الوحدة السادسة: الدّالّة التربيعيّة

الدرس الأوّل: التعرّف على الدّالّة $y = x^2$

הקו המקווקו בשרטוט הוא קו מראה

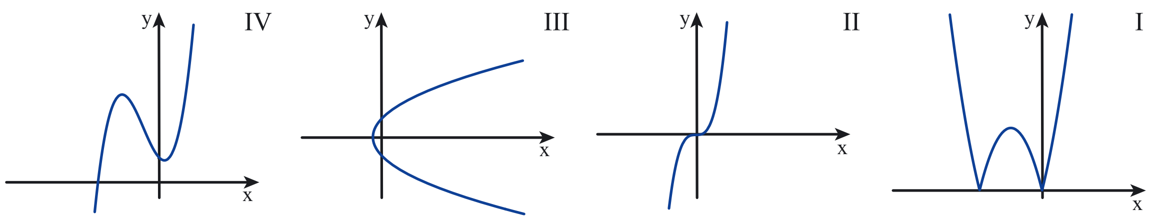
أيّ أشكال تنتج إذا رسمنا انعكاس الأشكال الآتية بواسطة المرآة؟

نسمّي الشكل "متماثل" إذا استطعنا أن نرسم "خطّ انعكاس" (خطّ الطيّ) بحيث إذا طوينا الشكل على طوله فيتّحد قسمي الشكل.
نسمّيَ هذا الخطّ **"محور تماثل"** للشكل.

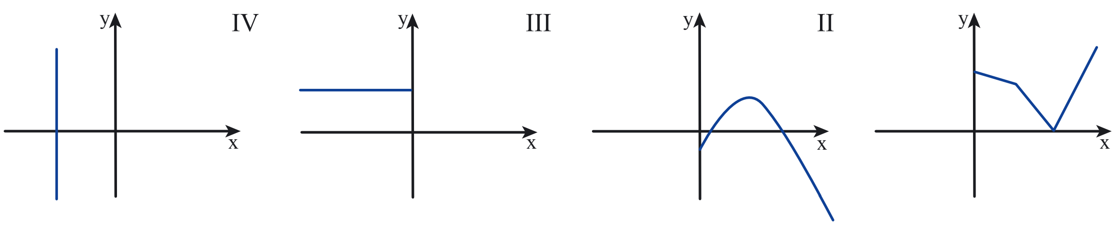
نميّز محاور التماثل ونتعرّف على الدّالّة المتماثلة.

تماثل خطوط بيانيّة

1. أ.انسخوا الرسوم البيانيّة على ورقة شفافة. إذا وجدتم خطّ تماثل للخطّ البيانيّ فأشيروا إليه.



ب.انسخوا الرسوم البيانيّة، على ورقة شفافة، وأكملوها بحيث يكون محور y خطّ تماثل للخطّ البيانيّ.



الدّالّة $y = x^2$

2. نبحث الدّالّة $y = x^2$

أ. انسخوا وأكملوا.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$											

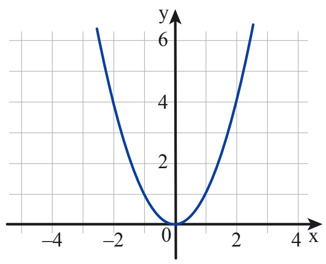
ب. استعينوا بالجدول وارسموا، على ورقة مقسمة إلى تربيعات، الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2$.

ت. هل يوجد خطّ تماثل للدّالّة $y = x^2$ ؟ إذا كانت الإجابة نعم فلوّنوه في الرسمة.

الدّالّة $y = x^2$ هي دالّة تربيعيّة.

نسمّي الخطّ البيانيّ للدّالّة التربيعيّة "قطع مكافئ".

يوجد خطّ تماثل للدّالّة.



محور y هو محور تماثل الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^2$.

تمثيله الجبريّ $x = 0$.

نفكّر بـ ...

3. أ. انسخوا وأكملوا تفاصيل ناقصة بحيث تكون في الجدول أزواجًا مِنَ النقاط المتماثلة على الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^2$.

$(0, 0)$	$(3, \ )$	$(1, \ )$	$(2, 4)$	$(0.5, 0.25)$	$(4, 16)$
$(\ , \ )$	$(\ , \ )$	$(-1, \ )$	$(\ , \ )$	$(-0.5, \ )$	$(-4, 16)$

ب. جدوا صفات مشتركة لأزواج النقاط المتماثلة التي وجدتموها.

تطرّقوا إلى التفاصيل الآتية:

- أبعاد النقاط عن محور y.
- إحداثيّات النقاط.
- أبعاد النقاط عن محور x.

4. أ. ما إحداثيّا نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع محور x؟

ما إحداثيّا نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع محور y؟

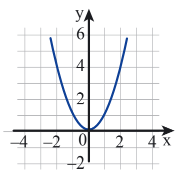
ب. في أيّ مجال الدّالّة تصاعديّة؟ في أيّ مجال الدّالّة تنازليّة؟

ت. ما نقطة القيمة الصغرى للدّالّة؟

ث. في أيّ مجال الدّالّة موجبة؟ في أيّ مجال الدّالّة سالبة؟

للتذكير: تتطرّق بطاقة هُويّة الدّالّة إلى الصفات التي تميّزها وتساعدنا على تمييزها.

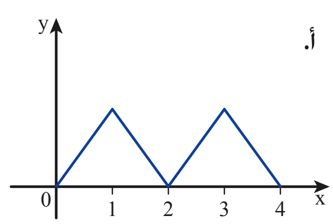
أمامكم **بطاقة هُويّة** الدّالّة التربيعيّة $y = x^2$.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = x^2$
المجال	جميع الأعداد
رسمة تقريبيّة	
محور التماثل	$x = 0$
إحداثيّا نقطة التقاطع	$(0, 0)$
نوع الرأس	صغرى
نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)	$(0, 0)$
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)	$(0, 0)$
مجال تصاعد الدّالّة	$x > 0$
مجال نزول الدّالّة	$x < 0$
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)	$x \neq 0$
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)	لا يوجد عدد

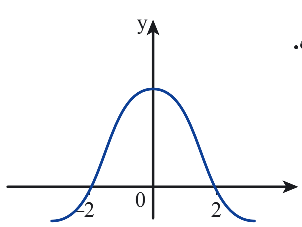
مجموعة مهامّ

1. حدّدوا، في كلّ بند، محور التماثل.

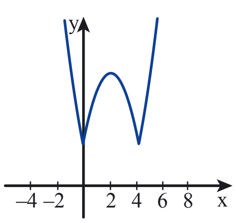
أ.



ب.

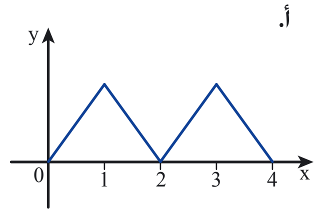


ت.

