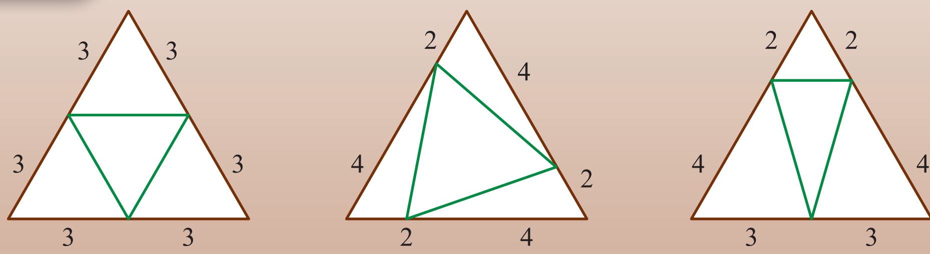
6.5 المحيط الأصغر

يوجد في الرسمة ثلاثة مثلّثات متساوية الأضلاع، طول كلّ ضلع فيها 6 سم.
حُصر مثلّث (لونه أخضر) داخل كلّ مثلّث.

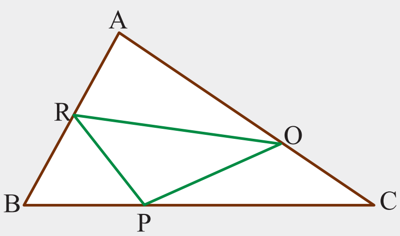


خمّنوا في أيّ رسومات محيط المثلّث المحصور هو الأصغر؟

المحيط الأدنى

هل تعلمون؟

معطى مثلّث ABC حادّ الزوايا. بودّنا أن نعيّن النقاط P , Q , R على أضلاع المثلّث ABC، بحيث يكون محيط المثلّث PQR أصغر ما يمكن.
اقتُرحت هذه المشكلة في القرن الـ 18، وقد تمّ حلها في القرن الـ 19. هذا يعني أنّ الرياضيين وجدوا شرطًا يضمن أن يكون مجموع RP+QR+PQ أصغر ما يمكن، لكنّ البراهين التي وجدها كانت معقّدة جدًّا.
في القرن الـ 20 فقط، وجد الرياضي الهنغاري ل . فيير (L. Fejer) برهانًا بسيطًا وذكيًا.
اكتشف خلال البرهان الشرط المطلوب أيضًا.



ستبحثون، في هذه الفعّاليّة، الشرط المطلوب، وستتابعون برهان فيير.

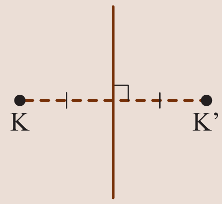
زاوية الحاسوب

1. خمّنوا في أي شرط يمكن أن يكون محيط المثلّث PQR هو الأصغر؟ يمكنكم الاستعانة بالتطبيق المحوسب المحيط الأدنى 1 (היקף מינימלי 1) في موقع الرياضيّات المدمجة، قسم تفوّق رحوبوت (באתר *מתמטיקה משולבת*, מדור *מצוינות רחובות*)، أو اضغطوا على الرابط: http://ggbtu.be/mNnSW4Brb.

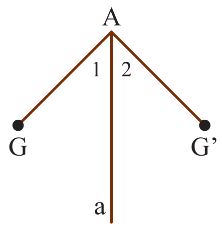
لمتابعة برهان فيير يجب أن نعرف المصطلح الانعكاس بواسطة الخطّ المستقيم.

الانعكاس بواسطة المستقيم

الانعكاس بواسطة المستقيم: النقطة K1 هي انعكاس للنقطة K بواسطة المستقيم، إذا كان المستقيم عمودًا متوسّطًا للقطعة الّتي تربط بين K وَ K1.



2. معطى: G' انعكاس للنقطة G بواسطة المستقيم a (A على مستقيم الانعكاس).



