الوحدة التاسعة عشرة: متوازي الأضلاع

الدرس الأوّل: تعريف متوازي الأضلاع

أمامكم متوازيات أضلاع تُستعمل في البيئة المحيطة وفي الحياة اليوميّة.

- رُتبة في الجيش:

- في أعلام الدول:

لأيّ دولة ينتمي هذا العَلم؟

لأيّ دولة ينتمي هذا العَلم؟

- في إشارات المرور والسير:

على ماذا تدل هذه الإشارة المروريّة؟

على ماذا تدل هذه الإشارة المروريّة؟

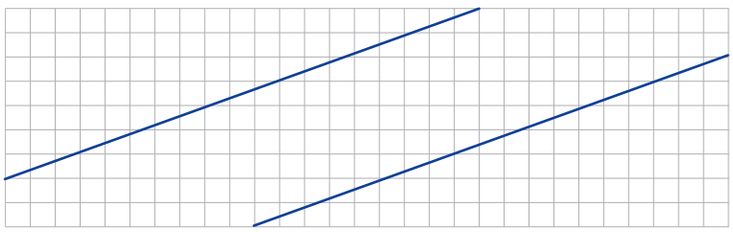
- في رُزم الطعام:

ابحثوا في البيت والإنترنت عن متوازيات أضلاع إضافيّة موجودة في البيئة المحيطة.

نعرّف متوازي الأضلاع ونتعلّم كيفيّة تمييزه.

1. ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة" "מתמטיקה משולבת" في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب "פעילויות באמצעות מחשב" فعّاليّة "أزواج من متوازيات الأضلاع " "זוגות של מקבילים". يمكنكم تعريف متوازي الأضلاع بواسطة هذه الفعّاليّة.
نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

2. أ. أمامكم رسمة لزوج مِنَ المستقيمات المتوازية. انسخوا الرسمة على ورقة مقسمة إلى تربيعات.
ارسموا زوجًا إضافيًّا من متوازيات الأضلاع التي تتقاطع مع الزوج الأوّل.



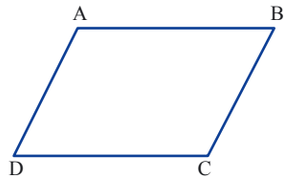
أيّ شكل رباعيّ نتج؟

ب. ارسموا شكلين رباعيّين إضافيّين يختلفان عن السابق.

ت. أي أشكال رباعيّة نتجت؟

بماذا تتشابه وبماذا تختلف عن بعضها: هل بمقدار الزاوية، بأطوال الأضلاع أم بتوازي الأضلاع؟

تعريف: نسمّي الشكل الرباعيّ الذي فيه زوج مِنَ الأضلاع المتقابلة المتوازية **"متوازي الأضلاع"**.



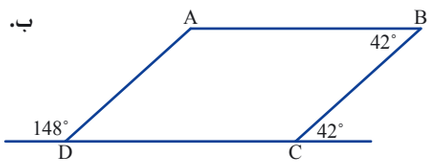
أمامكم رسمة ABCD متوازي أضلاع.

AB || DC

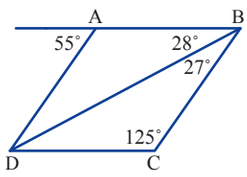
AD || BC

3. الأشكال الرباعيّة التي أمامكم هي متوازيات أضلاع.
احسبوا، في كلّ بند، مقدار زوايا متوازي الأضلاع حسب معطيات الرسمة.

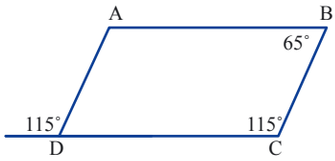
أ.



ب.

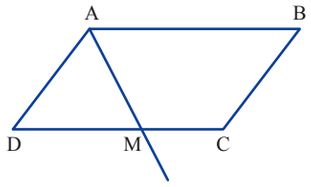


ت.

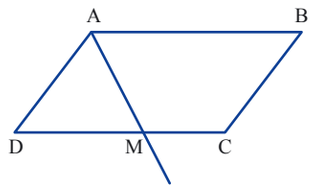


4. على ماذا اعتمدتم في مهمّة 3 كي تجدوا مقدار الزوايا؟

5. معطى الشكل الرباعيّ ABCD هو متوازي أضلاع.
AM ينصّف الزاوية ∢DAB
∢DMA = 65°
احسبوا مقدار زوايا المثلّث ΔADM.