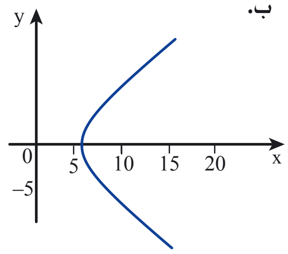


.2 انسخوا وأكملوا الرسمة، في كلّ بند، بحيث يكون محور y هو محور التماثل للخطّ البيانيّ.

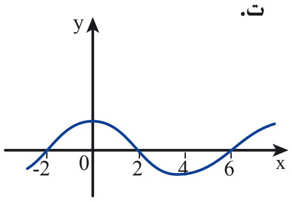
أ.



ب.



ت.



.3 أ. انسخوا الصور وأشيروا إلى محاور التماثل في كلّ شكل (إنْ وُجدت).

ب. أيّ أعداد مِن بين الأعداد 0 – 9 يوجد لها محور تماثل؟
أيّ أعداد لا يوجد لها محور تماثل؟
أيّ أعداد يوجد لها أكثر مِن محور تماثل واحد؟

ت. أكملوا المتوالية.

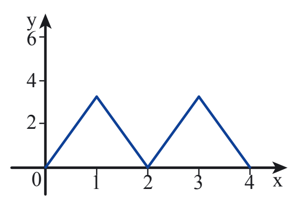
I

II

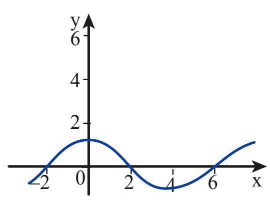
ث. ارسموا ثلاثة أشكال لكلّ منها يوجد محور تماثل واحد. أشيروا إلى محاور التماثل.
ارسموا ثلاثة أشكال لكلّ منها يوجد أكثر مِن محور تماثل واحد، ثمّ أشيروا إلى محاور التماثل.
ارسموا ثلاثة أشكال لا يوجد لها محاور تماثل.

.4 أمامكم خطوط بيانيّة لدوال.

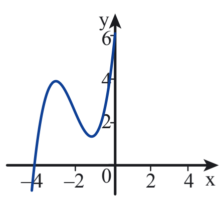
I



II



III



حدّدوا لكلّ خطّ بيانيّ ما يلي:

أ. ما نقاط الصفر للدّالّة (نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع محور x)؟
ما إحداثيّا نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع محور y؟

ب. ما مجالات تصاعد الدّالّة؟ ما مجالات نزول الدّالّة؟

ت. في أيّ مجالات تكون الدّالّة موجبة؟ وفي أيّ مجالات تكون الدّالّة سالبة؟

الدرس الثاني: القطع المكافئ والمستقيم

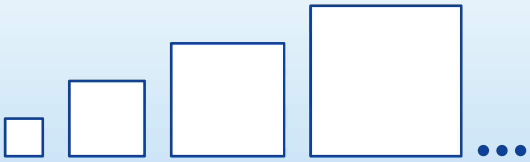
أمامكم متوالية مربّعات.

يزداد طول ضلع المربّع.

نحسب محيط كلّ مربّع ومساحته.

بماذا تتشابه متوالية المحيطات مع متوالية المساحات؟

بماذا تختلف عن بعضهما؟



نبحث وتيرة تغيُّر الدوال.

نتطرّق في المهامّ 1 وَ 2 إلى متوالية المربّعات التي وَرَدَت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. أ. انسخوا وأكملوا الأعداد المناسبة لمحيط المربّع ومساحته حسب طول ضلعه.

(x) طول ضلع المربّع (وحدات طول)	1	2	2.5	3	4	5	x
(y) محيط المربّع (وحدات طول)	4						
(y) مساحة المربّع (وحدة مساحة)	1						

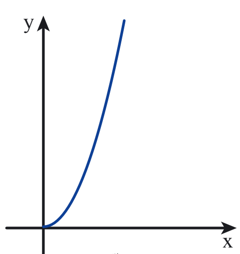
ب. أيّ قيم x مناسبة للمسألة؟

ت. أمامكم رسمتان تقريبيتان لدالتين.

أيّ رسم بياني يصف العلاقة بين طول ضلع المربّع ومحيطه؟

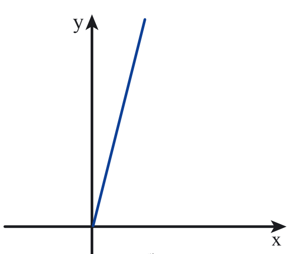
أيّ رسم بياني يصف العلاقة بين طول ضلع المربّع ومساحته؟

I



طول ضلع المربّع

II



طول ضلع المربّع

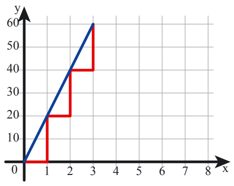
للتذكير

لإيجاد وتيرة تغيُّر الدالة يمكن أن نضيف، إلى خطّها البيانيّ، "درجًا" عرض كلّ واحدة منها وحدة واحدة (انظروا الرسمة). **وتيرة التغير** هي ارتفاع درجات الوحدة.

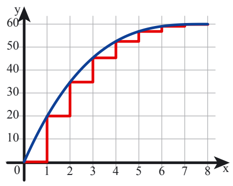
يمكن أن نحسب وتيرة التغيُّر بواسطة خارج القسمة

$$\frac{\text{ارتفاع الدرجة}}{\text{عرض الدرجة}}$$

I



II

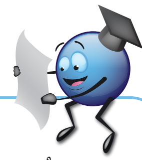


مثال: وتيرة التغيُّر ثابتة في الرسمة I.

خارج القسمة $\frac{\text{ارتفاع الدرجة}}{\text{عرض الدرجة}}$ هو 20.

في الرسمة II وتيرة التغيّر غير ثابتة.

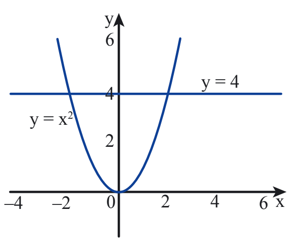
.2 أيّ خطّ بيانيّ، في المهمة 1، وتيرة تغيّره ثابتة؟
صفوا وتيرة تغيُّر الخطّ البيانيّ الذي وتيرة تغيّره غير ثابتة.



وتيرة تغيُّر الدّالّة الخطّيّة ثابتة.
وتيرة تغيُّر الدّالّة التربيعيّة غير ثابتة.

أمثلة: وتيرة تغيُّر الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = 4x$ ثابتة.
وتيرة تغيُّر الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^2$ غير ثابتة (لقيم x الموجبة - كلّما ازداد x تزداد وتيرة تغيُّر الخطّ البيانيّ للدّالّة).

.3 حلّ التلاميذ المعادلة التالية: $x^2 = 4$.
أ. رسم **يوسف** الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^2$،
والخطّ المستقيم الذي تمثيله الجبريّ $y = 4$.
قال **يوسف**: يمكن أن نحلّ المعادلة بمساعدة الرسمة.
كم حلًّا يوجد للمعادلة حسب طريقة **يوسف**؟ ما الحلول؟
ب. قال **أمين**: كلّ عددين مضادّين لهما نفس المربّع.
هل قول **أمين** صحيح؟ اشرحوا حسب حلّ المعادلة وحسب الرسم البيانيّ.



