תיק משימטיקה

ישר משיק לפונקציה

להנגשה פרטנית נא לפנות: **st.negishut@weizmann.ac.il**

תוכן העניינים

ישר משיק לפונקציה

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להשתמש בקשרים המתקיימים בין פונקציה לבין ישר המשיק לה, כדי למצוא את נקודות ההשקה שלהם ולתת מענה לקשיים שמתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים להשתמש בשני הקשרים הבאים כדי למצוא נקודות השקה בין פונקציה לישר:

- בנקודת השקה *ערך הפונקציה וערך המשיק* לפונקציה *שווים זה לזה*.
- בנקודת השקה *ערך הפונקציה הנגזרת ושיפוע המשיק* לפונקציה *שווים זה לזה*.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: כ- 15 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: כ- 30 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף המשימה ***מהי נקודת ההשקה?***

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף הפעילות ***ישר משיק***.

להגנשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

רקע

במהלך לימודי האנליזה עוסקים בקשרים בין פונקציה, משיק לפונקציה והפונקציה הנגזרת. לדוגמה, אפשר למצוא את נקודות ההשקה של פונקציה וישר נתונים על-ידי שימוש בקשרים הבאים:

- בנקודת השקה ערך הפונקציה וערך המשיק לפונקציה שווים זה לזה.
- בנקודת השקה ערך הפונקציה הנגזרת ושיפוע המשיק לפונקציה שווים זה לזה.

בדרך כלל מציאת משוואת המשיק לפונקציה בהינתן פונקציה ונקודת השקה, אינה מהווה קושי לתלמידים. אך תלמידים רבים מתקשים במציאת נקודות השקה כאשר נתונים פונקציה וישר המשיק לה. גורם אופייני לקושי זה הוא שימוש באחד משני הקשרים בלבד במקום בשניהם. כלומר, תלמידים משתמשים רק בשוויון בין ערכי הפונקציה למשיק או רק בשוויון בין שיפוע הפונקציה לשיפוע המשיק בנקודת ההשקה, אך לא בשניהם. ישנם גם תלמידים שאינם משתמשים כלל בקשרים שלעיל אלא שוגים ומשווים בין ערכי הפונקציה הנגזרת לערכי המשיק.

התיק ***ישר משיק לפונקציה*** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים כאלה ולתת להם מענה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת ההערכה ***מהי נקודת ההשקה?***
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימת ההערכה

במשימה ***מהי נקודת ההשקה?*** נתונים פונקציה וישר המשיק לה. התלמידים מתבקשים למצוא את נקודת ההשקה.

המשימה מיועדת לעבודה עצמית של תלמידים.

מהי נקודת ההשקה?

נתונה הפונקציה $f(x)=x^3+4x^2+7x+5$.

הישר $y=3x+5$ משיק לגרף הפונקציה.

מצאו את נקודת ההשקה.

הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	השתמשו בשני הקשרים	השתמשו בקשר אחד בלבד: השווה רק בין ערכי הפונקציה למשיק	השתמשו בקשר אחד בלבד: השווה רק בין שיפוע הפונקציה לשיפוע המשיק	אחר
תלמיד 1	V			
תלמיד 2			V	כתב שתי נקודות
תלמיד 3		V		לא התייחס לנקודה שבה $x=0$
סך-הכל				

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה. להלן מוצגות שתי גישות לפתרון:

דרך א'	דרך ב'
נתונה הפונקציה $f(x)=x^3+4x^2+7x+5$ משוואת המשיק $y=3x+5$ בנקודת ההשקה ערכי הפונקציה והמשיק שווים, ולכן: $x^3+4x^2+7x+5=3x+5$ $x^3+4x^2+4x=0$ $x(x^2+4x+4)=0$ $x_1=-2\ ,\ x_2=0$ נציב את שיעורי ה- x בפונקציה ונקבל את הנקודות $(-2,-1)\ ,\ (0,5)$. נבדוק אם בנקודות שקיבלנו לפונקציה ולמשיק יש שיפוע שווה. נציב בפונקציה הנגזרת $f'(x)=3x^2+8x+7$	נתונה הפונקציה $f(x)=x^3+4x^2+7x+5$ הפונקציה הנגזרת $f'(x)=3x^2+8x+7$ משוואת המשיק $y=3x+5$ בנקודת ההשקה יש לפונקציה ולמשיק שיפועים שווים, ולכן: $3x^2+8x+7=3$ $3x^2+8x+4=0$ $x_1=-2\ ,\ x_2=-\frac{2}{3}$ נציב את שיעורי ה- x במשוואת המשיק ונקבל את הנקודות $(-\frac{2}{3},3)\ ,\ (-2,-1)$. נבדוק אם הנקודות שקיבלנו נמצאות גם על גרף הפונקציה. נקבל $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{49}{27},\quad f(-2)=-1$.

דרך ב'	דרך א'
כלומר, רק בנקודה $(-2,-1)$ ערכי הפונקציה והמשיק שווים ולכן נקודת ההשקה היא $(-2,-1)$.	ונקבל $f'(0)=7$, $f'(-2)=3$. כלומר, רק בנקודה $(-2,-1)$ שיפוע הפונקציה הוא 3 כמו שיפוע המשיק, ולכן נקודת ההשקה היא $(-2,-1)$.

פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים שבמהלך הפתרון לא השתמשו בשני הקשרים כדי למצוא את נקודת ההשקה. כלומר תלמידים שהשוו רק בין ערכי הפונקציה למשיק או השוו רק את שיפוע הפונקציה לשיפוע המשיק או פעלו בדרך שגויה אחרת. למשל, השוו בין הפונקציה הנגזרת למשוואת המשיק. (מסומנים בעמודות הצבועות בטבלת ההערכה).

שלבי הפעילות

- עבודה על דף הפעילות ***ישר משיק***.
- דיון וסיכום.

מהלך הפעילות

- **עבודה על דף הפעילות *ישר משיק***

מטרת הפעילות לחדד את הצורך בשימוש בשני הקשרים כדי לחשב את נקודת ההשקה. בדף הפעילות שתי בעיות, בשתיהן יש למצוא נקודת השקה של ישר המשיק לפונקציה. לתלמידים מוצעות שתי התחלות שונות של חישוב נקודת ההשקה: דרך אחת מסתמכת על השוואה בין ערכי הפונקציה למשיק בנקודת ההשקה, והדרך האחרת מסתמכת על השוואה בין שיפוע המשיק לערך הנגזרת בנקודה. התלמידים מתבקשים לסיים את שתי דרכי הפתרון.

בבעיה 1 יש למצוא נקודת השקה של ישר המשיק לפונקציה ריבועית. לפונקציה ממעלה שנייה ולישר המשיק לה יש נקודה משותפת אחת בלבד וזו גם הנקודה היחידה שבה שיפוע הפונקציה שווה לשיפוע הישר המשיק.
בבעיה 2 יש למצוא נקודת השקה של ישר משיק לפונקציה ממעלה שלישית. בדוגמה הנתונה יש לפונקציה ולמשיק נקודת השקה ונקודת חיתוך. כמו כן, יש שתי נקודות על הפונקציה שבהן שיפוע הפונקציה שווה לשיפוע המשיק. לכן שימוש בקשר אחד בלבד, מוביל למציאת שתי נקודות שרק אחת מהן היא נקודת השקה.

מומלץ שמחצית הכיתה תמשיך את הפתרון של רקפת (השוואה בין ערכי הפונקציה למשיק), והמחצית השנייה תמשיך את הפתרון של נורית (השוואה בין ערך הפונקציה הנגזרת לשיפוע המשיק לפונקציה).

ישר משיק

בכיתה י' בבית הספר "גנים" נתנה המורה את הבעיות הבאות:

1. הישר $y=3x-16$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^2-5x$. מצאו את נקודת ההשקה.

