الوحدة السابعة: إزاحة وانعكاس القطع المكافئ

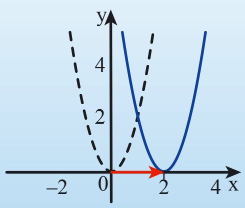
الدرس الأول: إزاحة القطع المكافئ بطريقة أفقية

أزحنا في الوحدة السابقة القطع المكافئ الذي تمثيله الجبري $y = x^2$ **إزاحة عموديّة** على طول محور y.
نحرك القطع المكافئ **إزاحة أفقيّة** بمقدار وحدتين إلى اليمين على طول محور x:

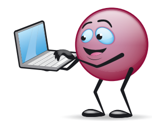
أمامكم تمثيلات جبريّة، أي منها مناسبة للقطع المكافئ بعد الإزاحة؟

$y = (x + 2)^2$ $\quad$ $y = (x - 2)^2$

$y = x^2 + 2$ $\quad$ $y = x^2 - 2$



نبحث إزاحة القطع المكافئ بطريقة أُفقية.



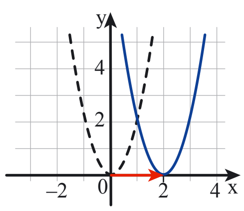
.1 ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة" "מתמטיקה משולבת" في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب" "פעילויות באמצעות מחשב" فعّاليّة "نحرّك القطع المكافئ $y = x^2$ إلى اليمين واليسار" "מזיזים את הפרבולה $y = x^2$ ימינה ושמאלה". نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

فعّاليّة بديلة
في الحاسوب

.2 أزيحوا القطع المكافئ $y = x^2$ وحدتين إلى اليمين على طول محور x (كما يظهر في الرسمة).

أ. قال **يوسف**: التمثيل الجبري للقطع المكافئ بعد الإزاحة هو $y = (x + 2)^2$، لأنّنا أزحنا القطع المكافئ $y = x^2$ على طول محور x بمقدار وحدتين إلى اليمين.

قال **أيمن**: التمثيل الجبري للقطع المكافئ بعد الإزاحة هو $y = (x - 2)^2$، لأن رأس القطع المكافئ هو $(2, 0)$.



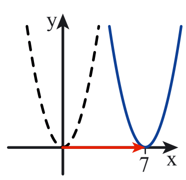
أكملوا الجدول وحددوا أيهما قوله صحيح **يوسف** أم **أيمن**.

x	–6	–2	0	2	4	6
$y = x^2$						
$y = (x - 2)^2$						
$y = (x + 2)^2$						

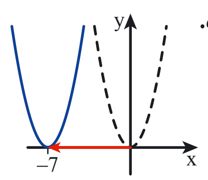
ب. استعينوا بالجدول وارسموا رسمة تقريبيّة للقطع المكافئ $y = (x + 2)^2$. ما هما إحداثيا نقطة الرأس؟

.3 سجّلوا، في كل بند، التمثيل الجبري للقطع المكافئ بعد الإزاحة. افحصوا إجاباتكم بمساعدة جدول قيم.

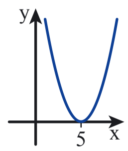
أ.



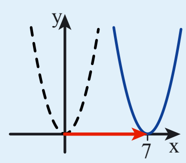
ب.



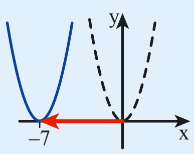
4. أمامكم مثال لبحث الدّالّة $y = (x - 5)^2$.
ابحثوا الدّالّة $y = (x + 5)^2$ حسب المثال.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	**مثال:** $y = (x - 5)^2$	$y = (x + 5)^2$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل	$x = 5$	
إحداثيّا نقطة الرأس	$(5, 0)$	
نوع الرأس	نهاية صغرى	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)	$(5, 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)	$(0, 25)$ لأنّ $(0 - 5)^2 = 25$	
مجال تصاعد الدّالّة	$x > 5$	
مجال نزول الدّالّة	$x < 5$	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)	كلّ مجال باستثناء $x = 5$	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)	لا يوجد أي عدد	

تعرّفنا على قطع مكافئ من العائلة $y = (x - p)^2$
يمكن الحصول على هذه القطوع المكافئة منَ الإزاحة الأفقيّة لـ $y = x^2$ بمقدار p وحدات طول على محور x.
إذا كان $p > 0$ فيتحرك القطع المكافئ إلى اليمين، وإذا كان $p < 0$ فيتحرك القطع المكافئ إلى اليسار.
مثال: في المهمّة 3



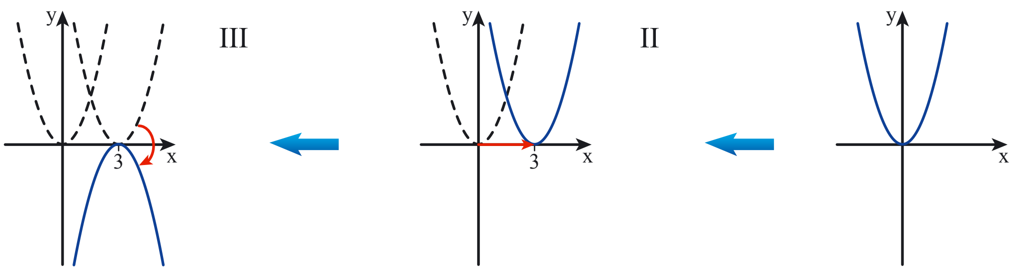
القطع المكافئ $y = (x - 7)^2$, $(p = 7)$
ينتج من **إزاحة** $y = x^2$ بمقدار 7 وحدات إلى **اليمين** على محور x.
محور التماثل هو: $x = 7$
إحداثيّا نقطة الرأس هما: $(7, 0)$



القطع المكافئ $y = (x + 7)^2$, $(p = - 7)$
ينتج من **إزاحة** $y = x^2$ بمقدار 7 وحدات إلى **اليسار** على محور x.
محور التماثل هو: $x = -7$
إحداثيّا نقطة الرأس هما: $(-7, 0)$

نفكّر بـ ...

.5 أزاحت **أماني** القطع المكافئ $y = x^2$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين على محور x، وبعد ذلك عكسته بواسطة محور x بالطريقة التالية:



أمامكم قائمة دوال تربيعيّة:

$y = (x - 3)^2$ $y = -(x - 3)^2$ $y = x^2$ $y = -x^2 - 3$ $y = -x^2 + 3$

أ. اختاروا مِنَ القائمة التمثيل الجبريّ المناسب للقطع المكافئ الذي حصلت عليه **أماني** بعد الإزاحة.

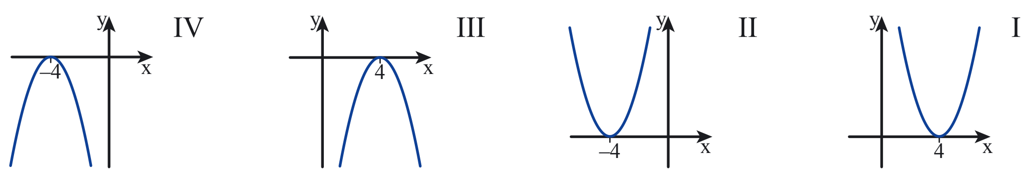
ب. ارسموا رسومات تقريبيّة مناسبة للدوال الأخرى التي تظهر في القائمة.

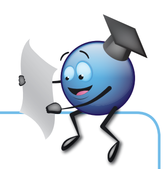
ت. قالت **هدى**: أزحت القطع المكافئ $y = -x^2$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين على طول محور x، وحصلت بعد الإزاحة على قطع مكافئ كالقطع المكافئ الذي حصلت عليه **أماني**.