نرمز إلى:
x_1 كحلّ للمعادلة، x_2 هو حلّ إضافيّ للمعادلة. لا يوجد معنى لترتيب الحلول.
مثال: يوجد حلّان، في المهمّة 2، للمعادلة $x^2 = 4$. الحلّان هما: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

نفكّر بـ ...

.4 حلّوا المعادلات الآتية بطريقة جبريّة (إيجاد الجذر) وبطريقة بيانيّة (بطريقة **يوسف**). إذا لم تجدوا حلًّا فاشرحوا.
أ. $x^2 = 25$ ب. $x^2 = 9$ ت. $x^2 = 2.25$ ث. $x^2 = 0$ ج. $x^2 = -4$

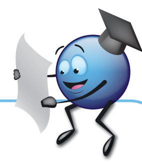
.5 كم حلًّا يوجد لكلّ معادلة؟
أ. $x^2 = 16$ ب. $x^2 = 36$ ت. $x^2 = 5$ ث. $x^2 = -9$ ج. $x^2 = 0$

6. معطاة المعادلة $x^2 = m$ (m كلّ عدد).
حدّدوا، في كلّ بند، بواسطة الخطّ البياني أو بمساعدة اعتبارات عدديّة قيم مناسبة لـ m.

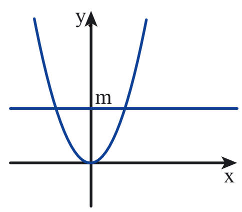
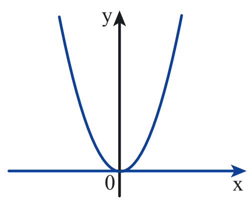
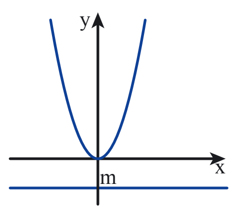
أ. المعادلة لها حلّان. ب. المعادلة لها حلّ واحد فقط. ت. لا يوجد لها حلّ.

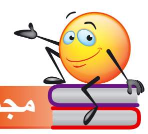
نفكّر بـ ...

7. أ. قال **يوسف**: لا يوجد حلّ للمعادلة $x^2 = 5$.
هل قول **يوسف** صحيح؟ اشرحوا.
ب. قال **راني**: حلّ المعادلة $x^2 = -5$ هو $(-\sqrt{5})$.
اشرحوا خطأ **راني**.



معطاة المعادلة $x^2 = m$ (m كلّ عدد).

قيم m	رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ	اعتبارات عدديّة	عدد الحلول
$m > 0$		يوجد لـ m جذران تربيعيّان مختلفان.	2
$m = 0$		يوجد جذر تربيعيّ واحد للعدد صفر.	1
$m < 0$		لا يوجد جذر تربيعيّ لـ m.	0



مجموعة مهامّ

1. حلّوا. إذا لم تجدوا حلًّا فاشرحوا.

أ. $x^2 = 16$ ب. $x^2 = -16$ ت. $x^2 = 1$ ث. $x^2 = 0$ ج. $x^2 = 100$

2. حلّوا. إذا لم تجدوا حلًّا فاشرحوا.

أ. $x^2 = 49$ ب. $x^2 = 10$ ت. $x^2 = -10$ ث. $x^2 = \frac{1}{4}$ ج. $x^2 = 1000$

3. بسّطوا وحلّوا.

مثال:

$$4x^2 - 25 = 0 \quad / +25$$
$$4x^2 = 25 \quad /:4$$
$$x^2 = \frac{25}{4}$$
$$x_1 = 2.5 \qquad x_2 = -2.5$$

أ. $x^2 - 4 = 0$ ب. $3x^2 = 27$ ت. $x^2 + 9 = 0$ ث. $\frac{x^2}{4} - 5 = 20$ ج. $33 - 2x^2 = 1$

4. حدّدوا، في كلّ بند، عدد حلول المعادلة. ارسموا رسمة تقريبيّة مناسبة.

أ. $x^2 = 100$ ب. $x^2 = 11$ ت. $x^2 = -100$ ث. $x^2 = -11$

5. سجّلوا، في كلّ بند، معادلة صورتها $x^2 = m$ بحيث يتحقّق ما يلي:

أ. يوجد حلان مختلفان للمعادلة. كم معادلة كهذه يمكن أن نكتب؟

ب. يوجد للمعادلة حلّ وحيد. كم معادلة كهذه يمكن أن نكتب؟

ت. لا يوجد حلّ للمعادلة. كم معادلة كهذه يمكن أن نكتب؟

6. حدّدوا، في كلّ بند، بين أيّ أعداد يقع الحلّ الموجب للمعادلة؟

أ. $x^2 = 10$ ب. $x^2 = 20$ ت. $x^2 = 80$ ث. $x^2 = 8$

7. أ. معطاة المعادلة $x^2 = 7$.

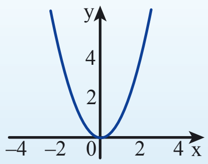
حلول المعادلة هي: $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = -\sqrt{7}$.

عيّنوا مكان العددين $-\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$ على محور الأعداد.

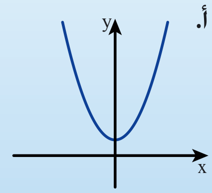
ب. عيّنوا مكان العدد $\sqrt{3}$ على محور الأعداد.

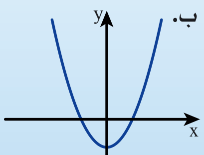
الدرس الثالث: إزاحة على طول محور y

تعرّفنا في الدرس السابق على القطع المكافئ الممثّل بواسطة $y = x^2$.



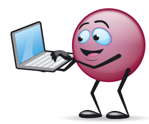
كيف يجب علينا تغيير التمثيل الجبريّ لهذه الدالة كي نحصل على الدالتين الموصوفتين بواسطة القطعين المكافئين التاليين؟

أ. 

ب. 

سنتعلّم كيفية إزاحة وانعكاس القطع المكافئ $y = x^2$.

إزاحة المعادلة $y = x^2$ إلى أعلى وإلى أسفل



1. ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة" "מתמטיקה משולבת" في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب" "**פעילויות באמצעות מחשב**" فعّاليّة "نحرّك القطع المكافئ $y = x^2$ إلى أعلى" "**מזיזים את הפרבולה $y = x^2$ כלפי מעלה**". نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

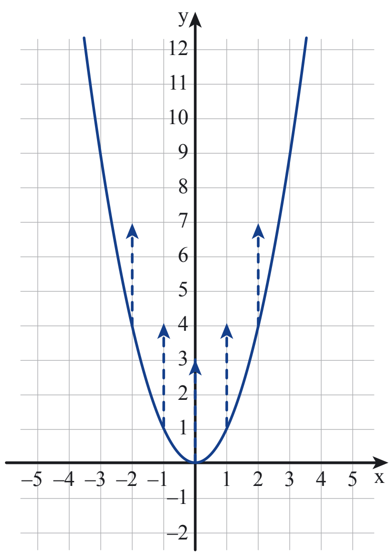
فعّاليّة بديلة
في الحاسوب

2. حضّروا " قطع مكافئ شفّاف". انسخوا القطع المكافئ الذي يظهر في الرسمة على ورقة شفّافة.