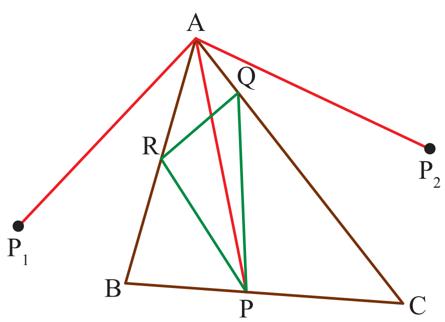
صلوا $G'G$ وبرهنوا: $AG = AG'$

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$

المرحلة الأولى لإيجاد الشرط وبرهانه

نبدأ من تعيين نقاط معيّنة P, Q, R على أضلاع المثلّث ABC.
نفتّش عن المكان المناسب للنقطتين Q وَ R مقارنة بالنقطة P الّتي تمّ اختيارها على BC، بحيث يكون محيط المثلّث PQR هو الأدنى.

3. لإيجاد المكان المناسب للنقطتين Q وَ R مقارنة بالنقطة P الّتي تمّ اختيارها نعكس AP بالضلع AB وبالضلع AC. (انظروا الرسمة).



أ. صلوا بين P_1R وَ P_2Q وبرهنوا:

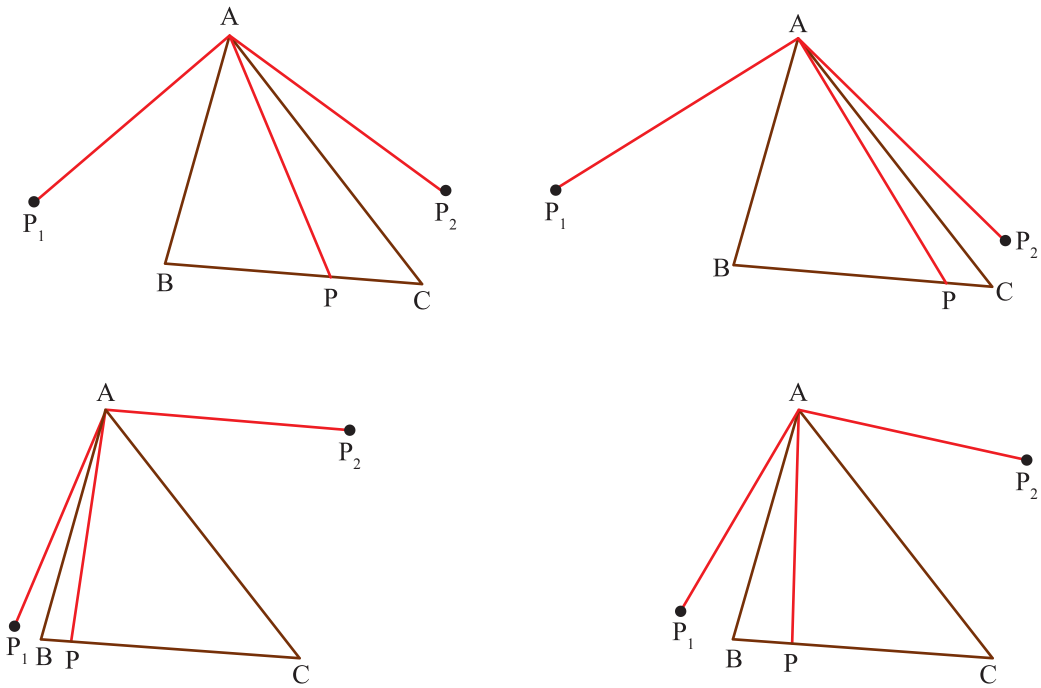
- $P_1R = PR$, $P_2Q = PQ$
- محيط المثلّث PQR يساوي $P_1R + RQ + QP_2$

ب. مكان P_1 وَ P_2 غير متعلّق بمكان Q وَ R. اشرحوا.

ت. قالت **إيمان**: مجموع أطوال القطع $P_1R + RQ + QP_2$ يكون الأصغر عندما تقع النقاط P_2 , Q , R , P_1 على مستقيم واحد. اشرحوا.