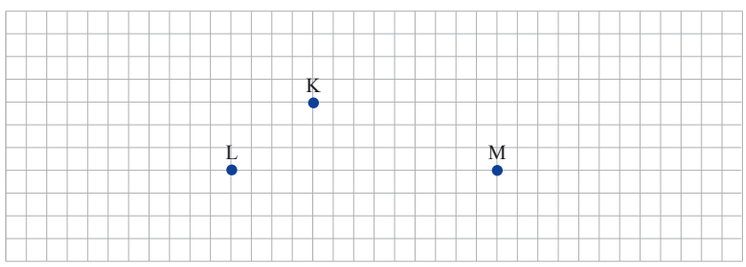
6. معطى الشكل الرباعيّ ABCD هو متوازي أضلاع.
AM ينصّف الزاوية ∢DAB
المطلوب برهانه المثلّث ΔADM متساوي الساقين.



مجموعة مهامّ

1. أ. جدوا متوازي أضلاع في الصورة.
أ. أعطوا أمثلة لمتوازيات أضلاع في بيئتكم المحيطة.

2. النقاط K, L وَ M هي ثلاثة رؤوس في متوازي أضلاع. انسخوها على ورقة مقسّمة إلى تربيعات.
أ. ارسموا متوازي أضلاع، استعينوا بالتعريف.



ب. ارسموا متوازييْ أضلاع إضافيّين بحيث تكون النقاط K, L, وَ M ثلاثة رؤوس في كلّ واحد منهما.

3. ابنوا بمساعدةمسطرة وفرجار متوازي أضلاع حسب تعريفه.
صِفوا البناء.

4. ارسموا، في كلّ بند، شكلًا رباعيًّا **ليس** متوازي أضلاع.

أ. يوجد في الشكل الرباعيّ زوج مِنَ الأضلاع المتوازية.

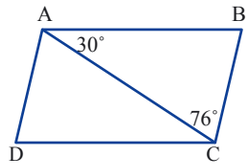
ب. يوجد في الشكل الرباعيّ زوج مِنَ الأضلاع المتقابلة المتساوية في الطول.

ت. يوجد في الشكل الرباعيّ زوج مِنَ الزوايا المتقابلة المتساوية بالمقدار.

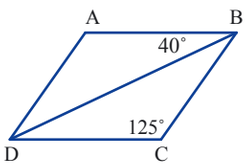
5. الأشكال الرباعيّة التي أمامكم متوازيات أضلاع.

احسبوا، في كلّ بند، مقدار زوايا متوازي الأضلاع حسب المعطيات.

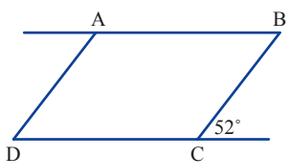
أ.



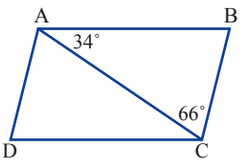
ت.



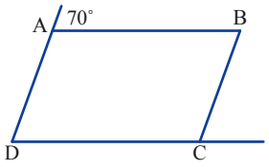
ج.



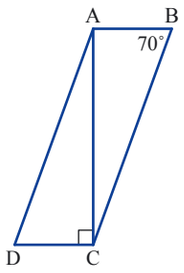
ب.



ث.



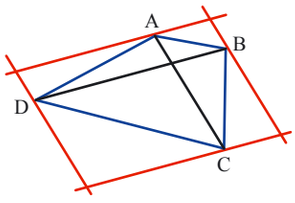
ح.



6. أمامكم رسمة الشكل الرباعيّ ABCD.

ارسموا مستقيمات متوازية للقطرين عبر رؤوس الشكل الرباعيّ.

اشرحوا لماذا الشكل الرباعيّ الناتج هو متوازي أضلاع؟

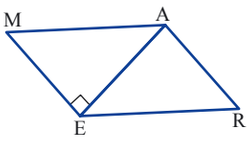


7. معطى الشكل الرباعيّ MARE هو متوازي أضلاع.

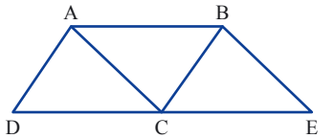
القطر AE يعامد الضلع ME.