حركوا "القطع المكافئ الشفاف" 3 وحدات إلى أعلى على طول محور y بحيث يقع الرأس في النقطة (0, 3).

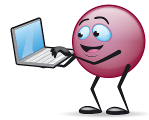
أ. استعينوا بالخطّ البيانيّ للقطع المكافئ بعد الإزاحة. انسخوا الجدول وأكملوه.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
القطع المكافئ الأصليّ $y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
القطع المكافئ بعدالإزاحة $y =$ ______							



ب. ما إحداثيّا نقطة رأس القطع المكافئ بعد الإزاحة؟
ما نقاط الصفر للقطع المكافئ بعد الإزاحة؟
ما مجالات الصعود والنزول للقطع المكافئ بعد الإزاحة؟
ما المجالات الموجبة والسالبة للقطع المكافئ بعد الإزاحة؟

ت. قال **إياد**: أنظر إلى القطع المكافئ بعد الإزاحة، وأرى دون أن أحسب أمثلة عدديّة أنّه يُضاف 3 وحدات لـ y لكلّ x. لذا التعبير الجبريّ للقطع المكافئ بعد الإزاحة هو $y = x^2 + 3$.
هل قول **إياد** صحيح؟



3. ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة" "מתמטיקה משולבת" في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب "פעילויות באמצעות מחשב" فعّاليّة "نحرّك القطع المكافئ $y = x^2$ إلى أسفل" "מזיזים את הפרבולה $y = x^2$ כלפי מטה". نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

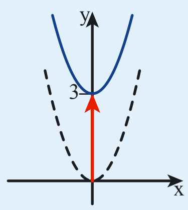
فعّاليّة بديلة
في الحاسوب

4. حرّكوا "القطع المكافئ الشفّاف" 4 وحدات إلى أسفل على طول محور y بحيث يقع الرأس في النقطة $(0, -4)$.
أ. ما التمثيل الجبريّ للقطع المكافئ الناتج بعد الإزاحة؟
ب. استعينوا بالخطّ البيانيّ للقطع المكافئ الناتج بعد الإزاحة، ثمّ أكملوا جدول قيم مناسب وسجّلوا صفات الدّالّة.

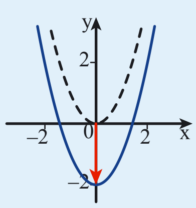
ينتج القطع المكافئ $\mathbf{y = x^2 + k}$ من **الإزاحة العموديّة** للدّالّة $y = x^2$ على محور y بمقدار k وحدات.

مثال

ينتج القطع المكافئ $\mathbf{y = x^2 + 3}$ عندما نحرّك الدّالّة $\mathbf{y = x^2}$ بمقدار 3 وحدات إلى أعلى على محور y.

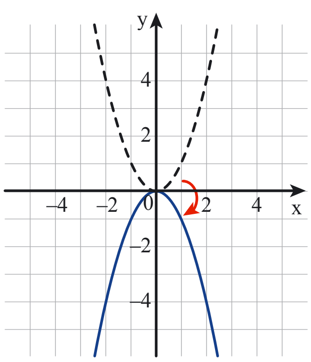


ينتج القطع المكافئ $\mathbf{y = x^2 - 2}$ عندما نحرك الدّالّة $\mathbf{y = x^2}$ بمقدار وحدتين إلى أسفل على محور y.



انعكاس القطع المكافئ $y = x^2$ بواسطة محور x

5. اقلبوا القطع المكافئ $y = x^2$ بحيث يكون x خطّ الانعكاس بين القطعين المكافئين (انظروا الرسمة).
نبحث "القطع المكافئ المقلوب".



أ. انسخوا الجدول وأكملوا.

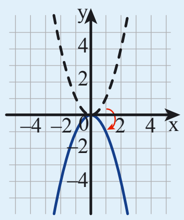
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
القطع المكافئ الأصليّ $y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
القطع المكافئ المقلوب $y =$ ______							

ب. قال **مازن**: نرى في "القطع المكافئ المقلوب" أنّ x يناظر y وهو القيمة المضادّة لقيمة y في القطع المكافئ $y = x^2$.
إذا كان قول **مازن** صحيح فسجّلوا التعبير الجبريّ المناسب للقطع المكافئ المقلوب.
ت. سجّلوا صفات "القطع المكافئ المقلوب".
ث. ما القيمة الصغرى للدالة $y = x^2$؟
ما القيمة الكبرى للدالة الموصوفة بواسطة "القطع المكافئ المقلوب"؟

- ينتج القطع المكافئ $y = -x^2$ **من انعكاس** $y = x^2$ بواسطة محور x.

مثال:

في المهمّة 5
استعملنا محور x كخطّ انعكاس كي "نقلب" القطع المكافئ.



- نسمّي نقطة رأس القطع المكافئ **"النقطة الحرجة"**.

إذا كانت صورة القطع المكافئ ∪ (القطع المكافئ"يضحك") فيوجد له **نهاية صغرى**.

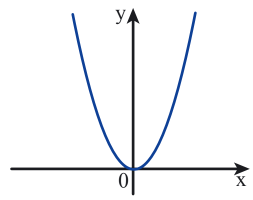
قيمة الدالة في هذه النقطة هي القيمة الصغرى.

إذا كانت صورة القطع المكافئ ∩ (القطع المكافئ"يبكي") فيوجد له **نهاية عظمى**.

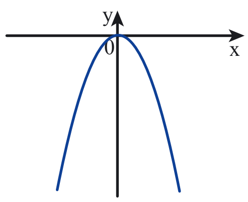
قيمة الدالة في هذه النقطة هي القيمة الكبرى.

أمثلة

يوجد للخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^2$ نهاية صغرى.



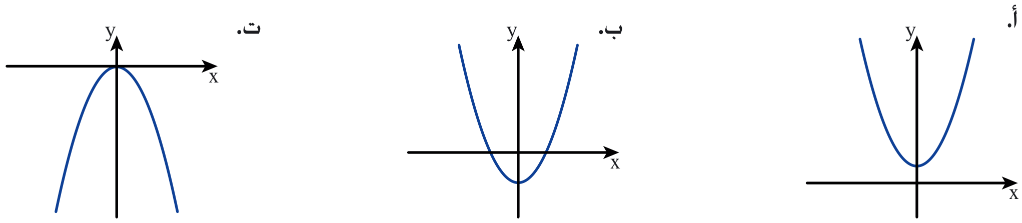
يوجد للخطّ البيانيّ للدّالّة $y = -x^2$ نهاية عظمى.



6. انسخوا وأكملوا "**بطاقة هُويّة**" "القطع المكافئ المقلوب".