رأينا حتّى الآن أنّه إذا عرفنا أن نحدّد مكان P، فإنّ مكان Q وَ R يجب أن يُحدّد، بحيث تقع النقاط P_2 , Q , R , P_1 على مستقيم واحد.

4. جدوا في كل رسمة، وعيّنوا Q وَ R المناسبتين للاستنتاج الّذي وجدناه. صلوا أضلاع المثلّث PQR.

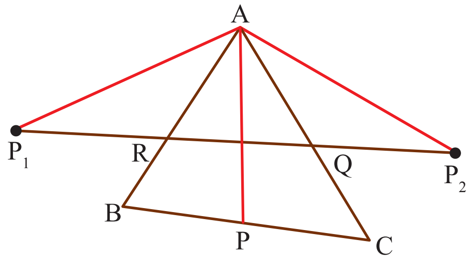


المرحلة الثانية

لم نجد حتّى الآن مكان P على BC كي نحصل على محيط المثلّث الأصغر. للتخمين يمكنكم استعمال التطبيق في المهمّة 5 أو الرسومات في المهمّة 4.
لنبيّن أين يجب أن تكون النقطة P، نستمرّ في متابعة برهان فيير في المهمّة 6.

زاوية الحاسوب

5. لتخمين مكان النقطة P يمكنكم الاستعانة بالتطبيق المحوسب **المحيط الأدنى** 2 (היקף מינימלי 2) في موقع الرياضيّات المدمجة، قسم تفوّق رحوبوت (**באתר** *מתמטיקה משולבת*, מדור *מצוינות רחובות*)، أو اضغطوا على الرابط: http://ggbtu.be/mjDBrTADB.
يمكنكم في هذا التطبيق المحوسب أن تحرّكوا P على BC ، وأن تفحصوا متى نحصل على المحيط الأدنى للمثلّث PQR؟



6. نجد مكان النقطة P بواسطة برهان فيير:

أ. اشرحوا لماذا $\measuredangle P_1AP_2 = 2\measuredangle BAC$ دون أيّة علاقة لمكان P على BC؟

ب. ينتج من ذلك أنّ المثلّث P_1AP_2 هو مثلّث متساوي الساقين، زاوية الرأس فيه معطاة (ضعف الزاوية B BAC).

ت. ⇐ جميع المثلّثات AP_1P_2 هي مثلّثات متشابهة. علّلوا. (انظروا الرسومات في المهمّة 4).

ث. ⇐ هنالك تناسب بين جميع أضلاع المثلّثات AP_1P_2. لذا طول قاعدة المثلّث AP_1P_2 سيكون الأصغر عندما يكون طول ساق هذا المثلّث (AP_1) هو الأصغر.

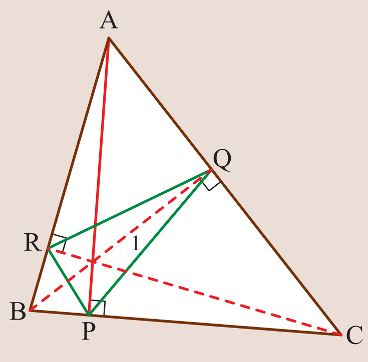
لكن $AP_1=AP$؛ لذا يجب تحديد P على BC، بحيث تكون القطعة AP أصغر ما يمكن.

- ما هي القطعة الأقصر من A إلى الضلع BC؟

بيّنّا أنّه كي يكون محيط المثلّث PQR الأدنى، يجب أن يكون AP ارتفاع للضلع BC في المثلّث ABC.
يمكن أن نبرهن بطريقة شبيهة أنّه للحصول على المحيط الأدنى، يجب أن تكون النقطة R على الضلع AB وأن تكون طرف الارتفاع من النقطة C إلى AB، والنقطة Q على AC يجب تكون طرف الارتفاع من B إلى AC.