$\measuredangle R = 45°$

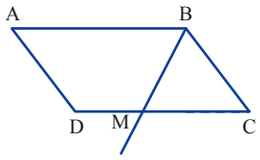
احسبوا مقدار الزوايا التي تظهر في الرسمة، وجدوا مثلّثات متساوية الساقين.



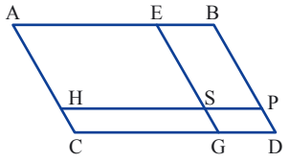
8. معطى ABCD متوازي أضلاع.
ABEC متوازي أضلاع.
$\measuredangle E = 45°$
$\measuredangle ABC = 55°$
احسبوا مقدار زوايا المثلّثات الثلاثة.



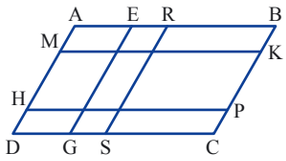
9. معطى الشكل الرباعيّ ABCD متوازي أضلاع.
BM ينصّف $\measuredangle ABC$
$\measuredangle BMC = 50°$
احسبوا مقدار زوايا متوازي الأضلاع.



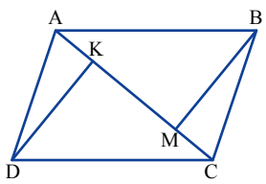
10. معطى AB || HP || CD
AC || EG || BD
كم متوازي أضلاع يوجد في الرسمة؟
سجّلوها.



11. معطى AB || MK || HP || DC
AD || EG || RS || BC
كم متوازي أضلاع يوجد في الرسمة؟

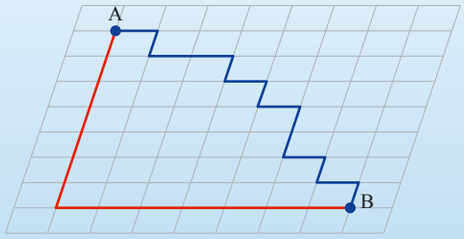


12. معطى ABCD متوازي أضلاع.
$DK \perp AC$
$BM \perp AC$
المطلوب برهانه DK = BM



الدرس الثاني: صفات الأضلاع في متوازي الأضلاع

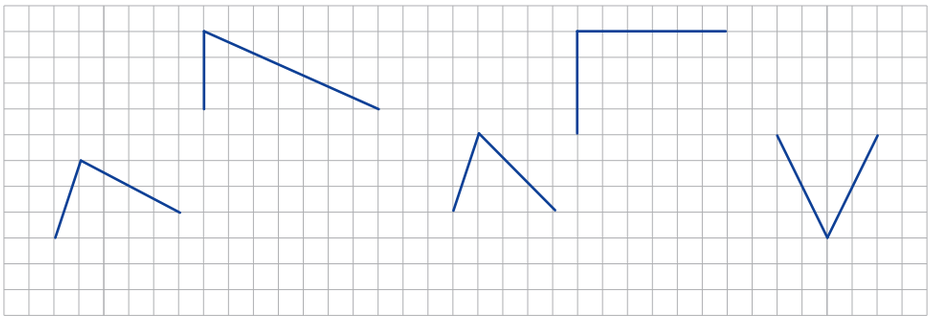
تُنتج الشوارع في مدينة مت في دولة وازي شبكة مِن متوازيات الأضلاع كما تظهر في الصورة.
سار **جاد** من النقطة A إلى النقطة B في المسار **الأزرق**.
قال **سائد**: أستطيع أن أقصر الطريق، وسار في المسار **الأحمر**.
هل قول **سائد** صحيح؟



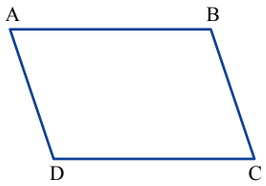
نتعرّف على صفات الأضلاع في متوازي الأضلاع.

1. أمامكم رسومات أضلاع متجاورة في متوازي الأضلاع.

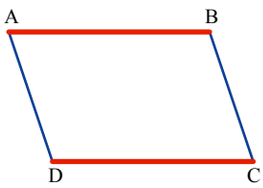
أ. انسخوا إلى ورقة مقسمة إلى تربيعات وأكملوا رسومات متوازيات الأضلاع بمساعدة خطوط توازي الأضلاع المرسومة.



ب. جدوا صفة إضافيّة للأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع وصوغوا الصفة التي وجدتموها كنظريّة.
ت. سجّلوا المعطى والمطلوب برهانه في النظريّة التي صغتموها.
ث. **برهنوا:** القطر BD يقسّم متوازي الأضلاع إلى مثلّثين متطابقين.
ج. أكملوا برهان النظريّة التي صغتموها في بند ب.