التمثيل الجبريّ للدّالّة	
المجال	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة	
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع الرأس	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
مجال تصاعد الدّالّة	
مجال نزول الدّالّة	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$	

7. نعود إلى مهمّة الافتتاحيّة.
أعطوا مثالًا لتعبير جبريّ مناسب لكلّ خطّ بيانيّ.

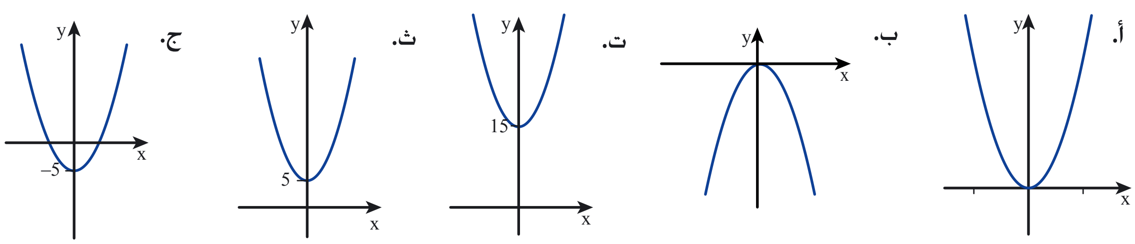


شكل المسار لجسم يُطلق بزاوية نسبة إلى الأرض (مثلًا: نقذف كرة باتجاه السلّة، مياه تتدفق من نافورة مياه، أو مُفرقعات تُطلق من منصة مفرقعات) هو قطع مكافئ (تقريبًا) وذلك نتيجة لقوّة الجاذبيّة التي تؤثّر على الجسم (وزنه).
إذا أهملنا مقاومة الهواء فنحصل على مسار قطع مكافئ دقيق.

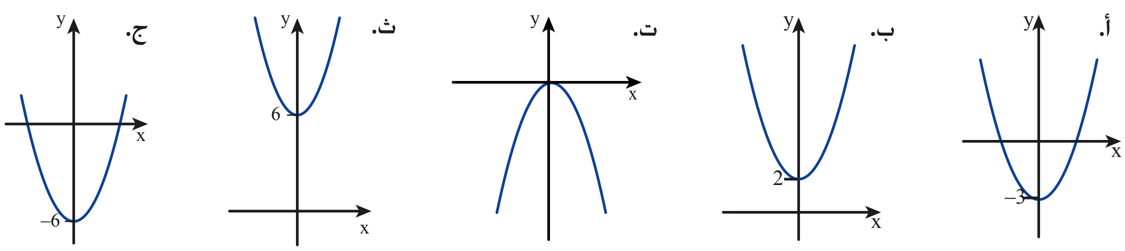
مجموعة مهامّ

1. لائموا كلّ قطع مكافئ للتمثيل الجبريّ المناسب.

$y = -x^2$ $y = x^2 - 5$ $y = x^2 + 15$ $y = x^2 + 5$ $y = x^2$



2. سجّلوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا لكلّ قطع مكافئ.



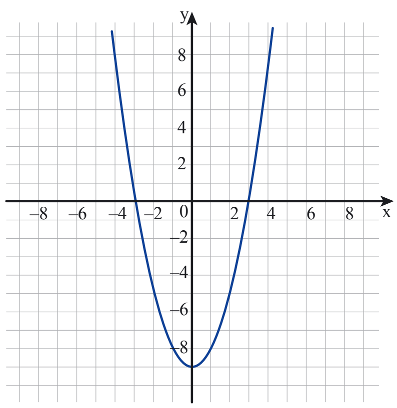
3. سجّلوا، في كلّ بند، التمثيل الجبريّ للقطع المكافئ الناتج.

مثال: نحرّك القطع المكافئ $y = x^2$ بمقدار 7 وحدات إلى أسفل.
التمثيل الجبريّ للقطع المكافئ بعد الإزاحة: $y = x^2 - 7$.

أ. نحرّك القطع المكافئ $y = x^2$ بمقدار 9 وحدات إلى أعلى.
ب. نحرّك القطع المكافئ $y = x^2$ بمقدار 10 وحدات إلى أسفل.
ت. نعكس القطع المكافئ $y = x^2$ بواسطة المحور x.

4. أ. ارسموا قطعًا مكافئًا بحيث يكونا إحداثيّا نهايته الصغرى $(0, 5)$.
ما التمثيل الجبريّ للقطع المكافئ الذي رسمتموه؟
ب. ارسموا قطعًا مكافئًا بحيث يكونا إحداثيّا نهايته الصغرى $(0, -5)$.
ما التمثيل الجبريّ للقطع المكافئ الذي رسمتموه؟

5. أمامكم الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^2 - 9$.



أ. انسخوا الجدول وأكملوه. افحصوا إجاباتكم بمساعدة الرسم البيانيّ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2 - 9$							

ب. ما محور تماثل القطع المكافئ؟
ت. اختاروا زوجًا مِن نقاط التماثل على القطع المكافئ وسجّلوا إحداثيّات النقطتين.
ث. ما إحداثيّا نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور y؟
ج. ما إحداثيّا نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور x؟
ح. ما إحداثيّا نقطة رأس القطع المكافئ؟ هل هذه النقطة نهاية صغرى أم نهاية عظمى؟
خ. ما مجالات صعود ونزول الدّالّة؟
د. ما المجالات الموجبة والسالبة للدّالّة؟

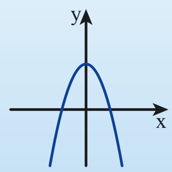
6. أكملوا "**بطاقة هُويّة**" للدّالّة $y = x^2 - 4$ والدّالّة $y = x^2 + 4$.

الدرس الرابع: إزاحة القطع المكافئ $y = -x^2$

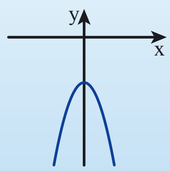
التمثيل الجبريّ للدّالّة التي تظهر في الرسمة هو $y = -x^2$.

اقترحوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا للقطعين المكافئين الآتيين.

I



II

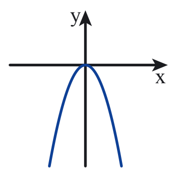


نتعلّم كيفيّة إزاحة القطع المكافئ $y = x^2$ **والقطع المكافئ** $y = -x^2$.

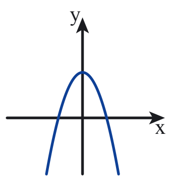
1. أ. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للرسم البيانيّ المناسب.

$h(x) = -x^2$ $\quad$ $g(x) = -x^2 - 4$ $\quad$ $f(x) = -x^2 + 4$

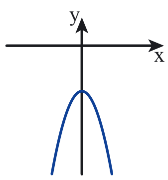
I



II



III



ب. سجّلوا إحداثيّيْ نقطة الرأس لكلّ دالّة.

ت. ما محور تماثل كلّ دالّة؟

ث. سجّلوا مجالات صعود ونزول كلّ دالّة.

للتذكير

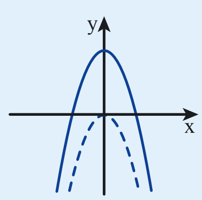
نسمّي الدوال بمساعدة حروف لاتينيّة كي نميّز بينها.