רקפת ונורית התחילו לפתור את המשימה.

המשיכו את הפתרונות של רקפת ושל נורית ומצאו את נקודת ההשקה.

הפתרון של רקפת	הפתרון של נורית
לישר המשיק ולפונקציה יש נקודה משותפת. כדי למצוא אותה נשווה את ערכי הפונקציה לערכי הישר. מתקבלת המשוואה: $x^2-5x=3x-16$	לישר המשיק ולפונקציה יש שיפוע שווה בנקודת ההשקה. נחשב את הפונקציה הנגזרת: $f'(x)=2x-5$ כדי למצוא את נקודת ההשקה נשווה את הנגזרת לשיפוע המשיק. מתקבלת המשוואה: $2x-5=3$

2. הישר $y=9x+10$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+6x^2+9x+10$. מצאו את נקודת ההשקה.

רקפת ונורית התחילו לפתור את המשימה.

המשיכו את הפתרונות של רקפת ושל נורית ומצאו את נקודת ההשקה.

הפתרון של רקפת	הפתרון של נורית
לישר המשיק ולפונקציה יש נקודה משותפת. כדי למצוא אותה נשווה את ערכי הפונקציה לערכי הישר. מתקבלת המשוואה: $x^3+6x^2+9x+10=9x+10$	לישר המשיק ולפונקציה יש שיפוע שווה בנקודת ההשקה. נחשב את הפונקציה הנגזרת: $f'(x)=3x^2+12x+9$ כדי למצוא את נקודת ההשקה נשווה את הנגזרת לשיפוע המשיק. מתקבלת המשוואה: $3x^2+12x+9=9$

- **דיון**
  - מתייחסים לפתרונות של רקפת ונורית לבעיה 1. הפתרון של רקפת: השוואה בין ערכי הפונקציה למשיק; הפתרון של נורית: השוואה בין שיפוע המשיק לערך הנגזרת בנקודה.

    דנים בשאלות הבאות:

    – האם בשתי הדרכים נמצאה נקודת ההשקה? נמקו.

    – האם תמיד שתי הדרכים יובילו לאותה נקודת השקה?

○ מתייחסים לפתרונות של רקפת ונורית לבעיה 2. מומלץ לרשום על הלוח את המשך הפתרונות של נורית ורקפת עד לשלב שבו יש להשתמש בקשר השני, כמוצע בטבלה הבאה:

הפתרון של רקפת	הפתרון של נורית
נתונה הפונקציה $f(x)=x^3+6x^2+9x+10$ משוואת המשיק $y=9x+10$ בנקודת ההשקה ערכי הפונקציה והמשיק שווים, ולכן: $x^3+6x^2+9x+10=9x+10$ $x^3+6x^2=0$ $x^2(x+6)=0$ $x_1=-6\ ,\ x_2=0$	נתונה הפונקציה $f(x)=x^3+6x^2+9x+10$ הפונקציה הנגזרת $f'(x)=3x^2+12x+9$ משוואת המשיק $y=9x+10$ בנקודת ההשקה יש לפונקציה ולמשיק שיפועים שווים, ולכן: $3x^2+12x+9=9$ $3x^2+12x=0$ $3x(x+4)=0$ $x_1=-4\ ,\ x_2=0$

דנים בשאלות הבאות:

– בפתרון של רקפת משווים בין ערכי הפונקציה למשיק. מה נותנת השוואה כזאת?