هل قول **هدى** صحيح؟ اشرحوا.

.6 لائموا كلّ تمثيل جبريّ إلى الرسمة التقريبيّة المناسبة.

أ. $y = (x - 4)^2$ ب. $y = -(x - 4)^2$ ت. $y = (x + 4)^2$ ث. $y = -(x + 4)^2$





تعرّفنا على قطع مكافئ مِنَ العائلة $y = -(x - p)^2$

يمكن الحصول على هذه القطوع المكافئة مِنَ الإزاحة الأفقيّة للقطع المكافئ $y = -x^2$ بمقدار p وحدات على طول محور x.إذا كان $p > 0$ فيتحرك القطع المكافئ إلى اليمين، وإذا كان $p < 0$ فيتحرك القطع المكافئ إلى اليسار.

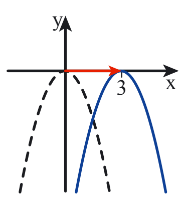
مثال: في المهمّة 5

ينتج القطع المكافئ $y = -(x - 3)^2$ $(p = 3)$

مِنَ الإزاحة الأفقيّة للقطع المكافئ $y = -x^2$ بمقدار

3 وحدات إلى اليمين، محور التماثل هو : $x = 3$

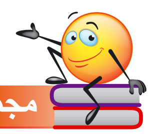
إحداثيّا نقطة الرأس هما: $(3, 0)$



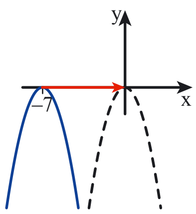
مثال: يمكن الحصول على قطوع مكافئة مِنَ العائلة $y = -(x - p)^2$ بواسطة انعكاس قطوع مكافئة مناسبة مِنَ العائلة $y = (x - p)^2$ أيضًا.

7. ابحثوا الدّالّتين التاليتين: $y = -(x + 4)^2$ $y = -(x - 4)^2$. انسخوا وأكملوا.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = -(x + 4)^2$	$y = -(x - 4)^2$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع الرأس		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$		



مجموعة مهامّ

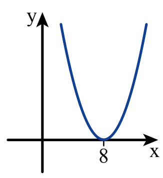


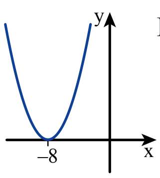
1. أزاحت **رغد** القطع المكافئ $y = -x^2$ بمقدار 7 وحدات إلى اليسار على محور x.
اختاروا من القائمة التمثيل الجبريّ المناسب للقطع المكافئ الذي حصلت عليه **رغد** بعد الإزاحة.

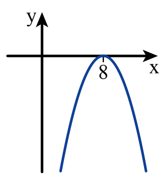
أ. $y = (x + 7)^2$ ب. $y = -(x + 7)^2$ ت. $y = -x^2 + 7$ ث. $y = -x^2 - 7$

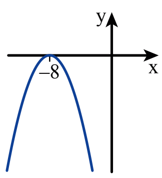
2. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للرسمة التقريبيّة.

أ. $y = (x + 8)^2$ ب. $y = (x - 8)^2$ ت. $y = -(x + 8)^2$ ث. $y = -(x - 8)^2$

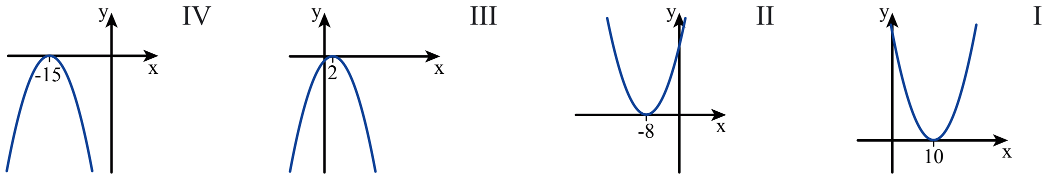
I


II


III


IV


.3 اكتبوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا لكلّ رسمة تقريبيّة.



.4 اكتبوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا.

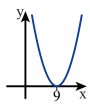
أ. إحداثيّا النهاية الصغرى للقطع المكافئ هما $(-3, 0)$.

ب. يوجد نهاية عظمى للقطع المكافئ، معادلة محور تماثله هي $x = 1$.

ت. القطع المكافئ هو إزاحة للخطّ البيانيّ $y = -x^2$، وهو تنازليّ في المجال $x > 3$.

ث. القطع المكافئ هو إزاحة للخطّ البيانيّ $y = x^2$، وهو موجب في كلّ مجال باستثناء $x = 8$.

.5 ابحثوا الدّالّة $y = -(x - 9)^2$ حسب المثال. انسخوا وأكملوا.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	**مثال:** $y = (x - 9)^2$	$y = -(x - 9)^2$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل	$x = 9$	
إحداثيّا نقطة الرأس	$(9, 0)$	
نوع الرأس	نهاية صغرى	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)	$(x - 9)^2 = 0 \rightarrow x = 9$ إحداثيّا النقطة هما: $(9, 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)	$(0, 81)$	
مجال تصاعد الدّالّة	$x > 9$	
مجال نزول الدّالّة	$x < 9$	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)	كلّ المجال باستثناء $x = 9$	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)	لا يوجد أي عدد	

6. ابحثوا الدّالّتين $y = (x + 1)^2$; $y = -(x + 1)^2$ ، انسخوا وأكملوا.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = (x + 1)^2$	$y = -(x + 1)^2$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع الرأس		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)		

7. جدوا تمثيلات جبريّة للدوال التربيعيّة حسب التفاصيل الآتية في الجدول، انسخوا وأكملوا.

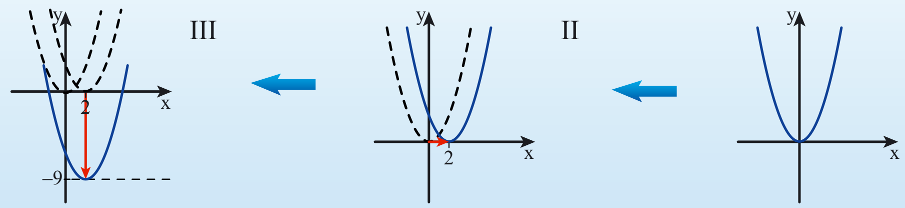
التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = ?$	$y = ?$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		$x = -11$
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع الرأس		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)	$(11, 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة	$x > 11$	
مجال نزول الدّالّة		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)		كلّ المجال باستثناء $x = -11$
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)		

الدرس الثاني: دمج الإزاحة العموديّة والإزاحة الأُفقيّة للقطع المكافئ

رسم **جمال** الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^2$

أزاحها وحدتين إلى اليمين على محور x (إزاحة أُفقية)

أزاحها بعد ذلك 9 وحدات إلى الأسفل (إزاحة عموديّة)



اكتبوا تمثيلًا جبريًّا للقطع المكافئ الذي حصل عليه جمال في كلّ مرحلة.

نبحث قطوع مكافئة ناتجة بواسطة الإزاحة.

.1 نتمعّن في القطع المكافئ الناتج بعد الإزاحة التي نفّذها **جمال** في مهمّة الافتتاحيّة (الرسمة III).