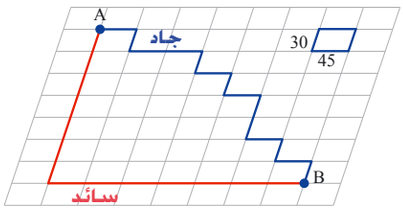


نظريّة الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متساوية في الطول.



معطى ABCD متوازي الأضلاع.
استنتاج AB = DC
AD = BC

2. نعود إلى شبكة الشوارع في مدينة مت مِن مهمّة الافتتاحيّة (القياسات بالأمتار).



أ. ما المسافة التي قطعها **جاد** مِنَ النقطة A إلى النقطة B؟

ما المسافة التي قطعها **سائد** من النقطة A إلى النقطة B؟

على أيّ صفة، مِن صفات متوازي الأضلاع، اعتمدتم لإيجاد المسافة؟

ب. هل قصّر **سائد** الطريق؟

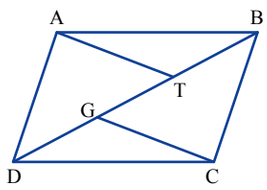
على أي صفة، من صفات متوازي الأضلاع، يمكنكم أن تشرحوا ذلك؟

ت. ما المسافة الأقصر بين النقطتين A وَ B في هذه الشبكة مِنَ الشوارع؟

3. معطى ABCD متوازي أضلاع.

G وَ T نقطتان تقعان على القطر BD بحيث أنّ $BT = DG$.

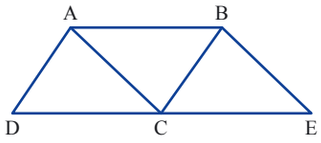
جدوا، في الرسمة، أزواجًا من المثلّثات المتطابقة.



4. معطى ABCD متوازي أضلاع.

ABEC متوازي أضلاع.

المطلوب برهانه $DC = CE$



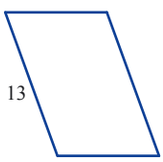
مجموعة مهامّ

أُعِدّت الرسومات في مجموعة المهامّ للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

1. أ. بَنَت **مريم** متوازي أضلاع بمساعد خيط طوله 36 سم.

طول أحد أضلاع متوازي الأضلاع 13 سم.

ما طول كلّ ضلع مِنَ الأضلاع الثلاثة الأخرى؟

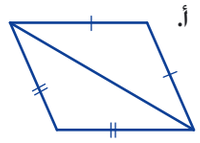


ب. بُني متوازيي أضلاع إضافيّين مِن خيطين آخرين طول كلّ واحد منهما 36 سم.

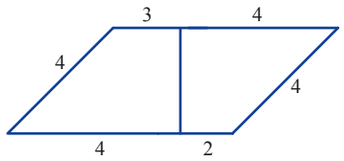
ارسموا متوازيي أضلاع كهذه وَسجّلوا أطوال الأضلاع المناسبة لكلّ متوازي أضلاع.

2. حدّدوا في أيّ متوازيات أضلاع هنالك خطأ في المعطيات؟ اشرحوا.

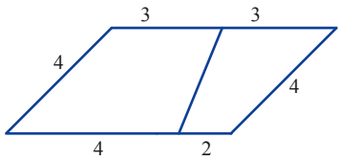
أ.



ب.



ت.

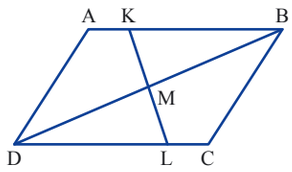


3. معطى ABCD متوازي أضلاع.

$DM = MB$

هل يمكن الاستنتاج أنّ $\Delta LMD \cong \Delta KMB$؟

إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا. وإذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.



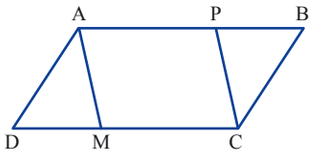
4. معطى ABCD متوازي أضلاع.

P نقطة على AB

M نقطة على DC

هل يمكن الاستنتاج أنّ $\Delta BCP \cong \Delta ADM$؟

إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا. وإذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.