مثلًا: $f(x)$ أو $g(x)$ نسميهما: f الـ x, g الـ x

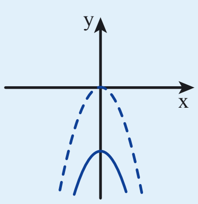
ينتج القطع المكافئ الذي صورته $y = -x^2 + k$ مِن إزاحة عموديّة للقطع المكافئ $y = -x^2$ على محور y بمقدار k وحدات.

أمثلة:

ينتج القطع المكافئ $y = -x^2 + 4$ عندما نحرّك القطع المكافئ $y = -x^2$ بمقدار 4 وحدات إلى أعلى على محور y.



ينتج القطع المكافئ $y = -x^2 - 4$ عندما نحرّك القطع المكافئ $y = -x^2$ بمقدار 4 وحدات إلى أسفل على محور y

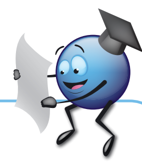


.2 نحرّك القطع المكافئ $y = -x^2$ بمقدار 9 وحدات إلى أعلى.
انسخوا وأكملوا "**بطاقة هُويّة**" "القطع المكافئ" الناتج بعد الإزاحة.

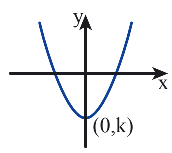
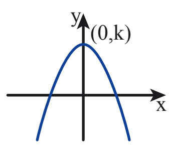
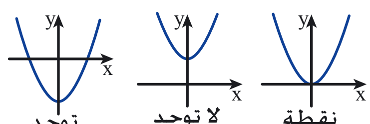
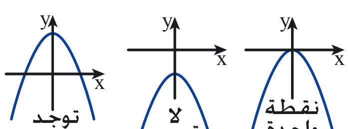
التمثيل الجبريّ للدّالّة	
المجال	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة	
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع الرأس	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
مجال تصاعد الدّالّة	
مجال نزول الدّالّة	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$	

.3 معطاة الدّالّة $f(x) = 25 - x^2$
ارسموا رسمة تقريبيّة للقطع المكافئ المناسب وسجّلوا صفات الدّالّة (يمكنكم الاستعانة "**ببطاقة الهُويّة**".)

.4 ارسموا، في كلّ بند، رسمة تقريبيّة، وسجّلوا مثالًا للتمثيل الجبريّ المناسب للدّالّة.
أ. توجد نهاية صغرى للدّالّة، وخطّها البيانيّ لا يتقاطع مع محور x.
ب. توجد نهاية كبرى للدّالّة، وخطّها البيانيّ يتقاطع مع محور x في نقطة واحدة فقط.
ت. توجد نهاية كبرى للدّالّة، وخطّها البيانيّ يتقاطع مع محور x في نقطتين.
ث. توجد نهاية كبرى للدّالّة، وخطّها البيانيّ لا يتقاطع مع محور x.
ج. النهاية الكبرى للدالة هي $(0, 3)$.



تعرّفنا حتّى الآن على صفات القطع المكافئ.

نوع الدّالّة	$y = x^2 + k$	$y = -x^2 + k$
محور التماثل: محور **y** نقطة الرأس: $(0,\ k)$		
نقطة الرأس	نهاية صغرى	نهاية كبرى
التقاطع مع محور x (نقاط الصفر)		

نفكّر بـ ...

5. يلعب التلاميذ لعبة رياضيّة: يختار التلميذ عددًا، يضربه بنفسه ويطرح 16 مِنَ النتيجة.
التلميذ الذي يحصل على النتيجة الصغرى هو الفائز.

أ. اختارت **عناية** العدد 10. ما النتيجة التي حصلت عليها؟

ب. حصلت **مريم** على النتيجة 9.
هل يمكن أن نعرف العدد الذي اختارته **مريم**؟

ت. هل يمكن أن يختار تلميذان أعداد مختلفة وأن يحصلا على نفس النتيجة؟

ث. حصلت **رائدة** على النتيجة 0.
هل يمكن أن نعرف العدد الذي اختارته **رائدة**؟ اشرحوا.

ج. اختارت **سائدة** عددًا وحصلت على نتيجة سالبة.
اختاروا أعدادًا مناسبة لاختيار **سائدة**.

ح. قالت **سامرة**: أنا متأكدة بأنني فُزت.
ما العدد الذي اختارته **سامرة**؟ ما النتيجة التي حصلت عليها؟

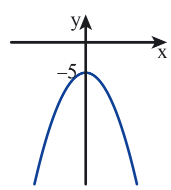
خ. قالت **ليلى**: يمكن الوصول إلى النتيجة الصغرى، لكن ليس إلى النتيجة الكبرى.
هل قول **ليلى** صحيح؟ اشرحوا.

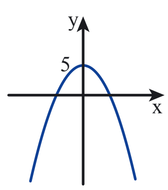
د. اقترحوا لعبة شبيهة لاختيار أعداد وتنفيذ عمليّات عليها بحيث يكون الفائز الذي يحصل على النتيجة الكبرى.
العبوا مع أصدقائكم.
يمكنكم الاستعانة بالتمثيلات التي ترغبونها للفوز باللعبة: تمثيل جبريّ، جدول أو رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ.

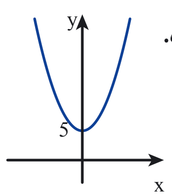
مجموعة مهامّ

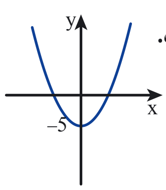
1. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للرسم البيانيّ المناسب.

$f(x) = x^2 - 5$ $\quad$ $g(x) = -x^2 - 5$ $\quad$ $h(x) = -x^2 + 5$ $\quad$ $t(x) = x^2 + 5$

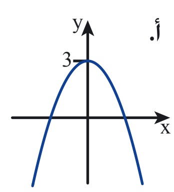
أ.


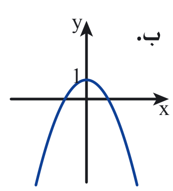
ب.


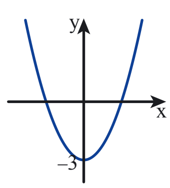
ت.


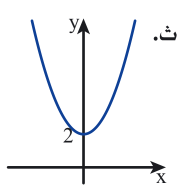
ث.


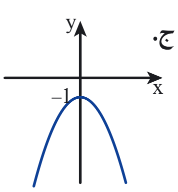
2. سجّلوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا لكلّ رسمة تقريبيّة.

أ.


ب.


ت.


ث.


ج.


3. سجّلوا، في كلّ بند، عددًا مناسبًا حسب عدد نقاط تقاطع الدّالّة مع محور x.

مثال: الدّالّة $y = -x^2 + \boxed{-6}$ لا يوجد لها نقاط تقاطع مع محور x.

أ. الدّالّة $y = x^2 + \square$ لا يوجد لها نقاط تقاطع مع محور x.

ب. الدّالّة $y = x^2 + \square$ يوجد لها نقطتا تقاطع مع محور x.