أ. ما محور تماثل القطع المكافئ؟

ب. ما إحداثيّا رأس القطع المكافئ؟

ت. التمثيل الجبريّ للدّالّة هو: $y = (x - 2)^2 - 9$

كيف يمكن أن نجد محور التماثل وإحداثيّا نقطة الرأس مِنَ التمثيل الجبريّ للدّالّة؟

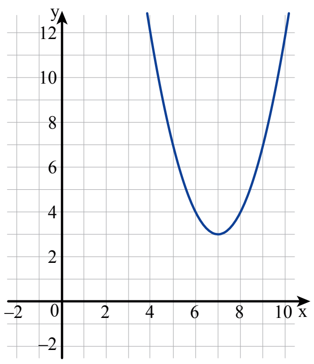
.2 معطى القطع المكافئ $y = (x - 7)^2 + 3$.

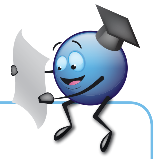
أ. صفوا بالكلمات كيف نتج القطع المكافئ المعطى مِن إزاحة القطع المكافئ $y = x^2$؟

ب. ما محور تماثل القطع المكافئ المعطى؟

ت. ما إحداثيّا نقطة الرأس؟

ث. كيف يمكن أن نجد محور التماثل وإحداثيّا نقطة الرأس مِنَ التمثيل الجبريّ للدّالّة؟





تعرّفنا على قطوع مكافئة مِنَ العائلة $y = (x - p)^2 + k$.

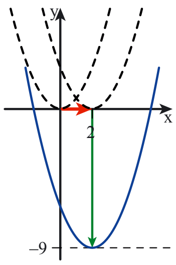
يمكن الحصول على هذه القَطوع المكافئة من دمج الإزاحات (الأُفقيّة والعموديّة) للقطع المكافئ $y = x^2$.

إزاحة أُفقيّة: p وحدات إلى اليمين أو اليسارَ.

إزاحة عموديّة: k وحدات إلى أعلى أو إلى أسفل.

محور التماثل: $x = p$

إحداثيّا نقطة الرأس: (p, k)



مثال: في المهمّة 1

ينتج القطع المكافئ $y = (x - 2)^2 - 9$, $(k = -9 , p = 2)$

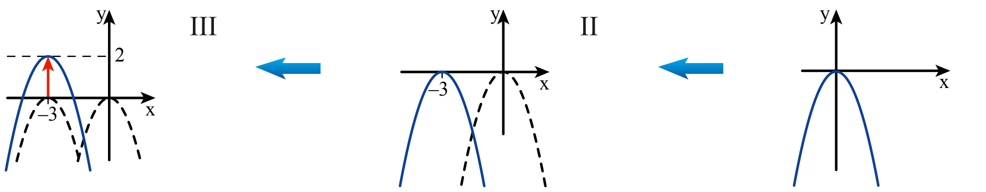
مِنَ الإزاحة الأفقيّة للقطع المكافئ $y = x^2$

بِمقدار وحدتين إلى اليمين وَ 9 وحدات إلى أسفل.

محور التماثل: $x = 2$

إحداثيا نقطة الرأس (نهاية صغرى): $(2, -9)$

3. أزاحت **حليمة** القطع المكافئ $y = -x^2$ إزاحة أُفقيّة وبعد ذلك إزاحة عموديّة، كما هو موصوف في الرسمة:



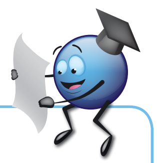
أ. اكتبوا تمثيلًا جبريًّا للقطع المكافئ الذي أزاحته **حليمة** في كلّ مرحلة.

ب. نتمعّن في القطع المكافئ الذي أُزيح (الرسمة III):

ما محور التماثل؟

ما إحداثيّا نقطة الرأس؟

كيف يمكن أن نجد محور التماثل وإحداثيّا نقطة الرأس مِنَ التمثيل الجبريّ للقطع المكافئ؟



تعرّفنا على قطوع مكافئة مِنَ العائلة $y = -(x - p)^2 + k$.

يمكن الحصول على هذه القَطوع المكافئة من دمج الإزاحات (الأُفقيّة والعموديّة) للقطع المكافئ $y = -x^2$.

إزاحة أُفقيّة: p وحدات إلى اليمين أو اليسارَ.

إزاحة عموديّة: k وحدات إلى أعلى أو إلى أسفل.

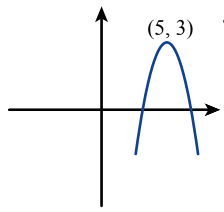
محور التماثل: $x = p$

إحداثيّا نقطة الرأس (نهاية عظمى): (p, k)

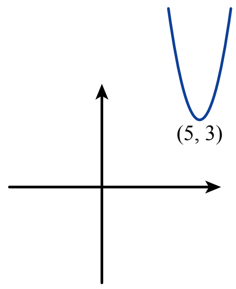
نفكّر بـ ...

4. اكتبوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا لكلّ رسمة تقريبيّة.

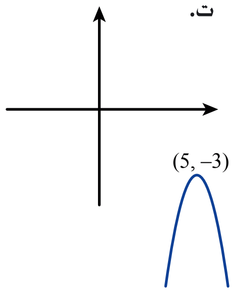
أ.



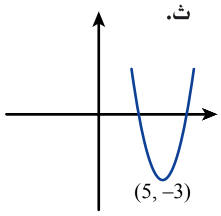
ب.



ت.

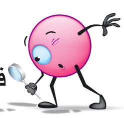


ث.



5. ابحثوا الدّالّتين $y = (x + 1)^2 + 9$; $y = -(x - 1)^2 - 9$، انسخوا وأكملوا.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = (x + 1)^2 + 9$	$y = -(x - 1)^2 - 9$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع الرأس		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)		



في أعقاب...

6. أزاح **رامي** و**جمال** القطع المكافئ الذي يصف الدالة $y = x^2$.
أزاح **رامي** القطع المكافئ 4 وحدات إلى اليمين على محور x (إزاحة أُفقيّة)، بعد ذلك أزاحه 5 وحدات إلى أسفل (إزاحة عموديّة) وفي النهاية قلبه.
نفّذ **جمال** نفس العمليّات، لكن بترتيب عكسيّ:
نفّذ، في البداية، انعكاسًا على القطع المكافئ بواسطة محور x وحصل على القطع المكافئ $y= -x^2$. أزاح بعد ذلك القطع المكافئ "المقلوب" 5 وحدات إلى أسفل (إزاحة عموديّة)، وعندئذ أزاحها 4 وحدات إلى اليمين على محور x (إزاحة أُفقيّة).

أ. اكتبوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا للقطعين المكافئين اللذين حصلا عليهما **رامي** و**جمال**.

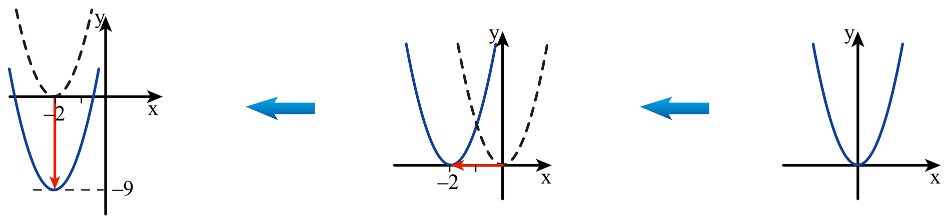
ب. هل هنالك أهمّيّة لترتيب الإزاحة والانعكاس التي ننفّذها على القطع المكافئ؟ أعطوا مثالًا.