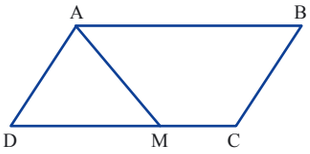


5. معطى ABCD متوازي أضلاع.

AM ينصّف الزاوية A.

$AB = 11$ سم, $BC = 7$ سم

احسبوا طول MC.

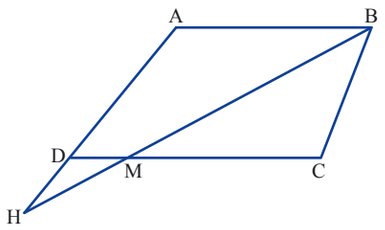


6. معطى ABCD متوازي أضلاع.

BM ينصّف الزاوية ABC.

مَدّوا الضلع AD حتّى نقطة التقاطع مع منصّف الزاوية.

جدوا، في الرسمة، مثلّثات متساوية الساقين وبرهنوا.



7. معطى ABCD متوازي أضلاع.

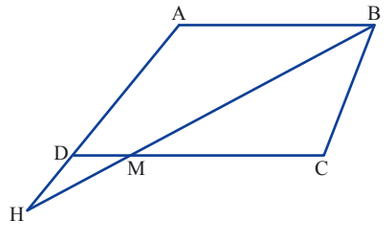
BM ينصّف الزاوية ABC.

مَدّوا الضلع AD حتّى نقطة التقاطع مع منصّف الزاوية.

أ. جدوا، في الرسمة، مثلّثات متساوية الساقين وبرهنوا.

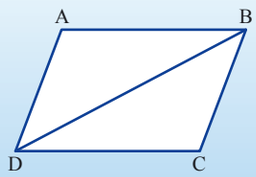
ب. معطى $AB = 6$ سم $BC = 4$ سم

جدوا، في الرسمة، مثلّثات متشابهة واحسبوا نسبة التشابه.



الدرس الثالث: صفات الزوايا في متوازي الأضلاع

معطى ABCD متوازي أضلاع. ينصّف القطر BD متوازي الأضلاع إلى مثلّثين.
خمنوا الاستنتاجات التي يمكن استنتاجها حول مقادير الزوايا في متوازي الأضلاع؟



نتعرّف على صفات الزوايا في متوازي الأضلاع.

1. تطرّقوا إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

أ. المطلوب برهانه $\measuredangle A = \measuredangle C$

$\measuredangle B = \measuredangle D$

ب. صوغوا النظرية التي برهنتموها.

2. نظريّة مجموع الزاويتين المتجاورتين في متوازي الأضلاع هو $180°$.

أ.ارسموا متوازي أضلاع واكتبوا بكتابة رياضيّة المعطيات والمطلوب برهانه.

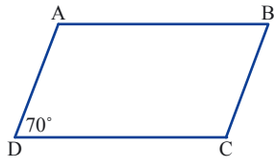
ب. برهنوا النظريّة.

نظريّة الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متساوية بالمقدار.

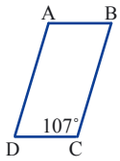
نظريّة مجموع كلّ زاويتين متجاورتين في متوازي الأضلاع هو $180°$.

3. معطى، في كلّ بند، متوازي أضلاع.
احسبوا مقدار زوايا متوازي الأضلاع.

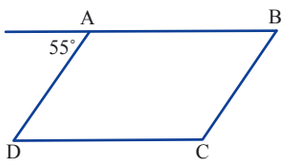
أ.



ب.



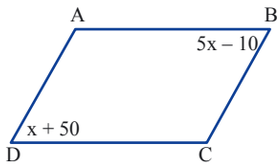
ت.



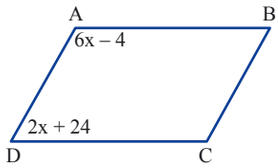
4. قال **أمين**: توجد زاويتان حادتان وزاويتان منفرجتان في كلّ متوازي أضلاع.
هل قول **أمين** صحيح؟ اشرحوا.

5. معطى، في كلّ بند، متوازي أضلاع.
احسبوا مقدار زوايا متوازي الأضلاع.

أ.



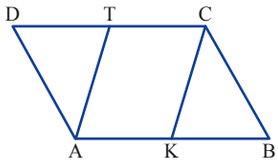
ب.



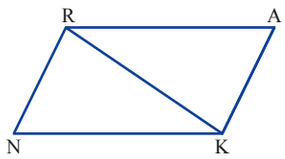
6. معطى ABCD متوازي أضلاع.

