4.5 تعابير ضرب ونتائجها

1. أ. نتمعَّن في تمرين ضرب أوّل 27 عددًا طبيعيًّا: $27 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
كم صفرًا يوجد في حاصل الضرب هذا؟

نسمِّي حاصل ضرب جميع الأعداد الطبيعيّة من 1 وحتّى عدد معين **"مضروب العدد"**.
نرمز إلى عامليّ عدد معيّن n بواسطة إشارة التعجّب عن يمين العدد كالتّالي: $n!$.
تعبير الضرب المعطى في هذه الحالة هو **!27** ("27 عامليّ").

ب. مضروب !n يوجد فيه 8 أصفار في نهاية العدد. ماذا يمكنكم القول عن قيمة n؟

ت. كم صفرًا يوجد في نتيجة القسمة الآتية: $\frac{40!}{30!}$؟

ث. نضرب الأعداد الزوجية من 2 حتى 20: $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot ... \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$
كم صفرًا يوجد في حاصل الضرب هذا؟

زاوية الحاسوب

نسجِّل عمليّة مضروب العدد في برمجيّة *Excel* كالتالي: fact( ). مثلًا: لحساب !15، نسجِّل الصيغة الآتية =fact(15) .
تُسجِّل برمجيّة *Excel* تقديرًا لتمارين ذات نتائج كبيرة بكتابة علميّة. مثلًا: تُقرّب برمجيّة *Excel* العامليّ !15 إلى العدد "1.3077E+12" (أي 1.3077×10^{12}). نستعمل الأمر right() لإيجاد الأرقام الأخيرة في هذه الحالات. مثلًا: لإيجاد الأرقام الخمسة الأخيرة للعامليّ !15، نسجِّل الصيغة =right(A2,5) ونحصل على 68,000 [بالافتراض أن =fact(15) كان مسجّلًا في الخليّة A2].

انتبهوا: دقّة العمليّة right( ) محدودة أيضًا، ففي الأعداد الكبيرة جدًّا تعطينا تقديرًا لا يُتيح لنا إيجاد الأرقام الأخيرة للعدد.

- استعملوا هذه الأوامر كي تفحصوا إجابتكم عن المهمّة 1.
- ابحثوا في حالات إضافيّة، واستعملوا فيها عمليّة مضروب العدد وتعابير ضرب أخرى، ابنوا أسئلة إضافيّة حول تعابير الضرب، وأجيبوا عنها.

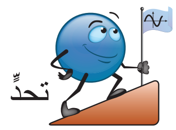
2. لدى **عالية** رمز بريديّ (عدد) مكوَّن من 5 أرقام، والأرقام هي 2, 3, 4, 6, وَ 7.
انتبهت عالية إلى أن كلّ رقمين متجاورين في الرمز البريديّ (الأوّل والثاني، الثاني والثالث، وهكذا دواليك) يكوِّنان عددًا ثنائيَّ المنزلة يساوي حاصل ضرب رقمين.
جدوا الرمز البريديّ لعالية. صفوا جميع الاعتبارات الّتي استعملتموها كي تجدوه.

3. حاصل ضرب ثلاثة أعداد صحيحة وموجبة هو 720.

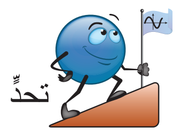
أ. اكتبوا 3 تعابير ضرب كهذه.

ب. x يمثِّل العامل الأصغر من بين العوامل الثلاثة. ما هي أكبر قيمة لـ x؟

4. **يوسف** أصغر بسنتين من زوجته **هداية**.
عُمرهما في هذه السنة هما عددان أوّليّان.
يصبح عُمر هداية في السنة القادمة من مضاعفات العدد 11، وعُمر يوسف يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين.
ما هو عُمر يوسف، وما هو عُمر هداية في هذه السنة؟



5. اختارت **راوية** ثلاثة أرقام مختلفة (تختلف عن الصفر).
بَنَت جميع الأعداد ثلاثيّة المنزلة الممكنة من الأرقام الثلاثة، وجمعتها.
انتبهت راوية إلى أنّه يمكن كتابة المجموع الّذي حصلت عليه كحاصل ضرب عددين متتاليين.
ما هي الأرقام الثلاثة الّتي اختارتها راوية؟



6.* جدوا عددًا مكوَّنًا من 10 أرقام ويقبل القسمة على 11 دون باقٍ، ويظهر فيه كلّ رقم مرّة واحدة فقط.
إرشاد: ننفِّذ ما يلي كي نفحص ما إذا كان هناك عدد يقبل القسمة على 11:

– نجمع ونطرح أرقام العدد بالتناوب.

– إذا كانت النتيجة تقسم على 11 فإنّ العدد يقسم على 11.

مثال: لفحص ما إذا كان العدد 28,479 يقسم على 11، فإننا نحسب $2 - 8 + 4 - 7 + 9 = 0$.

بما أنّ العدد 0 يقسم على 11، فإنّ ذلك يدلّ على أنّ العدد 28,479 يقسم على 11.