مجموعة مهامّ

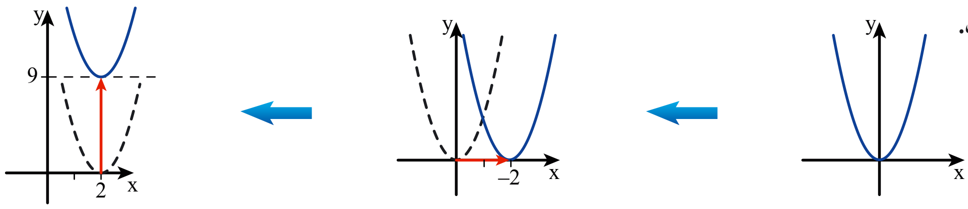
1. أمامكم دالتان $f(x) = (x + 2)^2 - 9$ $\quad h(x) = (x - 2)^2 + 9$

لائموا كلّ سلسلة إزاحات إلى الدّالّة المناسبة.

أ.

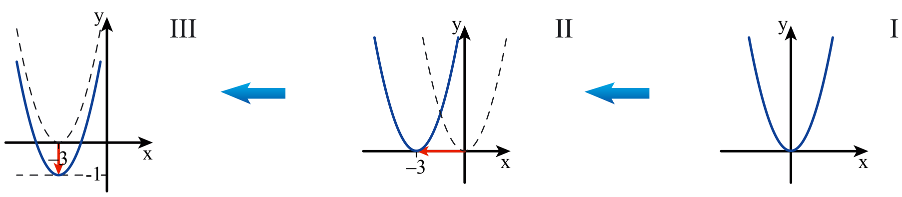


ب.

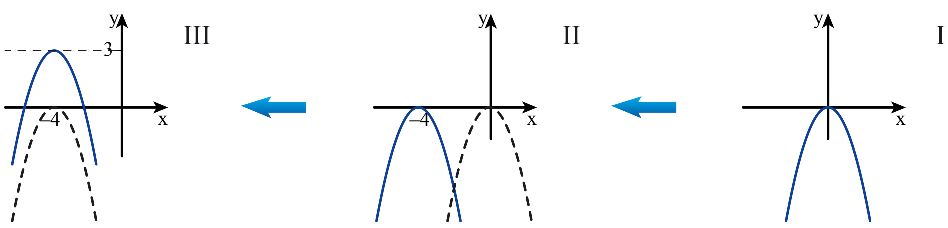


2. صفوا، في كلّ بند، بالكلمات سلسلة الإزاحات التي نُفّذت، وسجّلوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا لكلّ مرحلة.

أ.



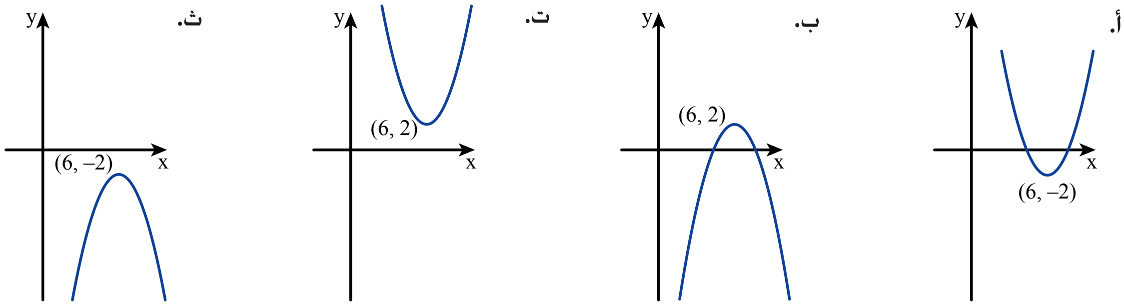
ب.



3. أ. اكتبوا سلسلة إزاحات مِنَ القطع المكافئ $y = x^2$ إلى القطع المكافئ $y = (x - 6)^2 + 4$.

ب. ارسموا رسمة تقريبيّة مناسبة للقطع المكافئ الناتج بعد الإزاحة، وسجّلوا إحداثيّا نقطة رأس القطع المكافئ ومحور تماثله.

4. اكتبوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا لكلّ رسمة تقريبيّة.



5. أمامكم قطعان مكافئان.

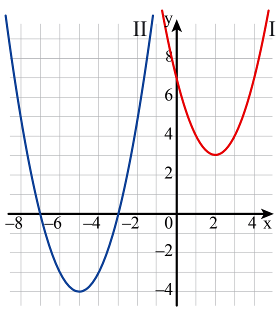
أ. سجّلوا إحداثيّا نقطة رأس كلّ قطع مكافئ.

ب. سجّلوا محور التماثل لكلّ قطع مكافئ.

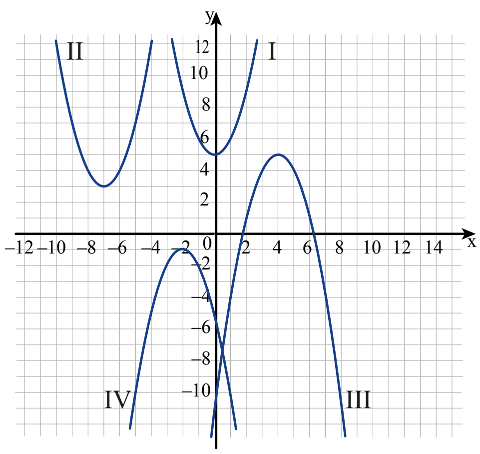
ت. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للقطع المكافئ المناسب:

$y = (x - 2)^2 + 3$

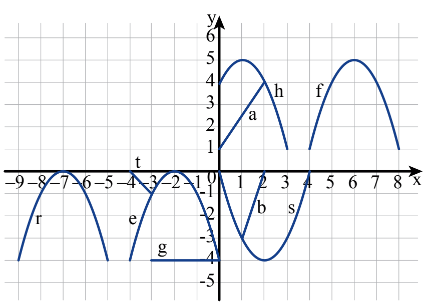
$y = (x + 5)^2 - 4$



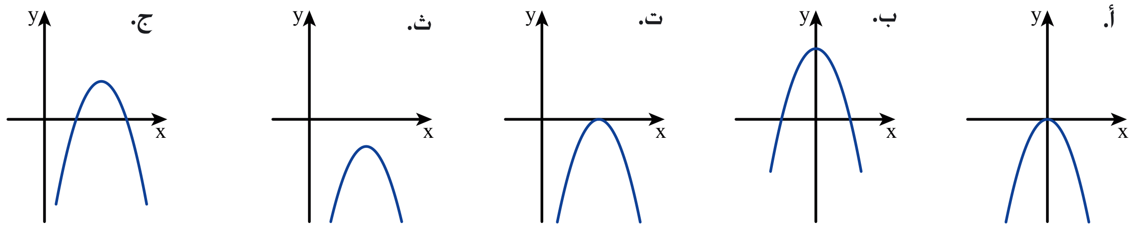
6. جدوا لكلّ قطع مكافئ محور التماثل وإحداثيّا نقطة الرأس، وسجّلوا التمثيل الجبريّ المناسب.



7. العنوان "חג שמח" مكوّن من أجزاء مستقيمات ومن أجزاء قطوع مكافئة. سجّلوا تمثيلًا جبريًّا لكلّ خطّ بيانيّ.



8. أمامكم رسوم تقريبيّة لقطوع مكافئة. أعطوا كلّ رسمة تقريبية مثالًا لتعبير جبريّ مناسب.



9. ابحثوا الدوال التالية. انسخوا وأكملوا.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = x^2 + 1$	$y = (x - 1)^2$	$y = (x + 1)^2 + 1$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة			
محور التماثل			
إحداثيّا نقطة الرأس			
نوع الرأس			
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)			
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)			
مجال تصاعد الدّالّة			
مجال نزول الدّالّة			
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)			
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)			

الدرس الثالث: نقاط تقاطع القطع المكافئ مع المحاور

هل يتقاطع كلّ قطع مكافئ مع محور y؟
هل هنالك قطع مكافئ يتقاطع مع محور y أكثر مِن مرّة واحدة؟
هل يتقاطع كلّ قطع مكافئ مع محور x؟
هل هنالك قطع مكافئ يتقاطع مع محور x أكثر مِن مرّة واحدة؟
إذا كانت الإجابة نعم فأعطوا مثالًا. وإذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.
سنتعلّم عن كيفيّة إيجاد نقاط تقاطع القطع المكافئ مع المحاور بواسطة التمثيل الجبريّ للدّالّة.