$DT = BK$

المطلوب برهانه $AT = KC$



7. قال **رائد**: أستطيع أن أُبرهن أنّ القطر ينصّف الزوايا في متوازي الأضلاع.
جدوا الخطأ في برهان **رائد**.



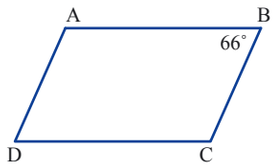
البرهان	التعليل
$RA = NK$	أضلاع متقابلة في متوازي الأضلاع
$RN = AK$	أضلاع متقابلة في متوازي الأضلاع
$RK = RK$	
$\Downarrow$	
$\Delta NRK \cong \Delta AKR$	حسب ضلع، ضلع، ضلع
$\Downarrow$	
$\measuredangle RKN = \measuredangle RKA$	
$\Downarrow$	
RK ينصّف $\measuredangle NKA$	

مجموعة مهامّ

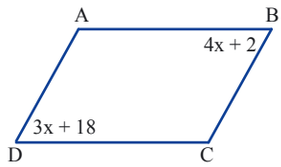
1. أ. مقدار إحدى الزوايا في متوازي الأضلاع هو $75°$.
احسبوا مقدار الزوايا الأخرى في متوازي الأضلاع.
ب. مقدار إحدى الزوايا في متوازي الأضلاع هو $151°$.
احسبوا مقدار الزوايا الأخرى في متوازي الأضلاع.

2. معطى، في كلّ بند، متوازي أضلاع. احسبوا مقدار زوايا متوازي الأضلاع.

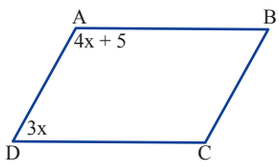
أ.



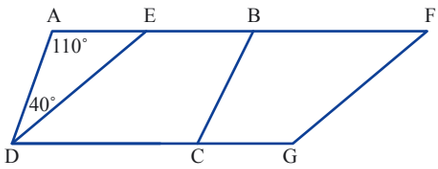
ب.



ت.



3. معطى ABCD متوازي أضلاع.
DEFG متوازي أضلاع.
احسبوا مقدار الزاوية F∢.



4. معطى ABCD متوازي أضلاع.
احسبوا مقدار الزوايا وحدّدوا الاستنتاجات التي تنتج مِنَ المعطيات.

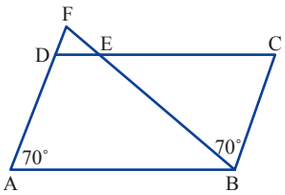
أ. CE = CB

ب. FB = AB

ت. AF = BF

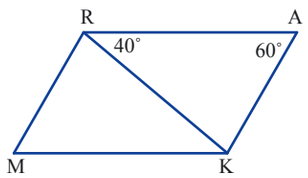
ث. ΔBEC متساوي الساقين.

ج. ΔDEF ~ ΔCEB

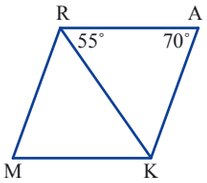


5. معطى RAKM متوازي أضلاع.
احسبوا، في كلّ بند، مقدار الزوايا، وحدّدوا هل ينصّف القطر RK الزاويتين R∢ وَ K∢؟

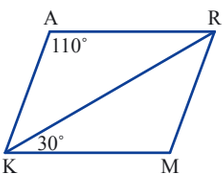
أ.



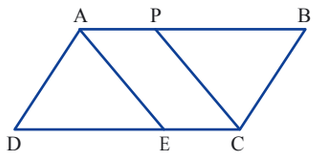
ب.



ت.

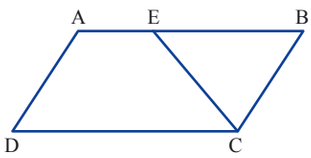


6. معطى ABCD متوازي أضلاع.
AE ينصّف الزاوية A∢.
CP ينصّف الزاوية C∢.
المطلوب برهانه AECP متوازي أضلاع.



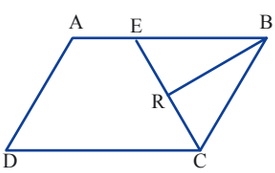
7. **ادّعاء:** منصّفا الزاويتين المتجاورتين في متوازي الأضلاع متعامدان.
هل الادّعاء صحيح؟
إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا. إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.