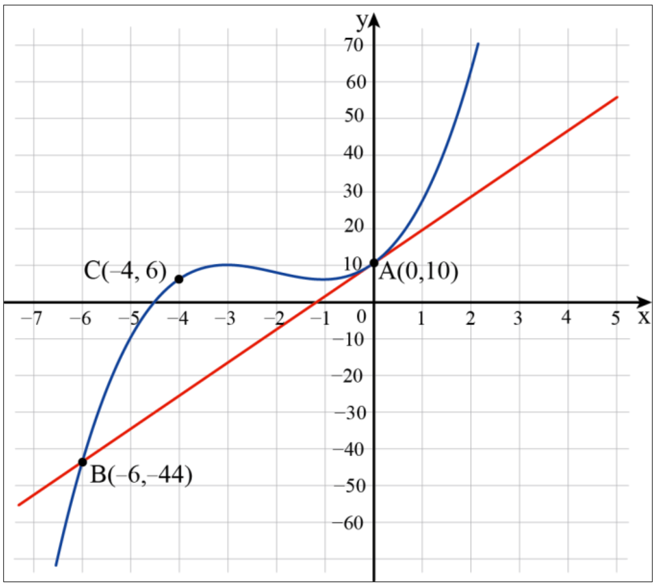
בהשוואה מקבלים שני פתרונות: $x_1=-6\ ,\ x_2=0$. מה משמעות הפתרונות האלה מבחינה גרפית? האם שניהם חייבים לתת נקודות השקה? אם לא, איך נדע להחליט איזה משניהם?

– בפתרון של נורית משווים בין שיפוע הפונקציה לשיפוע המשיק. מה נותנת השוואה כזאת?

בהשוואה מקבלים שני פתרונות: $x_1=-4\ ,\ x_2=0$. האם שניהם חייבים לתת נקודת השקה? אם לא, איך נדע להחליט איזה משניהם?

○ נעזרים בהצגה הגרפית של הפונקציה והמשיק כדי להמחיש לתלמידים את משמעות הפתרונות שקיבלו.

למשל: בשרטוט שלפניכם נתונים גרף הפונקציה $f(x)=x^3+6x^2+9x+10$ והמשיק $y=9x+10$.



– מה משותף לנקודות A ו- B המסומנות בשרטוט?

– מהשרטוט רואים בבירור שרק נקודה A היא נקודת ההשקה. איזו תכונה מתקיימת בנקודה A ואינה מתקיימת בנקודה B?

סיימו את הפתרון של רקפת על הלוח.

– מה משותף לנקודות A ו- C המסומנות בשרטוט?

– מהשרטוט רואים בבירור שרק נקודה A היא נקודת ההשקה. איזו תכונה מתקיימת בנקודה A ואינה מתקיימת בנקודה C?

סיימו את הפתרון של נורית על הלוח.

- **סיכום**
  - דנים בשאלות הבאות:

– האם כל נקודה משותפת לפונקציה ולישר משיק היא גם נקודת השקה?

– האם כל נקודת השקה היא גם נקודה משותפת לפונקציה ולישר משיק?

– האם כל נקודה על גרף הפונקציה שבה שיפוע הפונקציה ושיפוע המשיק שווים, היא נקודת השקה?

– האם בכל נקודת השקה שיפוע הפונקציה ושיפוע המשיק שווים?

מסכמים: אם ישר משיק לפונקציה בנקודה מסוימת, אז מתקיימים הקשרים הבאים:

– ערכי הפונקציה והמשיק שווים בנקודה זו.

– ערך הפונקציה הנגזרת שווה לשיפוע המשיק בנקודה זו.

ואם מתקיימים שני הקשרים האלה בנקודה מסוימת, אז הישר משיק לפונקציה בנקודה זו.

- ניתן להביא דוגמה של ישר המשיק לפונקציה בשתי נקודות. למשל, הישר $y=-8$ משיק לפונקציה $y=\frac{x^4}{32}-x^2$ בשתיים מנקודות הקיצון שלה. לעומת זאת, הישר $y=0$ משיק לאותה הפונקציה בנקודה אחת וחותך אותה בשתי נקודות נוספות.

- אפשר לדון במקרה הכללי של השקה בין שתי פונקציות ולא רק בין פונקציה וישר משיק.

לדוגמה: מצאו את נקודת ההשקה של הפונקציות $f(x)=2x^3-10$ ו- $g(x)=-3x^2+12x+10$.