تقاطع مع محور y

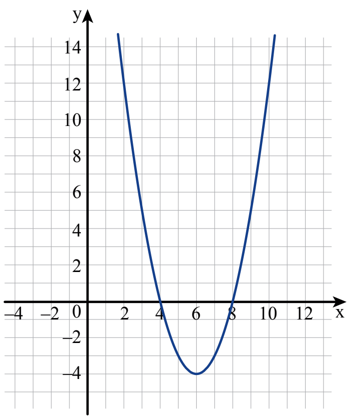
1. رسمت **هدى** قطعًا مكافئًا.

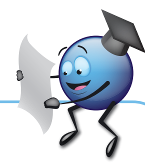
أ. قالت **هدى**: لا توجد نقاط تقاطع للقطع المكافئ الذي رسمته مع محور y.
هل قول **هدى** صحيح؟

ب. ما التمثيل الجبريّ للقطع المكافئ الذي رسمته **هدى**؟

ت. عوّضوا $x = 0$ في التمثيل الجبريّ للدّالّة المناسبة للقطع المكافئ الذي رسمته **هدى**. ما الإحداثيّ y الذي حصلتم عليه؟

ث. هل يتقاطع القطع المكافئ مع محور y؟





هنالك نقطة تقاطع لكلّ قطع مكافئ مع محور y.
يمكن أن نجد إحداثيّا نقطة التقاطع بواسطة تعويض $x = 0$ في التمثيل الجبريّ للدّالّة.

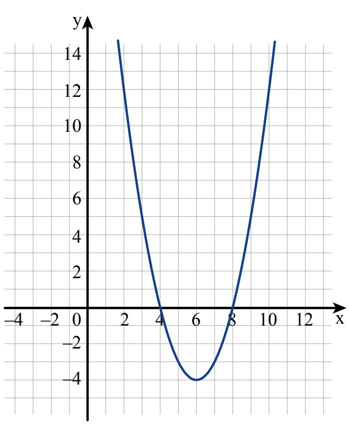
مثال:
إحداثيّا نقطة تقاطع $y = (x - 5)^2 + 3$ مع محور y: $(0, 28)$، لأنّ $(0 - 5)^2 + 3 = 28$.

تقاطع مع محور x

2. أمامكم رسمة القطع المكافئ الذي تعبيره الجبريّ $y = (x - 6)^2 - 4$.

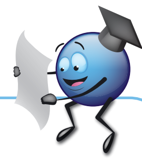
أ. قال **سلام**: وجدت إحداثيّات النقاط الصفريّة للدّالّة حسب الرسمة.
جدوا النقاط الصفريّة (نقاط تقاطع القطع المكافئ مع محور x) بطريقة **سلام**.

ب. قالت **منى**: وجدت إحداثيّات النقاط الصفريّة دون الرسمة.
عوّضت $y = 0$: $\quad 0 = (x - 6)^2 - 4$
وقمت بحلّ المعادلة كالتالي: $\quad 4 = (x - 6)^2$
$x - 6 = 2$ أو $x - 6 = -2$
أكملوا حلّ **منى**. قارنوا مع إجاباتكم في بند أ.



نفكّر بـ ...

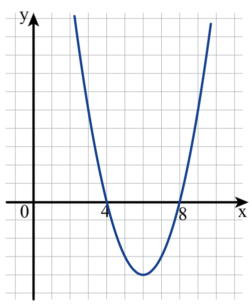
3. أيّ طريقة، حسب رأيكم، أسهل لإيجاد النقاط الصفرية للقطع المكافئ: الطريقة البيانيّة أم الطريقة الجبريّة؟
اذكروا حسنة واحدة وسيئة واحدة لكلّ طريقة.



للتذكير

النقاط الصفرية للدّالّة هي نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع محور x.
الإحداثيّ y للنقطة الصفرية هو 0.

مثال: النقطتان الصفريتان، في المهمّة 2، للدّالّة $y = (x - 6)^2 - 4$
هما (8 ,0) (4 ,0) .
يتقاطع الخطّ البيانيّ لهذا القطع المكافئ مع محور x في هاتين النقطتين.



4. جدوا، في كلّ بند، نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحاور.
ارسموا رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدّالّة.

أ. $y = (x + 3)^2$ ت. $y = (x + 3)^2 - 4$

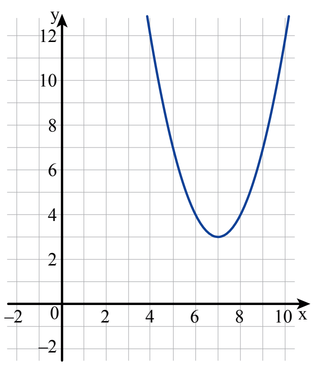
ب. $y = -(x + 3)^2$ ث. $y = -(x + 3)^2 + 4$

نفكّر بـ ...

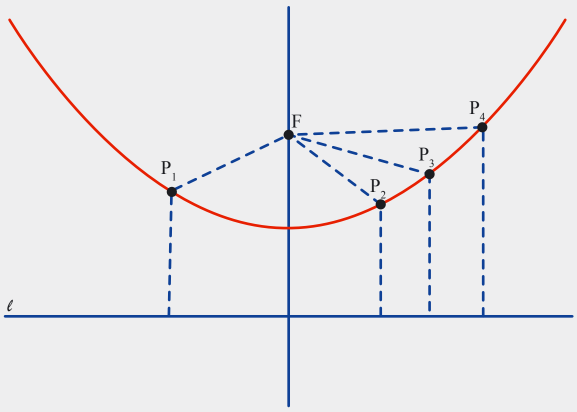
5. رسمت **مريم** القطع المكافئ وقالت:
وجدت قطعًا مكافئًا لا توجد له نقاط تقاطع مع المحاور.

أ. هل قول **مريم** صحيح؟
إذا كانت الإجابة نعم فاشرحوا إجاباتكم بطريقة جبريّة وبطريقة بيانيّة.
إذا كانت الإجابة لا فجدوا نقاط التقاطع مع المحاور.

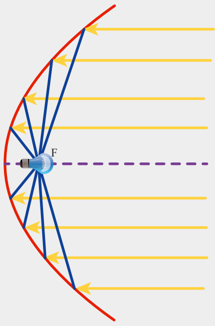
ب. قالت **سامية:** يكفي أن ننظر إلى نقطة رأس القطع المكافئ لتحديد هل توجد نقطة صفريّة؟
افحصوا هل توجد نقاط صفرية للقطع المكافئ حسب اقتراح **سامية**؟



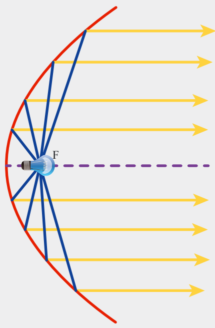
تعرّفنا على القطع المكافئ كخطّ بيانيّ للدّالّة $y = x^2$ أو أي إزاحة معيّنة له. هنالك تعريف هندسيّ للقطع المكافئ:
الخطّ الناتج مِن جميع النقاط التي بُعدها عن نقطة معطاة (F) (نسَمّيها **بؤرة**) يساوي بُعد هذه النقاط عن مستقيم معطى (ℓ) نسمّيه "**الدليل**".