8. معطى ABCD متوازي أضلاع.
CE ينصّف الزاوية ∢C.
المطلوب برهانه ΔECB متساوي الساقين.

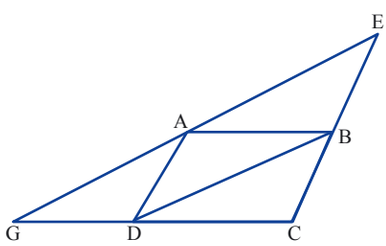


9. معطى ABCD متوازي أضلاع.
AB = 2BC
المطلوب برهانه يلتقي منصّفا الزاويتين D وَC على الضلع AB.

10. معطى ABCD متوازي أضلاع.
RB ينصّف الزاوية ∢B.
EC ينصّف الزاوية ∢C.
المطلوب برهانه أ. ∢BRC = 90°.
ب. ER = RC.

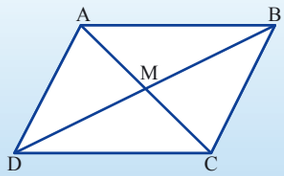


11. الشكل الرباعي ABCD متوازي أضلاع. ارسموا خطًّا موازيًا للقطر BD، في متوازي الأضلاع، عبر النقطة A.
الموازي الذي يتقاطع مع امتداد الضلع CB في النقطة E وامتداد الضلع CD في النقطة G.
أ. ارسموا وجدوا عدد متوازيات الأضلاع في الرسمة.
ب. برهنوا أن النقاط A, B وَ D
هي منتصفات أضلاع المثلّث CEG.
ت. احسبوا نسبة المساحة بين المثلث ΔECG
ومتوازي الأضلاع ABCD.



الدرس الرابع: صفات الأقطار في متوازي الأضلاع

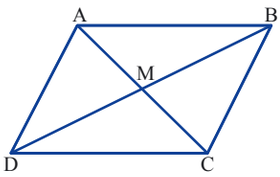
معطى: ABCD متوازي أضلاع.



تقف أربع نملات في النقطة M، تسير النملات في نفس السرعة.
تسير كلّ نملة بخطّ مستقيم على طول قسم مِنَ القطر باتّجاه الرأس.
خمّنوا: هل تصل جميع النملات الرؤوس في الوقت نفسه؟
هل يصل قسمًا منهن في الوقت نفسه؟

نتعرّف على صفات الأقطار في متوازي الأضلاع.

1. خمّنوا: أيّ ادّعاء صحيح؟
إذا كان الادّعاء صحيحًا فبرهنوا. إذا كان لا فاشرحوا أو ارسموا مثالاً مضادًّا.

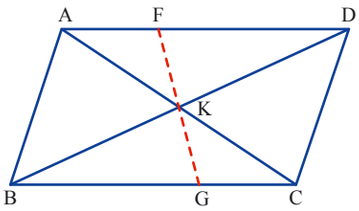


أ. القطران متساويان في متوازي الأضلاع.
ب. ينصّف القطران بعضهما في متوازي الأضلاع.
ت. ينصّف القطران الزوايا في متوازي الأضلاع.
ث. القطران متعامدان في متوازي الأضلاع.

2. نعود إلى مهمّة الافتتاحيّة.
افحصوا تخمينكم وصححوا.

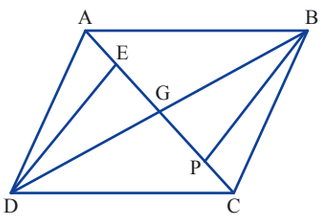
وجدنا **صفة** إضافيّة لمتوازي الأضلاع.
نظريّة: إذا كان الشكل الرباعيّ **متوازي أضلاع** فإنّ **القطرين ينصفان بعضهما البعض.**

3. معطى ABCD متوازي أضلاع.
تمرّ القطعة FG عبر نقطة التقاء القطرين (K)



المطلوب برهانه FK = KG

4. معطى ABCD متوازي أضلاع.
AE = CP



طُلب مِنَ التلاميذ أن يبرهنوا أنّ ∢PBG = ∢EDG.
قال **إياد:** يجب أن نطبق أوّلًا بين المثلّثين ΔADE وَ ΔCBP، وبعد ذلك فقط نطبق بين المثلّثين ΔEDG وَ ΔPBG.
قال **عماد:** هنالك معطيات كافية كي نطبق بين المثلّثين ΔEDG وَ ΔPBG فقط.
هل قول **عماد** صحيح؟
اختاروا إحدى الإمكانيّات وبرهنوا.