ت. الدّالّة $y = -x^2 + \square$ يوجد لها نقطتا تقاطع مع محور x.

ث. الدّالّة $y = -x^2 + \square$ لا يوجد لها نقطة تقاطع واحدة مع محور x.

ج. الدّالّة $y = -x^2 + \square$ يوجد لها نقطة تقاطع واحدة مع محور x.

4. أ. ارسموا قطعًا مكافئًا بحيث تكون له نهاية صغرى إحداثييها $(0, 4)$.
ما التمثيل الجبريّ للقطع المكافئ الذي رسمتموه؟

ب. ارسموا قطعًا مكافئًا بحيث تكون له نهاية كبرى إحداثييها $(0, -4)$.
ما التمثيل الجبريّ للقطع المكافئ الذي رسمتموه؟

5. ارسموا، في كلّ بند، رسمة تقريبيّة وأعطوا مثالًا للتمثيل الجبريّ المناسب للدّالّة.

أ. توجد نهاية صغرى للدّالّة وخطّها البيانيّ يتقاطع مع محور x في نقطتين.

ب. توجد نهاية كبرى للدّالّة وخطّها البيانيّ يتقاطع مع محور y في النقطة $(0, 8)$.

6. ارسموا، في كلّ بند، رسمة تقريبيّة مناسبة، وأعطوا مثالًا للتمثيل الجبريّ المناسب للدّالّة.

أ. توجد نهاية صغرى للدّالّة وخطّها البيانيّ يتقاطع مع محور x في النقطتين $(1, 0)$ $(-1, 0)$.

ب. توجد نهاية كبرى للدّالّة وخطّها البيانيّ يمرّ عبر النقطة $(5, -25)$.

ت. توجد نهاية كبرى للدّالّة وخطّها البيانيّ يمرّ عبر النقطة $(5, -27)$.

.7 انسخوا وأكملوا "**بطاقة هُويّة**" الدّالّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = -x^2 - 4$
المجال	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة	
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع الرأس	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)	
مجال تصاعد الدّالّة	
مجال نزول الدّالّة	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)	

.8 نحرّك القطع المكافئ $y = -x^2$ على طول محور y بمقدار 7 وحدات إلى أسفل.
أكملوا "**بطاقة هُويّة**" مناسبة للدّالّة الناتجة.

.9 أكملوا "**بطاقة هُويّة**" مناسبة للدّالّة $y = 4 - x^2$.

.10 سجّلوا مجالات الصعود ومجالات النزول لكلّ دالّة. استعينوا برسمة تقريبيّة مناسبة.

أ. $f(x) = x^2 - 16$ ب. $g(x) = x^2 + 1$ ت. $h(x) = 7 - x^2$

.11 يلعب التلاميذ لعبة رياضيّة: يختار التلميذ عددًا، يضربه بنفسه ويضيف 2 إلى النتيجة.

أ. اختارت **نادية** العدد 12 واختارت **سائدة** العدد (-12).
أيُّهما حصلت على نتيجة أكبر؟ اشرحوا.

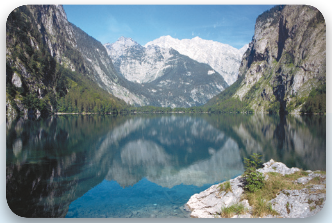
ب. اختارت **روضة** العدد 6 واختارت **رائدة** العدد (-7).
أيُّهما حصلت على نتيجة أكبر؟ اشرحوا.

ت. حصلت **مريم** على العدد 27. هل يمكن أن نعرف العدد الذي اختارته؟ اشرحوا.

ث. هل يمكن أن نختار عددًا ونحصل على النتيجة 0؟ اشرحوا.

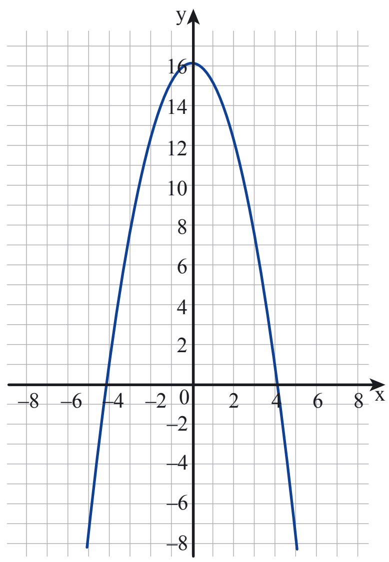
ج. أيّ عدد مِنَ الأفضل اختياره إذا كانت الفائزة هي التي حصلت على النتيجة الكبرى؟
أيّ عدد مَنَ الأفضل اختياره إذا كانت الفائزة هي التي حصلت على النتيجة الكبرى؟
هل الفوزَ مؤكد في كلّ حالة من الحالتين؟

الدرس الخامس: القطع المكافئ ومعادلات



معطاة الدّالّة التربيعيّة $y = 16 - x^2$.
انسخوا وأكملوا إحداثيّات النقاط على الخطّ البيانيّ للدّالّة.
إذا وجدتم أكثر من نقطة واحدة مناسبة فاذكروها. إذا لم تجدوا نقاطًا مناسبة فاذكروا ذلك.
$(\_\_, 0)$ $(\_\_, 16)$ $(\_\_, 7)$ $(\_\_, -20)$ $(\_\_, 25)$

نحلّ معادلات بطريقة جبريّة وبطريقة بيانيّة.



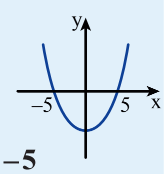
1. نتطرّق إلى مهمّة الافتتاحيّة.
أ. رسم **رامي** الخطّ البيانيّ المناسب للقطع المكافئ.
قرأ إحداثيّات النقاط مِن الخطّ البيانيّ.
أكملوا الإحداثيّات الناقِصة بطريقة **رامي**.
هل نجحتم في إكمال جميع الإحداثيّات الناقصة بهذه الطريقة؟
ب. قال **سامي**: لإكمال إحداثيّا النقطة $(\_\_, -20)$
سجّلت المعادلة: $-20 = 16 - x^2$
حلّوا معادلة **سامي**.
هل يمكن إكمال الإحداثيّات الناقصة الأخرى بهذه الطريقة؟
ت. استعينوا بالبنود السابقة وحدّدوا عدد نقاط تقاطع القطع المكافئ
وكلّ مستقيم من المستقيمات الآتية:
$y = 25$ $y = -20$ $y = 7$ $y = 16$ $y = 0$

2. ارسموا، في كلّ بند، رسمة تقريبيّة مناسبة وجدوا نقاط الصفر للدّالّة (إنْ وُجدت).