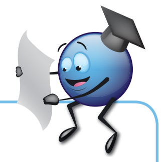


نسمّي السطح الّذي ينتج بواسطة دوران قطع مكافئ حول محور y **"سطح القطع المكافئ"**. هنالك صفات هندسيّة وفيزيائيّة مهمّة لسطح القطع المكافئ. مثلًا: عندما تصطدم أشعة الضوء أو الأمواج بالدليل بشكل عموديّ تنعكس جميعها إلى البؤرة. تُستخدم هذه الصفة لتركيز أشعة الضوء في التلسكوب والرادار. عندما تصطدم، في هذه الحالة، أشعة ضوء أو أمواج قصيرة نسبيًّا بالمرآة أو بسطح شكله كشكل القطع المكافئ تنعكس إلى نقطة استقبال واحدة تقع في مركز القطع المكافئ. هكذا تزداد شدّتها وتتحسّن جودة استقبالها.



تُستغل هذه الصفة للقطع المكافئ باتجاه عكسيّ أيضًا. المصابيح والأضواء الكاشفة (مثلًا: مصابيح السيّارات) مكوّنة من مرآة سطحها قطع مكافئ حيث توجد لمبة في بؤرة القطع المكافئ. تنعكس أشعة الضوء التي مصدرها مِنَ اللمبَة بواسطة المرآة باتجاه واحد عموديّ لدليل القطع المكافئ. وهكذا تنتج حزمة ضوء شدّتها قوية جدًّا.

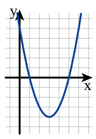




لإيجاد إحداثيّات النقاط الصفرية بطريقة جبريّة نعوّض في الدالّة $y = 0$ ونحلّ المعادلة.

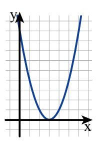
- إذا كان للمعادلة حلّين فيتقاطع القطع المكافئ مع محور x في نقطتين، لذا يوجد للدّالّة نقطتين صفريتين.

مثال:

الدّالّة	المعادلة	حلول المعادلة	النقاط الصفريّة	الخطّ البيانيّ
$y= (x - 3)^2 - 4$	$(x - 3)^2 - 4 = 0$	$x_1 = 1 \quad x_2 = 5$	$(1, 0)\ (5, 0)$	

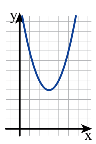
- إذا كان للمعادلة حلًّا واحدًا فيتقاطع القطع المكافئ مع محور x في نقطة واحدة؛ لذا توجد للدّالّة نقطة صفريّة واحدة.

مثال:

الدّالّة	المعادلة	حلّ المعادلة	النقطة الصفريّة	الخطّ البيانيّ
$y = (x - 3)^2$	$(x - 3)^2 = 0$	$x = 3$	$(3, 0)$	

- إذا لم نجد حلًّا للمعادلة فلا يتقاطع القطع المكافئ مع محور x؛ لذا لا توجد للدالة نقاط صفريّة.

مثال:

الدّالّة	المعادلة	حلول المعادلة	النقاط الصفريّة	الخطّ البيانيّ
$y =(x - 3)^2 + 4$	$(x - 3)^2 + 4 = 0$	لا يوجد حل	لا توجد نقاط صفرية	

6. جدوا، في كلّ بند، نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحاور.
سجّلوا المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة والمجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة.

أ. $y = (x - 5)^2$ ت. $y = (x - 5)^2 - 9$ ج. $y = -(x - 5)^2 + 1$

ب. $y = (x - 5)^2 + 3$ ث. $y = (x - 5)^2 - 6$ ح. $y = -(x - 5)^2 + 3$

محور التماثل والنقاط الصفريّة

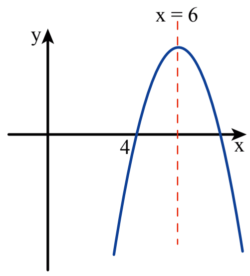
نفكّر بـ ...

7. أ. ارسموا، في هيئة المحاور، 3 قطوع مكافئة كما ترغبون.
جدوا في كلّ قطع مكافئ محور التماثل والنقطة الصفريّة (إنْ وُجدت).

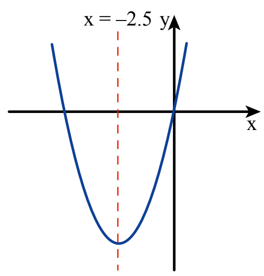
ب. قالت **أميرة**: النقاط الصفريّة (إنْ وُجدت) في جميع الدوال هي نقاط تماثل لمحور y.
هل قول **أميرة** صحيح؟ اشرحوا.

8. أ. جدوا النقاط الصفريّة الأخرى في كلّ قطع مكافئ.

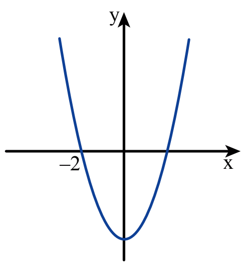
I



II

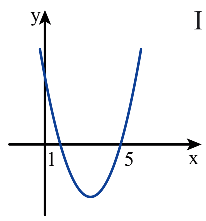


III

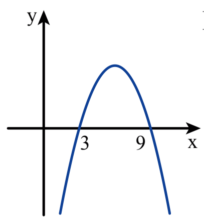


ب. جدوا محور التماثل في كلّ قطع مكافئ.

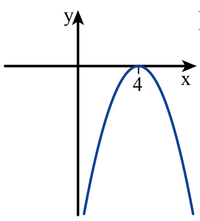
I

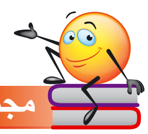


II



III





مجموعة مهامّ

1. ارسموا، في كلّ بند، رسمة تقريبيّة مناسبة وجدوا إحداثيّات نقاط التقاطع مع المحاور.

أ. $h(x) = (x + 9)^2 + 1$

ب. $m(x) = (x - 1)^2 - 9$

ت. $f(x) = (x + 9)^2 - 1$

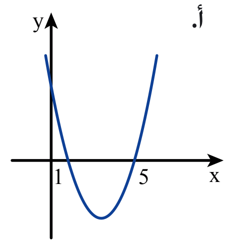
ث. $g(x) = -(x + 1)^2$

ج. $t(x) = -(x + 1)^2 + 9$

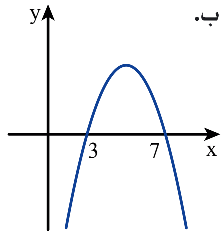
ح. $r(x) = (x - 1)^2 + 9$

.2 سجّلوا، في كلّ بند، المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة، والمجال الذي تكون فيه سالبة.

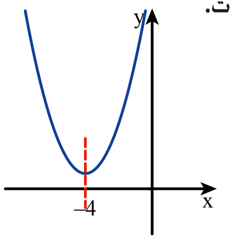
أ.



ب.

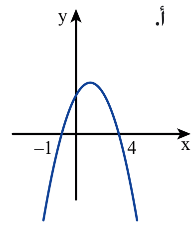


ت.

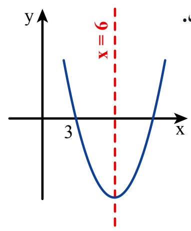


.3 سجّلوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الصفريّة والمجالات التي تكون فيها الدّالّة موجبة وسالبة.

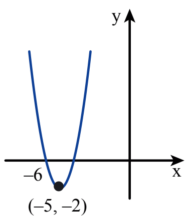
أ.



ب.

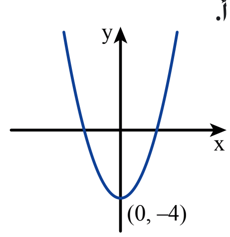


ت.