* מתוך אולימפיאדת זוטא תשע"ג - שאלון לכיתה ז - שלב ב', מכון דווידסון לחינוך מדעי

http://davidson.weizmann.ac.il/compzuta

هل تعلمون؟

استُعمل مفتاح التشفير خلال مئات السنين لتشفير رسائل ولفكّ رموزها أيضًا، وقد تغيَّر من حين إلى آخر خوفًا من اكتشافه. المشكلة الأساسيّة في هذا النوع من التشفير هي توزيع المفتاح على المستعملين. اقترح العالِم الأميركيّ ويتفيلد ديفاي (Whitfield Diffie) سنة 1975 فكرة إنتاج مفتاحين: أحدهما يستعمله مُشفِّر الرسالة ويكون عبارة عن مفتاح عامّ (للجمهور)، والثاني يستعمله الشخص الّذي يفكّ رموز الرسالة ويكون عبارة عن مفتاح خاصّ.

تكمن عظمة فكرة المفتاح العامّ (للجمهور) والمفتاح الخاصّ في أنّه على خلاف جميع أفكار التشفير السابقة، ليست هناك حاجة لإخفاء مفتاح التشفير؛ لأنّ الأشخاص الذين يحصلون على الرسالة المشفَّرة يملكون مفتاحًا آخر خاصًّا غير معروف للجمهور. في سنة 1977 وجد ثلاثة علماء حاسوب ورياضيّات - رون ريووست، ليئونارد أديلمان (أميركيان) وعادي شمير (إسرائيلي من معهد وايزمن) - دالّة رياضيّة تُتيح تشفير رسالة دون إمكانيّة فكّها بواسطة نفس مفتاح التشفير، بل بواسطة مفتاح تشفير آخر.

تعتمد المفاتيح في طريقة التشفير RSA (Rivest, Shamir, Adelman) على حاصل ضرب عددين أوّليّين. نفترض أنّ العددين الأوليّين هما p وَ q وحاصل ضربهما N. يختار الشخص الّذي يفكّ رموز الرسالة عددين أوّليّين، ويُرسل المفتاح العامّ (للجمهور) الّذي يعتمد على N إلى مُشفِّري الرّسائل. يُتيح المفتاح العامّ إرسال رسائل بواسطة N. يشكّل العاملان الأوّليّان (p وَ q) لـ N أساسًا لمفتاح فكّ الرّموز الخاصّ، لذا فإنّ الأشخاص الّذين يحصلون على الرّسائل (وليس المشفّرون فقط) هم فقط الّذين يستطيعون فكّ رموز الرسالة. فكّ الشيفرة متعلّق بمعرفة الأعداد الأوّليّة الّتي يتمّ اختيارها، إذا كانت هذه الأعداد كبيرة جدًّا فإنّنا نحتاج زمنًا طويلًا جدًّا (عدّة سنوات) لحسابها، ونحتاج أيضًا إلى حاسوب قويّ جدًّا لاكتشافها.

يحاول رياضيّون كثيرون حلّ مشكلة إيجاد عوامل حاصل ضرب عددين أوّليّين كبيرين، لكن لم ينجحوا حتّى الآن في اختراق طريقة التّشفير RSA.

نحافظ على لياقة رياضيّة

1. معلوم أنّ $6! = 720$.

احسبوا نتائج التمارين الآتية دون أن تستعينوا بالآلة الحاسبة:

أ. $10 \cdot 6! =$

ب. $6! + 10 =$

ت. $6! + 6! =$

ث. $2! + 4! =$

ج. $\frac{6!}{10} =$

ح. $\frac{6!}{5!} =$

خ. $\frac{6!}{4!} =$

د. $\frac{6!}{2! \cdot 4!} =$

2. اكتبوا > أو < أو =:

أ. $8! \;\blacksquare\; 9!$

ب. $8! \cdot 2 \;\blacksquare\; 9!$

ت. $8! \;\blacksquare\; \frac{9!}{9}$

ث. $\frac{8!}{8!} \;\blacksquare\; \frac{9!}{9!}$

ج. $10! \cdot 11 \;\blacksquare\; 11!$

ح. $14! \cdot 20 \;\blacksquare\; 15!$

خ. $\frac{12!}{6!} \;\blacksquare\; 2!$

د. $\frac{8!}{4!} \;\blacksquare\; 4!$

3. سجّلوا عدد الأصفار الّتي تكون في نهاية نتائج التمارين الآتية:

أ. 10^6

ب. 100^2

ت. 1000^3

ث. 5^6

ج. 2^{10}

ح. $5^5 \cdot 2^5$

خ. $10^9 + 1$

د. $10^9 + 10^5$

أحجية

تُعتبر السنة "كاملة" إذا كان مجموع أرقامها مربّع عدد معيّن (مثلًا: 1, 4, 9, 16,...).

السنة 2002 هي سنة "كاملة"؛ لأنّ $2^2 = 4 = 2 + 0 + 0 + 2$.

ماذا تكون "السنة الكاملة" الأخيرة في هذا الألفيّة (حتّى سنة 3000)؟