أمثلة:

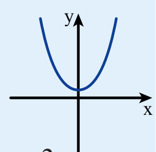
$g(x) = x^2 - 25$

$x^2 - 25 = 0$
$x^2 = 25$
$x_1 = 5 \quad x_2 = -5$



$f(x) = x^2 + 3$

$x^2 + 3 = 0$



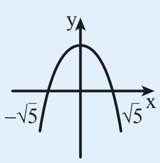
$\underbrace{x^2}_{\text{عدد موجب أو صفر}} = \underbrace{-3}_{\text{عدد سالب}}$

$\neq$

لا يوجد حلّ للمعادلة، لا توجد نقطة صفر للدّالّة

$k(x) = -x^2 + 5$

$-x^2 + 5 = 0$
$-x^2 = -5$
$x^2 = 5$
$x_1 = \sqrt{5} \quad x_2 = -\sqrt{5}$



أ. $y = x^2 - 8$ ب. $y = 8 - x^2$ ت. $y = 8 + x^2$ ث. $y = -x^2 - 8$

نسمّي النقاط التي فيها قيمة الدّالّة تساوي صفر $(y = 0)$ **"النقاط الصفريّة للدّالّة".**

يمكن إيجاد النقاط الصفريّة للدّالّة بإحدى الطريقتين الآتيتين:

بمساعدة رسم بيانيّ - إيجاد نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع محور x.

بطريقة جبريّة - حلّ المعادلة: $f(x) = 0$.

3. أ. ما النقاط الصفريّة للدّالّة $f(x) = 48 - x^2$ ؟

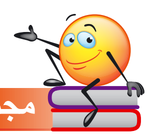
ب. غيّروا الدّالّة بحيث لا تكون لها نقاط صفريّة.

ت. ما قيمة x إذا كان $f(x) = -1$ ؟

ث. حلّوا المعادلات: $48 - x^2 = 49$ ، $48 - x^2 = 12$ ، $48 - x^2 = -1$ ، $48 - x^2 = 0$

4. انسخوا وأكملوا "**بطاقة هُويّة**" الدّالّة $y = (x + 3)(x - 3)$.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	
المجال	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة	
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع الرأس	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
مجال تصاعد الدّالّة	
مجال نزول الدّالّة	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$	



مجموعة مهامّ

1. ارسموا في كلّ بند، رسمة تقريبيّة مناسبة، وجدوا النقاط الصفريّة للدالة.

أ. $f(x) = x^2 - 5$ ت. $h(x) = 6 + x^2$ ج. $e(x) = x^2 - 1$

ب. $g(x) = x^2 + 2$ ث. $p(x) = 100 - x^2$ ح. $s(x) = -x^2 - 3$

2. سجّلوا، في كلّ بند، المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة والمجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة.

أ. $f(x) = 4 - x^2$　　ب. $g(x) = -x^2 - 1$　　ت. $h(x) = x^2 - 36$

3. حلّوا.

أ. $x^2 - 1 = 0$　　ت. $x^2 + 9 = 0$　　ج. $x^2 + 1 = 1$

ب. $-x^2 - 3 = 0$　　ث. $-x^2 + 9 = 0$　　ح. $x^2 + 9 = 25$

4. معطى، في كلّ بند، تمثيلان جبريّان لقطع مكافئ ومستقيم. حدّدوا عدد نقاط التقاطع بين القطع المكافئ والمستقيم.
اشرحوا وارسموا رسمة تقريبيّة مناسبة.

أ. $y = x^2$ ، $y = 11$　　ب. $y = x^2 + 3$ ، $y = 3.5$　　ت. $y = -x^2 - 4$ ، $y = -4$　　ث. $y = x^2 - 2$ ، $y = 7$　　ج. $y = -x^2$ ، $y = 3.5$

5. معطاة الدّالّة $y = 15 - x^2$.

أ. ما قيمة x إذا كان $y = 6$؟　　ب. ما قيمة x إذا كان $y = 15$؟　　ت. ما قيمة x إذا كان $y = 10$؟

6. بسّطوا وحلّوا.

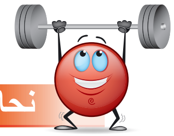
أ. $3x^2 - 12 = 0$　　ت. $(x + 1)(x - 1) = 24$　　ج. $33 - 2x^2 = 1$

ب. $2x^2 = x^2 + 7$　　ث. $(6 + x)(6 - x) = 36$　　ح. $9x^2 - 1 = 0$

7. أكملوا "**بطاقة الهويّة**" للدّالّتين الآتيتين:

أ. $y = x^2 - 7$

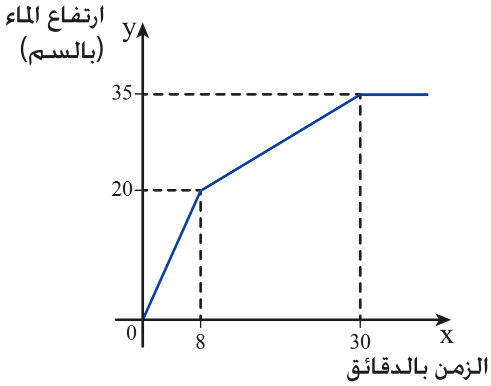
ب. $y = (5 + x)(5 - x)$



نحافظ على لياقة رياضيّة

الدوال

1. يمتلئ حوض ماء بواسطة حنفيتين.
أُغلقت إحدى الحنفيتين بعد مرور زمن معيّن. وأُغلقت الحنفية الثانية فيما بعد أيضًا.
يصف الخطّ البيانيّ الذي يظهر في الرسمة التغيُّرات في ارتفاع الماء في الحوض كدالّة للزمن.



أ. أُغلقت الحنفية الأولى بعد مرور عدّة دقائق.
كم كان ارتفاع الماء في الحوض عندما أُغلقت هذه الحنفية؟
عيّنوا النقطة المناسبة على الخطّ البيانيّ.

ب. بعد مرور كم مِنَ الوقت أُغلقت الحنفية الثانية؟

ت. كم كان ارتفاع الماء عندما كانت الحنفيتين مغلقتين؟

2. أشيروا إلى جميع الدوال التي تمرّ خطوطها البيانيّة عبر النقطة $(3\ ,5)$.

أ. $y = 3x - 5$ ت. $y = 5(x - 3)$ ج. $y = x^2 - 5$

ب. $y = 3 - (x - 5)$ ث. $y = 5 + (x - 3)$ ح. $y = \frac{x^2 - 2}{5}$

3. معطاة الدالة $y = \boxed{} \cdot (x - 2)^2$
أكملوا عددًا في المكان الفارغ بحيث نحصل على $y = 12$ عندما يكون $x = 4$ ؟

4. أكملوا الإحداثي y للنقطة $(3\ ,\ \_\_\_\_)$ لكلّ دالة، وسجّلوه في التربيعة المناسبة.

أ. $y = \frac{2x^2}{x}$ ث. $y = \frac{2(x - 5)}{-4}$ خ. $y = x^2 - 1$

ب. $y = x^2 - 2$ ج. $y = \frac{x^3 - 2}{5}$ د. $y = \frac{x^2}{x}$

ت. $y = \frac{6}{x}$ ح. $y = \frac{x^4}{x^2}$ ذ. $y = -2(x - 5)$

أ.	ب.	ت.
ث.	ج.	ح.
خ.	د.	ذ.

احسبوا مجموع كلّ سطر، كلّ عمود وكلّ قُطر. على ماذا حصلتم؟