النظريّة:

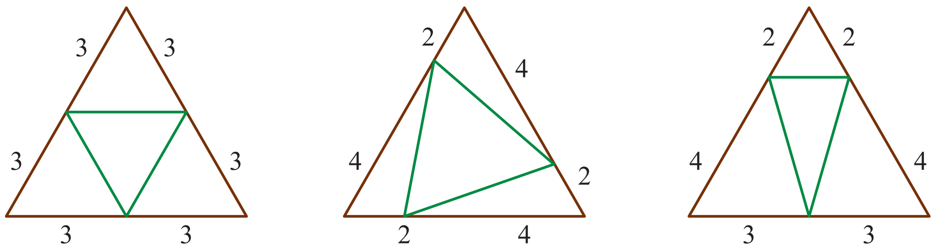
للحصول على محيط المثلّث PQR الأصغر ما يمكن، يجب أن تكون النقاط الثلاث P , Q وَ R أطراف الارتفاعات من رؤوس المثلث ABC إلى أضلاعه.



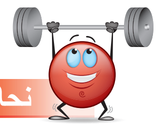
7. ارسموا مثلّثًا مختلف الأضلاع حادّ الزوايا. ارسموا داخله المثلّث المحصور الّذي محيطه هو الأصغر.

8. نعود إلى مهمّة الافتتاحيّة: يوجد في كلّ رسمة مثلّث متساوي الأضلاع، طول كلّ ضلع من أضلاعه 6 سم. حُصر مثلّث داخل كلّ مثلّث.

أ. في أيّ مثلّث محيط المثلّث الأخضر هو أصغر ما يمكن؟ علّلوا.

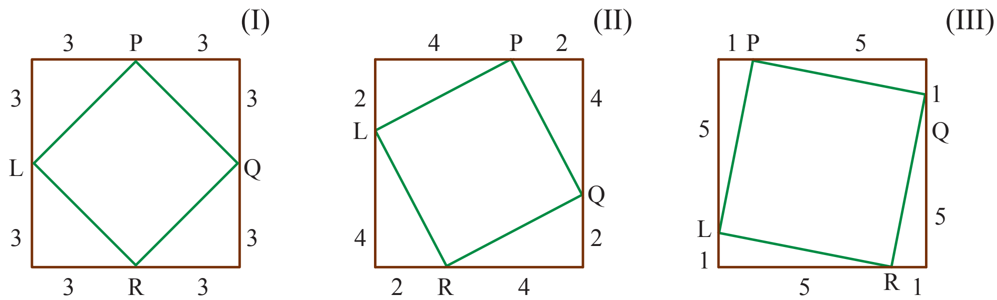


ب. ما هو المحيط الأدنى للمثلّث المحصور داخل مثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه 6 سم؟ علّلوا.



نحافظ على لياقة رياضيّة

1. معطى، في كلّ بند، مربّع طول كلّ ضلع من أضلاعه 6 سم.



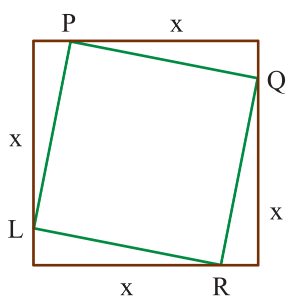
حُصر شكل رباعيّ داخل كلّ مربّع. تقع الرؤوس P,Q, R, L على أضلاع المربّع المعطى.

أ. برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ PQRL مربّع.

ب. احسبوا محيط ومساحة المربّع PQRL (الملوّن بالأخضر).

ت. أيّ مربّع من المربّعات الملوّنة بالأخضر له المحيط الأصغر؟

ت. أيّ مربّع من المربّعات الملوّنة بالأخضر له المساحة الأصغر؟



2. طول ضلع المربّع الملوّن بالبني هو 6 سم.
عبّروا بواسطة x عن مساحة المربّع PQRL (الملوّن بالأخضر).
جدوا في أيّة قيمة x تنتج المساحة الصغرى؟ اشرحوا.