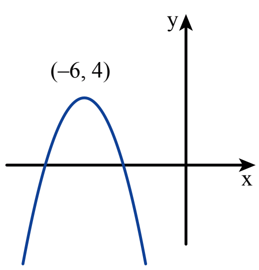


.4 سجّلوا، في كلّ بند، تمثيلًا جبريًّا مناسبًا للدّالّة.
سجّلوا إحداثيّات النقاط الصفريّة والمجالات التي تكون فيها الدّالّة موجبة وسالبة.

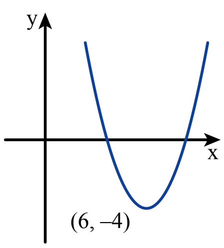
أ.



ب.



ت.



.5 أزيحوا القطع المكافئ الذي يمثّل الدالة $y = x^2$ ثلاث وحدات إلى اليمين وأربع وحدات إلى الأسفل.
أ. اكتبوا التمثيل الجبريّ للدّالّة بعد الإزاحة.
ب. أكملوا **بطاقة هُويّة** القطع المكافئ الناتج بعد الإزاحة.

الدرس الرابع: نحلّ معادلات بطرق مختلفة

تعلّمنا كيفيّة إيجاد إحداثيّات النقاط الصفريّة للدّالّة التربيعيّة بواسطة حلّ معادلة أو بواسطة الرسم البيانيّ.

نستعين بطرق مختلفة لحلّ المعادلات.

1. حلّوا.

أمثلة:

$(x-1)^2 = 9$

التعبير داخل الأقواس يجب أن يكون 3 أو -3

$x-1=3$ أو $x-1=-3$

$x_2 = 4$ ، $x_1 = -2$

$\underbrace{(x-1)^2}_{\text{عدد غير سالب (موجب أو صفر)}} \neq \underbrace{= -9}_{\text{عدد سالب}}$

لا يوجد حل

أ. $(x+5)^2 = 0$

ب. $36 + x^2 = 0$

ت. $x^2 - 100 = 0$

ث. $(4x+1)^2 = 0$

ج. $(x-5)^2 + 9 = 0$

ح. $(x-5)^2 - 3 = 0$

2. اكتبوا كحاصل ضرب وحلّوا المعادلة.

أمثلة:

نكتب كحاصل ضرب بواسطة إخراج عامل مشترك

$x^2 = 5x$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x-5) = 0$

$x - 5 = 0$ أو $x = 0$

$x_2 = 5$ ، $x_1 = 0$

نكتب كحاصل ضرب حسب قوانين الضرب المختصرة

$x^2 + 8x + 16 = 0$

$(x+4)^2 = 0$

$x = -4$

نكتب كحاصل ضرب حسب تحليل ثلاثيّ الحدود التربيعيّ

$x^2 + 9x = -18$

$x^2 + 9x + 18 = 0$

$(x+3)(x+6) = 0$

$x + 3 = 0$ أو $x + 6 = 0$

$x_2 = -3$ ، $x_1 = -6$

أ. $x^2 + 3x = 0$

ب. $2x - x^2 = 0$

ت. $x^2 - 25 = 0$

ث. $36 - x^2 = 0$

ج. $x^2 - 6x + 9 = 0$

ح. $x^2 - 5x = 14$

للتذكير

إذا كان حاصل الضرب يساوي صفر فيجب أن يكون أحد العوامل صفرًا على الأقلّ.

3. جدوا إحداثيات النقاط الصفريّة لكلّ دالّة.

أ. $y = x^2 - 1$
ب. $y = x^2 + 6x + 9$
ت. $y = x^2 - 14x + 49$
ث. $y = 81 - x^2$
ج. $y = x^2 + 8x + 16$
ح. $y = x^2 - 2x + 1$

نفكّر بـ ...

4. سألت المعلّمة: ما النقاط الصفريّة للدّالّة $y = 36 - x^2$؟

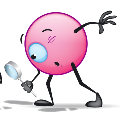
سجّلت التلميذتان المعادلة $0 = 36 - x^2$

بدأت **سعاد** بالحلّ كالتالي: $(6 - x)(6 + x) = 0$

بدأت **ليلى** بالحلّ كالتالي: $x^2 = 36$

هل حصلتا على نفس الحلّ؟

ما النقاط الصفريّة للدّالّة؟



في أعقاب...

5. هنالك أخطاء في حلول المعادلات التالية. جدوا هذه الأخطاء وصحّحوها.

أ. $x^2 - 25 = 24$

$(x - 5)(x + 5) = 24$

$x - 5 = 0$ أو $x + 5 = 0$

$x_1 = -5 \quad x_2 = 5$

ب. $(x - 5)^2 = 4$

$x - 5 = 4$ أو $x - 5 = -4$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 9$

6. حلّوا.

أ. $x(x + 1) = 0$
ب. $x(x + 1) = 6$
ت. $x(x + 1) = 42$
ث. $x(x - 1) = 42$
ج. $(x - 1)x = 90$
ح. $x^2 + x = 20$

7. حلّوا.

أ. $5x^2 = 10x$
ب. $x^2 = 12x$
ت. $4 - x^2 = 0$
ث. $x^2 + 9x + 18 = 0$
ج. $x(x + 1) = 72$
ح. $x^2 + 49 = 0$
خ. $6x^2 + x = 0$
د. $49 - 14x + x^2 = 0$
ذ. $3x(x - 5) = 0$
ر. $x^2 - x = 30$
ز. $x^2 + 4x = 5$
س. $(x - 1) x = 16 - x$

8. اكتبوا، في كلّ بند، معادلة تربيعيّة حلولها هي:

أ. $x_1 = -5 \quad x_2 = 5$
ب. $x_1 = x_2 = 5$
ت. $x_1 = -5 \quad x_2 = 2$
ث. $x_1 = 0 \quad x_2 = 5$

مجموعة مهامّ

1. حلّوا.

أ. $2x^2 = 50$
ت. $-x^2 - 2 = 0$
ج. $x^2 + 12x + 36 = 0$
ب. $(x + 1)^2 = 4$
ث. $x^2 + 12x + 20 = 0$
ح. $4x(x + 4) = 0$

2. حلّوا.

أ. $x(x - 10) + 25 = 0$
ب. $(x^2 - 64)(2x^2 - 8) = 0$
ت. $x^3 - 2x^2 + x = 0$

3. جدوا النقاط الصفريّة.

أ. $y = x^2 + 16$
ت. $y = 81 - x^2$
ج. $y = x^2 + x - 6$
ب. $y = x(x + 6)$
ث. $y = x^2 - 10x + 25$
ح. $y = -(x - 1)^2 + 4$

4. اكتبوا، في كلّ بند، معادلة تربيعيّة حلولها هي:

أ. $x = 3$
ب. $x_1 = x_2 = -3$
ت. لا يوجد حلّ للمعادلة
ث. $x_1 = -2 \quad x_2 = 2$
ج. $x_1 = 3 \quad x_2 = 2$

5. ابحثوا الدوال. انسخوا وأكملوا.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = x^2 - 4$	$y = -(x - 4)^2$	$y = (x + 4)^2 - 1$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة			
محور التماثل			
إحداثيّا نقطة الرأس			
نوع الرأس			
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)			
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)			
مجال تصاعد الدّالّة			
مجال نزول الدّالّة			
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)			
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)			

الدرس الخامس: معادلات ومسائل

نبني مستطيلًا مساحته 16 سنتمترًا مربّعًا مِن حبل طوله 20 سم.
ما أطوال أضلاع المستطيل؟

نستعين بحلّ معادلات لحلّ مسائل كلاميّة.

