א.} \\ (x-2)(y-1) = xy-1 \end{cases}$$



8. בכל סעיף, מצאו את פתרון מערכת המשוואות.

$$\begin{cases} \frac{3y-2x}{2} + \frac{y-x}{3} = 5 & \text{ב.} \\ \frac{2x+5}{3} - \frac{y+2}{4} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{3} = 1 & \text{א.} \\ \frac{3x-1}{4} - \frac{y-2}{3} = -1 \end{cases}$$



9. א. הפתרון של כל מערכת משוואות הוא אחד מן הזוגות הבאים:  $(1, \frac{1}{2})$   $(-1, 1\frac{1}{2})$

התאימו פתרון למערכת.

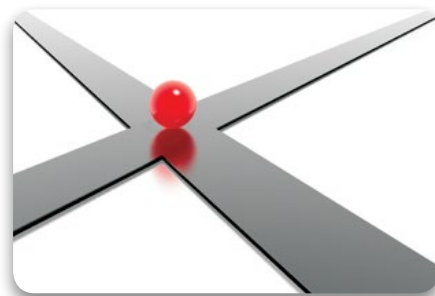
$$\begin{cases} x+2y=2 & \text{II} \\ 4x-2y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=\frac{1}{2} & \text{I} \\ x-2y=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+1 & \text{III} \\ y=x+2\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x-\frac{1}{2} & \text{IV} \\ y=1\frac{1}{2} \end{cases}$$

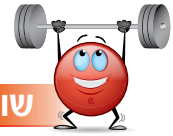
ב. המשוואות הבאות נלקחו מסעיף א,  $\begin{cases} y=-2x-\frac{1}{2} \\ y=1\frac{1}{2} \end{cases}$  מהו פתרון המערכת? הסבירו.



10. בכל סעיף, העתיקו והשלימו מספרים מתאימים במקומות הריקים, כך שתתקבל מערכת שפתרונה  $(-1, 2)$ .

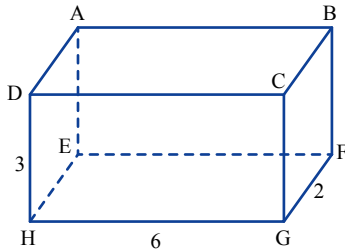
$$\begin{cases} 2x - \square \cdot y = -6 & \text{ב.} \\ \square \cdot x + \square \cdot y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \square \cdot x + 2y = 5 & \text{א.} \\ 3x - 5y = \square \end{cases}$$



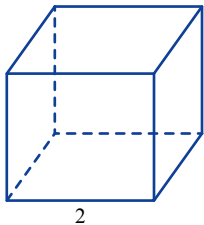


## שומרים על כושר

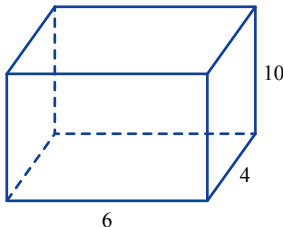
### קובייה ותיבה



- 1.** נתונה תיבה. השרטוט הוא להדגמה, ומידות האורך נתונות בס"מ.
- השמו 3 זוגות של פאות מקבילות.
  - חשבו את שטח הפנים של התיבה.
  - חשבו את נפח התיבה.
- (תזכורת: נפח של תיבה שווה למכפלת שטח הבסיס באורך הגובה של התיבה).



- 2.** לפניכם קופסה בצורת קובייה. השרטוט הוא להדגמה, ומידות האורך נתונות במטרים.
- חשבו את נפח הקופסה.
  - חשבו את שטח הפנים של הקופסה.
  - רוצים לצבוע את מעטפת הקופסה. לכל מ"ר דרוש 0.1 ליטר צבע. כמה ליטרים צבע דרושים לצביעת כל הקופסה?



- 3.** לפניכם קובייה קטנה ותיבה. השרטוטים הם להדגמה, ומידות האורך נתונות בס"מ. כמה קוביות קטנות דרושות כדי למלא את התיבה? הסבירו.

- 4.** הציעו 3 אפשרויות למידות של תיבות (שונות) בעלות נפח של 72 סמ"ק.

- 5.** א. נפח של קובייה הוא 1,000 סמ"ק. מה אורך צלע הקובייה? האם אפשר ליצור שלד של קובייה זו ממקל באורך 1 מטר? הסבירו. (תזכורת: שלד של קובייה הוא סכום אורכי המקצועות).
- ב. נפח קובייה הוא 3,375 מטרים. מה אורך החוט ממנו אפשר ליצור שלד של קובייה זו? הסבירו.