5. معطى متوازي أضلاع ليس مستطيلًا.

أ. هل نستطيع أن نرسم دائرة تمرّ عبر الرؤوس الأربعة في متوازي الأضلاع؟ اشرحوا.

ب. هل نستطيع أن نرسم دائرة تمرّ عبر رأسين متجاورين في متوازي الأضلاع؟
إذا كانت الإجابة نعم فأين يمكن أن يكون مركز الدائرة؟ اشرحوا.

ت. هل نستطيع أن نرسم دائرة تمرّ عبر رأسين متقابلين في متوازي الأضلاع؟
إذا كانت الإجابة نعم فأين يمكن أن يكون مركز الدائرة؟ اشرحوا.

تعريف: نسمّي الشكل الرباعيّ الذي فيه زوجان مِنَ الأضلاع المتقابلة المتوازية **"متوازي أضلاع".**

صفات متوازي الأضلاع

إذا كان الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع فإنّ **أضلاعه المتقابلة متساوية في الطول.**

إذا كان الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع فإنّ **زواياه المتقابلة متساوية بالمقدار.**

إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ **مجموع كلّ زاويتين متجاورتين يساوي 180^0**

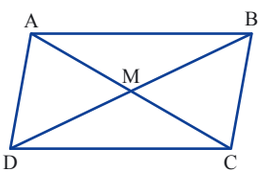
إذا كان الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع فإن **أقطاره تنصّف بعضها**

شروط كافية لتمييز متوازي الأضلاع

نتعلّمها في الوحدة القادمة.

مجموعة مهامّ

1. معطى ABCD متوازي أضلاع
6 سم = AB, 8 سم = AC, 10 سم = DB
جدوا محيط المثلث ΔDMC.

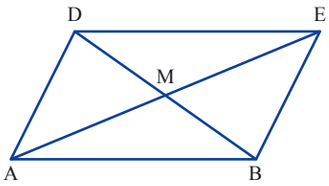


2. معطى DEBA متوازي أضلاع.

$AE = 8$ سم $\measuredangle DBE = 75^\circ$ $\measuredangle DAE = 30^\circ$

أ. جدوا مثلّثات متساوية الساقين. اشرحوا المراحل الحسابيّة.

ب. ما طول الضلع AD؟ اشرحوا.

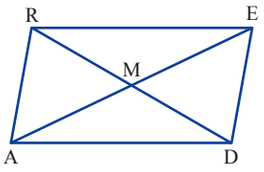


3. معطى REDA متوازي أضلاع.

$AR = 5$ سم $\measuredangle AED = 60^\circ$, $\measuredangle DRA = 60^\circ$

أ. جدوا، في الرسمة، مثلّثات متساوية الأضلاع. علّلوا.

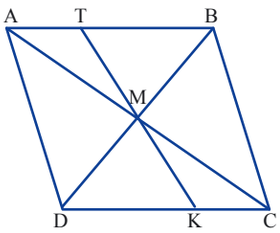
ب. احسبوا طولي القطرين ومقدار زوايا متوازي الأضلاع.



4. معطى ABCD متوازي أضلاع.

تمرّ القطعة KT عبر نقطة التقاء القطرين (M).

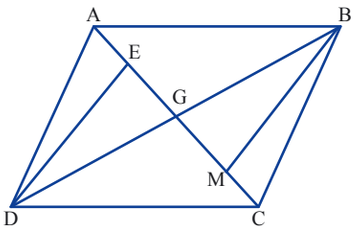
المطلوب برهانه $TM = MK$



5. معطى ABCD متوازي أضلاع.

$AE = CM$

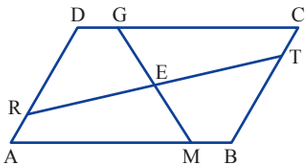
المطلوب برهانه $DE \parallel BM$



6. معطى ABCD متوازي أضلاع.

النقطة E هي نقطة التقاء قطريْ متوازي الأضلاع.

المطلوب برهانه $MB = GD$,$DR = BT$,$MA = GC$,$CT = AR$



7. معطى ABCD متوازي أضلاع.

$AC \parallel BE$

$BD \parallel EC$

المطلوب برهانه $CE = DM$