1. نتطرّق إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

أ. ارسموا مستطيلًا محيطه 20 وحدة على ورقة مقسّمة إلى تربيعات. ما أطوال أضلاع المستطيل الذي رسمتموه؟ ما مساحته؟
قارنوا إجاباتكم بإجابات زملائكم. هل رسمتم المستطيل نفسه؟
كم مستطيلًا كهذا يمكن أن نرسم؟

ب. نرمز: x - طول أحد أضلاع المستطيل (بالسم). اكتبوا تعبيرًا جبريًّا لطول الضلع الثاني للمستطيل.

ت. أي قيم x مناسبة للمسألة؟

ث.سجّل **سامي** المعادلة:

$$\underbrace{x}_{\text{طول الضلع الأول}} \cdot \underbrace{(10-x)}_{\text{طول الضلع الثاني}} = \underbrace{16}_{\text{مساحة المستطيل}}$$

بدأ يحلّ كالتالي:

$$x(10-x) = 16$$
$$10x - x^2 - 16 = 0$$
$$-x^2 + 10x - 16 = 0 \;/\cdot(-1)$$
$$x^2 - 10x + 16 = 0$$
$$(x-2)(x-8) = 0$$

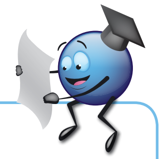
أكملوا حلّ **سامي**.

ج. ما أطوال أضلاع المستطيل؟ كم حلًّا يوجد للمعادلة؟ كم حلًّا يوجد للمسألة؟ اشرحوا.

2. طول أحد أضلاع المستطيل ضعفا طول الضلع الثاني للمستطيل.
مساحة المستطيل 72 سنتمترًا مربّعًا. ما أطوال الأضلاع؟

3. أطوال أضلاع مثلّث قائم الزاوية هي ثلاثة أعداد طبيعيّة متتالية. جدوا أطوال أضلاع المثلث.

4. العدد الأوّل أكبر بـ 6 مِنَ العدد الثاني، حاصل ضرب العددين 40.
جدوا العددين (اكتبوا جميع الإمكانيّات).



عندما نحلّ معادلة تربيعيّة يجب أن نفحص معنى الحلّ بالنسبة لمضمون المسألة.

أمثلة

- في المهمّة 1 حلول المعادلة هما $x_1 = 2,\ x_2 = 8$، ومِن ناحية مضامين المسألة، الحلّان مناسبان لمستطيل واحد وهو المستطيل الذي قياساته 2×8.
- في المهمّة 4 حلول المعادلة هما $x_1 = 4,\ x_2 = -10$، ومِن ناحية مضامين المسألة، هنالك إمكانيّتان لأزواج مِنَ الأعداد المناسبة: 4 وَ 10 أو (10−) وَ (4−).

مجموعة مهامّ

1. نبني مستطيلًا مساحته 50 سنتمترًا مربّعًا مِن حبل طوله 30 سم.

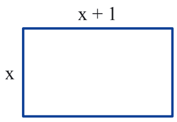
أ. سجّلوا تعابير جبريّة مناسبة لأطوال أضلاع المستطيل.

ب. سجّلوا أطوال أضلاع المستطيل.

2. طول أحد أضلاع المستطيل أكبر بسنتمتر واحد من طول الضلع الثاني. مساحة المستطيل 20 سنتمترًا مربّعًا.

(انظروا الرسمة التوضيحيّة، x سم، $x > 0$).

اكتبوا معادلة مناسبة، حلّوها وجدوا أطوال أضلاع المستطيل.



3. محيط مستطيل 18 سم.

أ. x يمثّل طول أحد الأضلاع (x سم، $x > 0$).

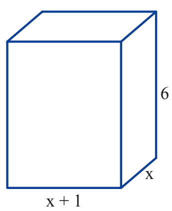
اكتبوا تعبيرًا جبريًّا مناسبًا لطول الضلع الثاني.

ب. جدوا أطوال أضلاع المستطيل إذا كان معطى أن مساحته 20 سنتمترًا مربّعًا.

4. معطى حجم صندوق 120 سنتمترًا مكعّبًا.

(أُعِدّت الرسمة للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم، $x > 0$).

جدوا أطوال أضلاع الصندوق.



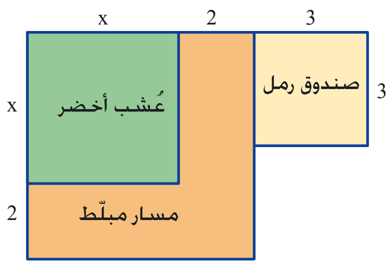
5. أمامكم رسمة حديقة ألعاب.

(أُعِدّت الرسمة للتوضيح، جميع الزوايا في الرسمة قائمة،

قياسات الطول معطاة بالسم، $x > 0$).

المساحة الكليّة للحديقة 90 مترًا مربّعًا.

جدوا مساحة المسار المبلط.

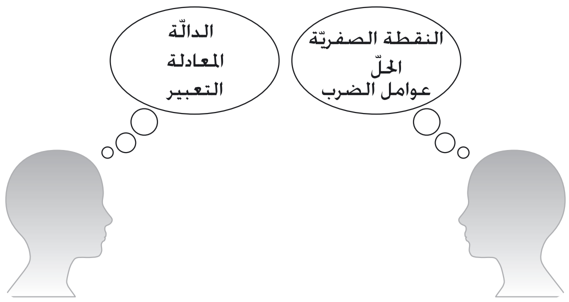


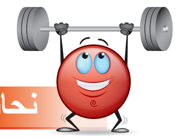
6. مَدوا طولي ضلعين متقابلين في مربّع بـ 3 سم، وقصّروا

الضلعين الآخرين بـ 1 سم.

نتج مستطيل مساحته أكبر بـ 15 سنتمترًا مربّعًا من مساحة المربّع الأصلي.

ما طول ضلع المربّع؟ ما مساحته؟





نحافظ على لياقة رياضيّة

تعابير ومعادلات

1. افتحوا الأقواس وبسّطوا التعابير الجبريّة التالية.

أ. $(x - 7)^2$

ب. $-(x - 6)^2 - 10$

ت. $(x + 5)\ (x - 5)$

ث. $-(x - 7)^2$

ج. $2x(x + 6)$

ح. $(x + 4)^2 - 3^2$

2. حلّلوا التعابير التالية إلى عوامل.

أمثلة:

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25) = 2(x + 5)\ (x - 5)$

أ. $x^2 + 10x + 25$

ب. $2x^2 - 18$

ت. $49 - 14x + x^2$

ث. $64 - x^2$

ج. $5x^2 - 10$

ح. $x^2 - 10x + 25$

3. حلّوا.

أ. $0 = x^2 - 9$

ب. $0 = -x^2 - 9$

ت. $0 = (x - 9)^2 + 1$

ث. $0 = (x - 9)^2 - 1$

ج. $0 = -(x - 9)^2 + 1$

ح. $0 = -(x - 9)^2 - 1$

4. حلّوا.

أ. $4x^2 = 0$

ب. $(x - 4)^2 = 0$

ت. $4x(x + 4) = 0$

ث. $(x - 4)(x + 4) = 0$

ج. $(x + 4)^2 + 4 = 0$

ح. $x^2 + 4 = 0$

5. أمامكم مستطيلان.

(أُعِدّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم، $x > 0$.)

أ. اكتبوا تعبيرًا جبريًّا لمساحة كلّ مستطيل بالسنتمتر المربّع.

ب. مساحة المستطيلان متساوية. جدوا أطوال أضلاع المستطيلين.